Mecânica Relacional

e Implementação do Princípio de Mach com a Força de Weber Gravitacional

André Koch Torres Assis

Mecânica Relacional

e Implementação do Princípio de Mach com a Força de Weber Gravitacional

André Koch Torres Assis

Apeiron
Montreal

Published by C. Roy Keys Inc.
4405, rue St-Dominique
Montreal, Quebec H2W 2B2 Canada
http://redshift.vif.com

First Published 2013

National Library of Canada Cataloguing in Publication

Assis, André Koch Torres, 1962-, author
Mecânicia relacional e implementação do princípio de mach com a força de Weber gravitacional / André Koch Torres Assis.

Includes bibliographical references.
ISBN 978-0-9864926-9-3 (pbk.)

1. Mechanics. 2. Gravitation. 3. Inertia (Mechanics). I. Title.

QC125.2.A87 2013 531 C2013-902721-1

Capa da frente

São detectados efeitos visíveis quando um carro é uniformemente acelerado em relação ao solo (por exemplo, com uma aceleração $a = 5$ m/s^2 para a direita): molas horizontais ficam deformadas, um pêndulo fica inclinado com a vertical e a superfície da água em um recipiente fica inclinada com a horizontal. O que aconteceria com estes corpos se fosse possível acelerar uniformemente o conjunto de galáxias no sentido oposto com a mesma intensidade (por exemplo, com uma aceleração em relação ao solo de -5 m/s^2 para a esquerda), mantendo o carro em repouso na Terra? Nada aconteceria de acordo com a mecânica newtoniana. Já de acordo com a mecânica relacional os mesmos efeitos devem ocorrer em todos estes corpos. Como a situação cinemática é a mesma, com a mesma aceleração relativa entre estes corpos e o conjunto de galáxias, os mesmos efeitos dinâmicos têm de acontecer. Fenômenos como estes são discutidos detalhadamente nesta obra.

Sumário

Dedicado à memória de Isaac Newton,
que indicou o caminho para as gerações
passadas, presentes e futuras.

Agradecimentos

Este livro é uma versão ampliada de algumas obras anteriores, entre as quais podemos citar *On Mach's principle* (1989), *On the absorption of gravity* (1992), *Mecânica Relacional* (1998), *Relational Mechanics* (1999), *Uma Nova Física* (1999) e *The principle of physical proportions* (2001 a 2004).[1] Além das pessoas e Instituições mencionadas nestas obras, gostaríamos de agradecer também a diversos outros colegas por suas sugestões, referências, ideias, apoio e incentivo: Silvio Chibeni, José Lourenço Cindra, Ricardo Lopes Coelho, Eduardo Greaves, Hermann Härtel, David de Hilster, C. Roy Keys, Wolfgang Lange, José Oscar de Almeida Marques, Juan Manuel Montes Martes, Itala M. L. D'Ottaviano, Francisco A. Gonzalez Redondo, Karin Reich, Martin Tajmar, Frederick David Tombe, Greg Volk, Karl-Heinrich Wiederkehr (in Memoriam), Bernd Wolfram e Gudrun Wolfschmidt.

[1] [Ass89a], [Ass92f], [Ass98], [Ass99a], [Ass99b], [Ass01], [Ass03a] e [Ass04]. Todos os artigos e a maioria dos livros de Assis encontram-se disponíveis em formato PDF na homepage: http://www.ifi.unicamp.br/˜assis

Prefácio

Este livro apresenta a *Mecânica Relacional*, que é uma nova mecânica que se contrapõe tanto à mecânica clássica de Newton, quanto às teorias da relatividade especial e geral de Einstein. Ela responde a questões que não foram esclarecidas pelas teorias de Newton e Einstein. Nesta nova mecânica não aparecem os conceitos de espaço absoluto, de tempo absoluto e nem de movimento absoluto, que formavam a base da mecânica de Newton. Também não aparecem os conceitos de inércia, de massa inercial e dos sistemas inerciais de referência, conceitos estes também relacionados à mecânica clássica. Apenas quando comparamos esta nova mecânica com a mecânica newtoniana é que passamos a ter uma compreensão clara destes conceitos antigos.

A mecânica relacional é uma implementação quantitativa das ideias de Leibniz, Berkeley e Mach utilizando uma força de Weber para a gravitação. Ela é baseada apenas em grandezas relacionais, tais como a distância entre corpos materiais, a velocidade radial relativa entre eles, e a aceleração radial relativa entre eles. Muitas pessoas ajudaram neste desenvolvimento, entre elas o próprio Wilhelm Weber e Erwin Schrödinger.

Este livro tem como objetivo apresentar as propriedades e características desta nova visão da física, assim como os principais aspectos de seu desenvolvimento histórico a partir de Newton. Desta forma a mecânica relacional pode ser vista de maneira completa. Fica então fácil fazer uma comparação com as visões anteriores do mundo, a saber, com as mecânicas newtoniana e einsteiniana.

Uma grande ênfase é dada para a experiência do balde de Newton. Quando um balde com água fica parado no solo, observa-se que a superfície da água fica plana. Quando o balde e a água giram juntos em relação ao solo ao redor do eixo do balde com uma velocidade angular constante, observa-se que a superfície da água fica côncava, mais alta ao longo das paredes do que no eixo do balde. Esta é uma das experiências mais simples já realizadas na física. Apesar deste fato, nenhuma outra experiência teve consequências tão amplas e profundas sobre os fundamentos da mecânica. Colocamos no mesmo nível a descoberta experimental, devida a Galileu, da igualdade de aceleração dos corpos em queda livre na superfície da Terra, não importando seus pesos ou composições químicas. A explicação destes dois fatos, sem utilizar os conceitos de espaço absoluto ou de inércia, mas levando em conta a influência gravitacional exercida nestes dois fenômenos pelas galáxias distantes, é um dos maiores feitos da mecânica relacional.

Para mostrar todo seu poder e para analisá-la em perspectiva, inicialmente apresentamos a mecânica newtoniana e as teorias da relatividade de Einstein. Discutimos as críticas à teoria newtoniana apresentadas por Leibniz, Berkeley e Mach. Apresentamos diversos problemas que aparecem nas teorias da relatividade de Einstein. Depois disto, introduzimos a mecânica relacional e mostramos como ela resolve quantitativamente, com uma clareza e simplicidade sem igual quando comparada com qualquer outro modelo, todos os problemas e aspectos negativos da mecânica clássica. Também apresentamos em detalhes a história da mecânica relacional, enfatizando as conquistas e limitações dos principais trabalhos anteriores relacionados a ela. Além disto, apresentamos diversos aspectos que vão além da teoria newtoniana, tais como a precessão do periélio dos planetas, a anisotropia da massa inercial efetiva, a mecânica adequada para partículas movendo-se a altas velocidades, etc. Também são apresentados testes experimentais da mecânica relacional.

Este livro é uma versão ampliada de algumas obras anteriores, entre as quais podemos citar *On Mach's principle* (1989), *Mecânica Relacional* (1998), *Relational Mechanics* (1999), *Uma Nova Física* (1999) e *The principle of physical proportions* (2001 a 2004).[2] Diversas melhorias foram feitas em relação a estes trabalhos:

- Há um número bem maior de figuras. Além disso, procurou-se sempre representar o objeto material (Terra, estrelas ou galáxias) em relação ao qual o movimento do corpo de prova está sendo descrito.
- As explicações ficaram mais claras e didáticas.
- Os fenômenos relacionados com a rotação da Terra em relação ao referencial das estrelas fixas foram analisados separadamente no referencial das estrelas e no referencial terrestre.

[2] [Ass89a], [Ass98], [Ass99a], [Ass99b] e [Ass01], [Ass03a] e [Ass04].

- Evita-se utilizar o conceito de campo (gravitacional, elétrico ou magnético). Ele é empregado apenas quando são utilizadas as concepções de Faraday, Maxwell e Lorentz. Para evitar os diversos problemas associados com o conceito de campo, utilizam-se aqui os conceitos de força por unidade de massa, força por unidade de carga ou força por unidade de polo magnético.

- Ao apresentar a mecânica relacional, procurou-se deixar indicado claramente nas equações a dependência de alguns fenômenos em relação à densidade média de massa gravitacional no universo.

- Foi feita uma discussão detalhada da distinção conceitual e experimental entre o movimento relativo e o movimento absoluto não apenas nos casos em que os corpos estão girando, mas também nos casos em que estão acelerados ao longo de uma linha reta.

- Foram analisados diversos fenômenos novos.

- Foram ampliadas as citações de textos originais e as referências bibliográficas.

- Foi incluído um Apêndice mostrando diversas maneiras de calcular a força de Weber exercida por uma casca esférica ao atuar sobre um corpo interno à casca. Este é o principal resultado que distingue a mecânica relacional tanto da mecânica newtoniana, quanto das teorias da relatividade de Einstein.

Este livro é direcionado a físicos, matemáticos, engenheiros, filósofos e historiadores da ciência. É voltado também aos professores de física que atuam a nível de ensino médio e universitário, assim como a seus estudantes. Todas as pessoas que já aprenderam ou ensinaram a mecânica newtoniana conhecem as dificuldades e sutilezas de seus conceitos básicos (referencial inercial, proporcionalidade entre as massas inerciais e gravitacionais, força centrífuga fictícia, etc.) Acima de tudo, é escrito para as pessoas jovens e sem preconceitos que têm um interesse nas questões fundamentais da física. Listamos algumas destas questões aqui:

- Existe o movimento absoluto de qualquer corpo em relação ao espaço vazio? Ou existe apenas o movimento relativo deste corpo em relação a outros corpos materiais?

- Como distinguir experimentalmente entre estas duas concepções diametralmente opostas sobre o movimento? Podemos provar experimentalmente que um corpo está acelerado em relação ao espaço vazio? Ou será que só podemos provar experimentalmente que um corpo está acelerado em relação a outros corpos?

- Qual é o significado da inércia? Qual é o significado da força inercial?

- Existe algum agente material que exerce a força inercial sobre um corpo?

- Por que dois corpos de pesos, formas e composições químicas diferentes caem com a mesma aceleração no vácuo sobre a superfície da Terra?

- Quando Newton girou o balde junto com a água em relação ao solo e viu que a água havia subido pelas paredes do balde, qual foi o agente responsável por este efeito? Esta elevação se deve à rotação da água em relação a quê? Será que esta elevação se deve à rotação da água em relação ao espaço absoluto vazio, como pensava Newton? Ou será ela devida à rotação relativa entre a água e os corpos astronômicos distantes, como pensava Mach?

- Suponha que o balde e a água estejam parados em relação ao solo, com a superfície da água ficando plana. Se fosse possível girar rapidamente todos os outros corpos astronômicos ao redor do eixo do balde, será que a superfície da água continuaria plana? Ou será que ela ficaria côncava, subindo pelas paredes do balde?

- Sabe-se que a Terra está achatada nos polos, sendo o diâmetro de Norte a Sul menor do que o diâmetro de Leste a Oeste. Newton foi o primeiro a prever e a calcular o valor deste efeito, relacionando-o com a rotação diária da Terra ao redor de seu eixo Norte-Sul. Será que este achatamento é devido à rotação diária da Terra em relação ao espaço vazio, como pensava Newton? Ou será que este achatamento é devido à rotação da Terra em relação aos outros corpos astronômicos, como pensava Mach?

- Qual seria o formato da Terra se todos os outros corpos do universo fossem aniquilados e ela ficasse sozinha no universo? Faria sentido dizer que ela ainda gira uma vez por dia? Será que ela ainda continuaria achatada?

- Foucault observou que o plano de oscilação de um pêndulo não fica fixo em relação à superfície terrestre. O plano de oscilação de um pêndulo de Foucault colocado no polo Norte acompanha o movimento das estrelas e galáxias ao redor da Terra. Existe alguma relação causal entre estes dois fatos, assim como pensava Mach? Ou isto é apenas uma coincidência? Se pudéssemos parar a rotação das estrelas e galáxias ao redor da Terra, será que o plano de oscilação do pêndulo de Foucault também ficaria parado em relação à superfície terrestre? Ou será que ele continuaria a precessar em relação ao solo do mesmo jeito que antes?

- Quais são as possíveis experiências que podem ser feitas para distinguir entre as concepções de Newton e de Mach? Newton defendia que existem efeitos mensuráveis quando os corpos ficam acelerados de forma absoluta em relação ao espaço vazio. Mach, por outro lado, defendia que todos estes efeitos apontados por Newton seriam na verdade devidos à aceleração relativa entre este corpo e os corpos astronômicos distantes. Como testar no laboratório estas duas concepções?

Neste livro apresentamos a resposta a todas estas questões sob o ponto de vista da mecânica relacional.

Após compreender a mecânica relacional entramos em um novo mundo, enxergando os mesmos fenômenos com olhos diferentes e sob uma nova perspectiva. É uma mudança de paradigma, considerando esta palavra no sentido utilizado por Kuhn em seu importante trabalho.[3] Espera-se com este livro que outras pessoas passem a trabalhar ativamente com a mecânica relacional, desenvolvendo novas experiências e cálculos relacionados com esta teoria.

Neste livro, empregamos o Sistema Internacional de Unidades. Quando definimos qualquer grandeza ou conceito físico, utilizamos "$\equiv$" como símbolo de definição.

André Koch Torres Assis[4]

[3] [Kuh82].

[4] Instituto de Física, UNICAMP, 13083-859 Campinas, SP, Brasil, e-mail: assis@ifi.unicamp.br — homepage: http://www.ifi.unicamp.br/~assis

Parte I

A Mecânica Clássica

Capítulo 1

Mecânica Newtoniana

1.1 Introdução

O ramo do conhecimento que trata do equilíbrio e do movimento dos corpos é chamado de mecânica. Nos últimos trezentos anos esta área da física tem sido ensinada baseada no trabalho de Isaac Newton (1642-1727), sendo chamada de mecânica clássica ou newtoniana. Seu livro principal é o *Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*, usualmente conhecido por seu primeiro nome em latim, *Principia*.[1] Este livro foi publicado originalmente em 1687. Ele está dividido em três partes, Livros I, II e III. Estas três partes já se encontram traduzidas para a língua portuguesa, de onde tiramos as citações.[2]

A segunda grande obra de Newton é o livro *Óptica*, publicado originalmente em 1704. Ao contrário do *Principia*, escrito em latim, a *Óptica* foi escrita na língua inglesa. O livro *Óptica* também já se encontra totalmente traduzido para a língua portuguesa.[3] Usaremos esta tradução quando citarmos as palavras de Newton tiradas deste livro.

A mecânica newtoniana como apresentada no *Principia* é baseada nos conceitos de espaço, tempo, velocidade, aceleração, peso, massa, força, etc. Esta formulação de Newton é apresentada na Seção 1.2.

Sempre houve uma grande discussão entre os filósofos e cientistas muito antes de Newton sobre a distinção entre movimento absoluto e relativo.[4] O movimento absoluto é concebido como sendo o movimento de um corpo em relação ao espaço vazio. Já o movimento relativo é concebido como sendo o movimento de um corpo em relação a outros corpos. Em nosso livro consideramos apenas Newton e os que se seguiram a ele. O motivo para isto é o sucesso impressionante obtido pela mecânica newtoniana no que diz respeito aos fenômenos observados na natureza e o novo padrão introduzido por Newton em toda esta discussão, com seus argumentos dinâmicos para defender o movimento absoluto. Podemos citar, em especial, sua famosa experiência do balde e o achatamento da Terra. Este são alguns dos temas principais deste livro.

1.2 Leis do Movimento

Nesta Seção vamos apresentar a mecânica clássica nas palavras de Newton. Além disso, vamos também introduzir fórmulas algébricas modernas que sintetizam sua formulação em linguagem matemática utilizando tanto grandezas vetoriais quanto o Sistema Internacional de Unidades.

O *Principia* começa com oito definições. A primeira definição é a de quantidade de matéria, também chamada de corpo ou massa. Newton a definiu como o produto da densidade do corpo pelo volume que ele ocupa:[5]

> *Definição I: A quantidade de matéria é a medida da mesma, obtida conjuntamente a partir de sua densidade e volume.*
>
> Assim, o ar com o dobro de densidade, num espaço duplicado, tem o quádruplo da quantidade; num espaço triplicado, o sêxtuplo da quantidade. O mesmo deve ser entendido com respeito à

[1] [New34].
[2] [New90], [New08b] e [New10].
[3] [New96].
[4] [Jam57] com tradução para a língua portuguesa em [Jam11], [Dug88], [Evo88], [BX89], [Bar89], [Jam93] com tradução para a língua portuguesa em [Jam10], e [Evo94].
[5] [New90, pág. 1].

neve, e pó fino ou matéria pulverizada, condensados por compressão ou liquefação, bem como para todos os corpos que, por quaisquer causas, são condensados diferentemente. Não me refiro, aqui, a um meio, se é possível dizer que tal meio existe, que permeia livremente os interstícios entre as partes dos corpos. É essa quantidade que doravante sempre denominarei pelo nome de corpo ou massa. A qual é conhecida através do peso de cada corpo, pois é proporcional ao peso, como encontrei com experimentos com pêndulos, realizados muito rigorosamente, os quais serão mostrados mais adiante.

No *Principia* Newton falou apenas de um tipo de massa, a quantidade de matéria do corpo. Depois de Newton, passou a ser usual denominar esta grandeza pelo nome de *massa inercial*, para distingui-la da massa que aparece na lei da gravitação universal, denominada hoje em dia de *massa gravitacional.* Estes dois conceitos de massa são discutidos na Subseção 1.3.2.

Representando a quantidade de matéria (a massa inercial) de um corpo por m_i, sua densidade de massa inercial por ρ_i e seu volume por V, temos então:

$$m_i \equiv \rho_i V \ . \tag{1.1}$$

Como veremos na Seção 13.4, Ernst Mach (1838-1916) criticou esta definição, já que Newton não havia definido anteriormente a densidade do corpo, nem mostrado como medir esta densidade de forma independente da medida da massa. Para Mach era necessário haver uma definição de massa que não dependesse da densidade, sendo então a densidade definida como a razão da massa para o volume do corpo. Na Seção 13.4 será discutida a definição de massa inercial apresentada por Mach.

Depois, Newton definiu a quantidade de movimento pelo produto da quantidade de matéria com a velocidade do corpo:[6]

> *Definição II: A quantidade de movimento é a medida do mesmo, obtida conjuntamente a partir da velocidade e da quantidade de matéria.*
>
> O movimento do todo é a soma dos movimentos de todas as partes; portanto, em um corpo com o dobro da quantidade, com a mesma velocidade, o movimento é duplo; com o dobro da velocidade, é quádruplo.

Representando a velocidade vetorial por $\vec{v}$ e a quantidade de movimento por $\vec{p}$ temos:

$$\vec{p} \equiv m_i \vec{v} \ . \tag{1.2}$$

Veremos logo em seguida que, para Newton, esta velocidade era para ser entendida como a velocidade do corpo em relação ao espaço absoluto, medida pelo tempo absoluto.

Newton, então, definiu as expressões equivalentes *vis insita* ou *vis inertiae*. A primeira expressão pode ser traduzida por força inata da matéria, força intrínseca ou força inerente ao corpo. A segunda expressão pode ser traduzida por força inercial, força da inércia, inércia ou força de inatividade. Palavras de Newton:[7]

> *Definição III: A* vis insita*, ou força inata da matéria, é um poder de resistir, através do qual todo o corpo, estando em um determinado estado, mantém esse estado, seja ele de repouso ou de movimento uniforme em linha reta.*
>
> Essa força é sempre proporcional ao corpo ao qual ela pertence, e em nada difere da inatividade da massa, a não ser pela nossa maneira de concebê-la. A partir da natureza inerte da matéria, um corpo não tem seu estado de repouso ou movimento facilmente alterado. Sob esse ponto de vista, essa *vis insita* pode ser chamada, mais significativamente, de inércia (*vis inertiae*) ou força de inatividade. Mas um corpo só exerce essa força quando outra força, imprimida sobre ele, procura mudar sua condição; e o exercício dessa força pode ser considerado tanto como resistência quanto como impulso; resistência na medida em que, para conservar seu estado, o corpo opõe-se à força imprimida; e impulso na medida em que o corpo, não cedendo facilmente à força imprimida por um outro, esforça-se para mudar o estado deste outro corpo. Resistência é normalmente atribuída a corpos em repouso, e impulso àqueles em movimento; mas movimento e repouso, como vulgarmente concebidos, diferem apenas relativamente um ao outro; nem esses corpos estão sempre verdadeiramente em repouso, como vulgarmente são considerados.

[6] [New90, pág. 2].
[7] [New90, pág. 2].

Sua quarta definição é a de força imprimida:[8]

> *Definição IV: Uma força imprimida é uma ação exercida sobre um corpo, a fim de alterar seu estado, seja de repouso, ou de movimento uniforme em uma linha reta.*

A quinta definição é a de força centrípeta:[9]

> *Definição V: Uma força centrípeta é aquela pela qual os corpos são dirigidos ou impelidos, ou tendem de qualquer maneira, para um ponto como centro.*
>
> [...]

Vêm, então, as definições de quantidade absoluta de uma força centrípeta, de quantidade acelerativa de uma força centrípeta e de quantidade motora de uma força centrípeta.

Após estas definições, há um Escólio com as definições de tempo absoluto, espaço absoluto e movimento absoluto.[10] Citamos as partes principais das definições de Newton:[11]

> *Escólio*
>
> Até aqui estabeleci as definições dos termos acima do modo como eles são menos conhecidos e expliquei o sentido no qual eles devem ser entendidos no que segue. Não defino tempo, espaço, lugar e movimento, por serem bem conhecidos de todos. Contudo, observo que o leigo não concebe essas quantidades sob outras noções exceto a partir das relações que elas guardam com os objetos perceptíveis. Daí surgem certos preconceitos, para a remoção dos quais será conveniente distingui-las entre absolutas e relativas, verdadeiras e aparentes, matemáticas e comuns.
>
> I - O tempo absoluto, verdadeiro e matemático, por si mesmo e da sua própria natureza, flui uniformemente sem relação com qualquer coisa externa e é também chamado de duração; o tempo relativo, aparente e comum é alguma medida de duração perceptível e externa (seja ela exata ou não uniforme) que é obtida através do movimento e que é normalmente usada no lugar do tempo verdadeiro, tal como uma hora, um dia, um mês, um ano.
>
> II - O espaço absoluto, em sua própria natureza, sem relação com qualquer coisa externa, permanece sempre similar e imóvel. Espaço relativo é alguma dimensão ou medida móvel dos espaços absolutos, a qual nossos sentidos determinam por sua posição com relação aos corpos, e é comumente tomado por espaço imóvel; assim é a dimensão de um espaço subterrâneo, aéreo ou celeste, determinado pela sua posição com relação a Terra. Espaços absoluto e relativo são os mesmos em configuração e magnitude, mas não permanecem sempre numericamente iguais. Pois, por exemplo, se a Terra se move, um espaço de nosso ar, o qual relativamente a Terra permanece sempre o mesmo, em um dado tempo será uma parte do espaço absoluto pela qual passa o ar, em um outro tempo será outra parte do mesmo, e assim, entendido de maneira absoluta, será continuamente mudado.
>
> III - Lugar é uma parte do espaço que um corpo ocupa, e de acordo com o espaço, é ou absoluto ou relativo. [...]
>
> IV - Movimento absoluto é a translação de um corpo de um lugar absoluto para outro; e movimento relativo, a translação de um lugar relativo para outro. [...]

A seguir, Newton apresentou suas três leis do movimento, que também chamou de axiomas:[12]

> *Axiomas ou Leis do Movimento*
>
> *Lei I: Todo corpo continua em seu estado de repouso ou de movimento uniforme em uma linha reta, a menos que seja forçado a mudar aquele estado por forças imprimidas sobre ele.*
>
> [...]
>
> *Lei II: A mudança de movimento é proporcional a força motora imprimida, e é produzida na direção da linha reta na qual aquela força é imprimida.*

[8] [New90, pág. 3].
[9] [New90, pág. 3].
[10] [Bar93].
[11] [New90, págs. 6-8].
[12] [New90, págs. 15-23].

[...]

Lei III: A toda ação há sempre oposta uma reação igual, ou, as ações mútuas de dois corpos um sobre o outro são sempre iguais e dirigidas a partes opostas.

[...]

Corolário 1: Um corpo, submetido a duas forças simultaneamente, descreverá a diagonal de um paralelogramo no mesmo tempo em que ele descreveria os lados pela ação daquelas forças separadamente.

[...]

Corolário 4: O centro comum de gravidade de dois ou mais corpos não tem seu estado de movimento ou de repouso alterado pelas ações dos corpos entre si e, portanto, o centro comum de gravidade de todos os corpos agindo uns sobre os outros (excluindo ações externas e impedimentos) ou está em repouso, ou se move uniformemente em uma linha reta.

[...]

Corolário 5: O movimento de corpos encerrados em um dado espaço são os mesmos entre si, esteja esse espaço em repouso, ou se movendo uniformemente em uma linha reta sem qualquer movimento circular.

[...]

Sua primeira lei do movimento é usualmente chamada de *lei da inércia*.

Sua segunda lei do movimento pode ser escrita como:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m_i \vec{v}) \ . \tag{1.3}$$

Aqui chamamos de $\vec{F}$ à força resultante agindo sobre o corpo. Se a massa inercial m_i é constante, então esta lei pode ser colocada na forma simples e bem conhecida dada por:

$$\vec{F} = m_i \vec{a} \ , \tag{1.4}$$

onde $\vec{a} = d\vec{v}/dt$ é a aceleração do corpo em relação ao espaço absoluto, figura 1.1. O espaço absoluto está sendo identificado com o papel no qual é feita esta figura já que, de acordo com Newton, ele não tem relação com qualquer coisa material externa ao corpo. Logo esta aceleração $\vec{a}$ não é para ser entendida como a aceleração do corpo em relação ao solo nem em relação a outros corpos materiais (tais como as estrelas fixas). O espaço absoluto de Newton é então equivalente ao espaço vazio ou ao vácuo.

Figura 1.1: Corpo com massa inercial m_i deslocando-se com aceleração $\vec{a}$ em relação ao espaço absoluto.

Suponha que temos um conjunto de N corpos interagindo entre si. Seja p um destes corpos com massa inercial m_{ip} deslocando-se em relação ao espaço absoluto com uma aceleração $\vec{a}_p$, com $p = 1, ..., N$. Seja k um outro corpo entre estes N corpos. Vamos representar a força exercida pelo corpo p sobre o corpo k por $\vec{F}_{pk}$. Neste caso a equação (1.4) pode ser escrita para o corpo k da seguinte forma:

$$\sum_{\substack{p=1 \\ p\neq k}}^{N} \vec{F}_{pk} = m_{ik} \vec{a}_k \ . \tag{1.5}$$

As trajetórias e os movimentos dos corpos são obtidos na mecânica clássica por esta equação. Alguns casos especiais necessitam da utilização da equação (1.3), tais como um foguete queimando combustível e ejetando gases, um caminhão que vai perdendo areia, etc. Estas situações de massa variável também podem ser resolvidas pela equação (1.4), desde que se considere separadamente cada um dos componentes do problema (o foguete e os gases ejetados, ou o caminhão e a areia perdida, etc.) Pode-se considerar então que a equação (1.4) é a base fundamental da mecânica newtoniana.

Sua terceira lei do movimento é chamada de *lei da ação e reação*. Representando a força exercida por um corpo A sobre um outro corpo B por $\vec{F}_{AB}$ e a força exercida por B sobre A por $\vec{F}_{BA}$, a terceira lei afirma que:

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} \ . \tag{1.6}$$

Sempre que Newton utilizou a terceira lei, as forças entre os corpos estavam direcionadas ao longo da linha reta que os une, como na lei da gravitação.

Seu primeiro corolário é chamado de lei do paralelogramo das forças.

Seu quinto corolário introduz o conceito de *referenciais inerciais*, isto é, sistemas de referência que se movem com uma velocidade constante em relação ao espaço absoluto. Estes referenciais inerciais são discutidos na Seção 1.7.

Neste livro denominaremos de "corpo de prova" ou "corpo de teste" ao corpo cujo movimento está sendo estudado.

1.3 Gravitação Universal

1.3.1 Formulação Moderna da Lei da Gravitação

Para aplicar sua formulação da mecânica, Newton precisava de expressões para as forças atuando sobre os corpos. A mais importante e famosa é sua lei da gravitação universal, apresentada por ele no terceiro livro do *Principia*. Esta lei pode ser expressa hoje em dia nas seguintes palavras: Cada partícula de matéria atrai qualquer outra partícula com uma força variando diretamente como o produto de suas massas gravitacionais e inversamente como o quadrado da distância entre elas.

Algebricamente a lei de gravitação de Newton pode ser escrita da seguinte forma:

$$\vec{F}_{21} = -G\frac{m_{g1}m_{g2}}{r^2}\hat{r} = -\vec{F}_{12} \ . \tag{1.7}$$

Nesta equação $\vec{F}_{21}$ é a força exercida pela massa gravitacional m_{g2} sobre a massa gravitacional m_{g1}, G é uma constante de proporcionalidade, r é a distância entre os corpos pontuais, $\hat{r}$ é o vetor unitário apontando de 2 para 1, enquanto que $\vec{F}_{12}$ é a força exercida por m_{g1} sobre m_{g2}, ver a figura 1.2.

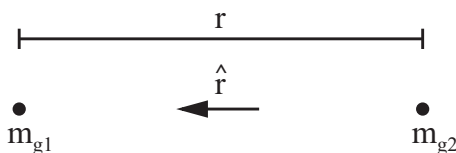



Figura 1.2: Dois corpos separados por uma distância r.

No Sistema Internacional de Unidades a grandeza G, chamada de constante de gravitação universal, é dada por:

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \ \frac{m^3}{kgs^2} \ . \tag{1.8}$$

1.3.2 Massa Inercial e Massa Gravitacional

Estamos chamando aqui as massas que aparecem na equação (1.7) de "massas gravitacionais," para distinguilas das "massas inerciais." As massas inerciais são as que aparecem na definição da quantidade de matéria, na definição de momento linear de um corpo e na segunda lei do movimento de Newton, equações (1.1), (1.2) e (1.4).

As massas gravitacionais também poderiam ser chamadas de "cargas gravitacionais," como preferem alguns autores, em função da grande analogia que há entre elas e as cargas elétricas. Uma carga elétrica gera e sente forças elétricas, isto é, atua sobre outras cargas acelerando-as, ao mesmo tempo em que é afetada pela presença de outras cargas, sendo acelerada por elas. Da mesma forma, as massas gravitacionais geram e sentem forças gravitacionais. Neste sentido e observando que a força eletrostática tem a mesma forma da força gravitacional de Newton, as massas gravitacionais têm uma analogia muito maior com as cargas

elétricas do que com as massas inerciais. É por este motivo que vamos manter a distinção entre as massas inerciais e as massas gravitacionais ao apresentar a formulação da mecânica newtoniana, embora o próprio Newton só tenha introduzido um conceito de massa no *Principia*, a saber, aquela que chamamos de "massa inercial" na Seção 1.2.

As massas gravitacionais são usualmente medidas com uma balança, sendo proporcionais ao peso ou à força gravitacional que atua sobre um corpo nas proximidades da Terra:

$$\frac{m_{g1}}{m_{g2}} \equiv \frac{P_1}{P_2} . \tag{1.9}$$

Por exemplo, vamos supor que com uma balança de braços iguais sejam encontrados cinco corpos que possuam o mesmo peso. Vamos representar o peso de cada um destes corpos por P_A e a massa gravitacional de cada um deles por m_{gA}. Vamos supor ainda que seja encontrado um outro corpo B que, ao ser colocado em um dos pratos desta balança, equilibre todos os outros cinco corpos colocados conjuntamente no outro braço desta balança. Temos então:

$$\frac{m_{gA}}{m_{gB}} \equiv \frac{P_A}{P_B} = \frac{1}{5} . \tag{1.10}$$

Uma discussão sobre como construir balanças e medir pesos encontra-se no livro *Arquimedes, o Centro de Gravidade e a Lei da Alavanca*.[13]

1.3.3 Formulação Original de Newton

Em nenhum lugar do *Principia* Newton expressou a lei gravitacional na forma da equação (1.7). Na Subseção 1.3.1 apresentamos uma formulação resumida de sua lei da gravitação nas seguintes palavras: Cada partícula de matéria atrai qualquer outra partícula com uma força variando diretamente como o produto de suas massas gravitacionais e inversamente como o quadrado da distância entre elas.

Newton também não chegou a formular sua lei nestas palavras, mas podemos encontrar afirmações similares nas seguintes passagens do *Principia*: Livro I, Proposições 72 a 75 e Proposição 76, especialmente Corolários 1 a 4; Livro III, Proposições 5, 7 e 8 e no Escólio Geral ao fim do Livro III. No Livro I, Proposição 76, Corolários 1 a 4, por exemplo, Newton afirmou, referindo-se a esferas 1 e 2 com distribuições isotrópicas de matéria (ou seja, com densidades de massa do tipo $\rho_1(r)$ e $\rho_2(r)$), nas quais cada ponto atrai com uma força que varia inversamente com o quadrado da distância:[14]

> Corolário 1. Assim, se muitas esferas deste tipo, semelhantes em todos os aspectos, atraem-se mutuamente, as atrações acelerativas de qualquer uma com relação as outras, a quaisquer distâncias dos centros, serão como as esferas atrativas.
>
> Corolário 2. E; a quaisquer distâncias desiguais, serão como as esferas atrativas divididas pelos quadrados das distâncias entre os centros.
>
> Corolário 3. As atrações motoras, ou os pesos das esferas uma em direção a outra, a iguais distâncias dos centros, serão conjuntamente como as esferas atrativa e atraída; isto é, como os produtos resultantes da multiplicação das esferas uma pela outra.
>
> Corolário 4. E, a distâncias desiguais, serão diretamente como aqueles produtos e inversamente como o quadrado das distâncias entre os centros.

Na Proposição 7 do Livro III, Newton afirmou:[15]

> *Que há um poder da gravidade pertencente a todos os corpos, proporcional às várias quantidades de matéria que eles contêm.*
>
> Provamos antes que todos os planetas gravitam em direção uns aos outros, assim como que a força da gravidade em direção a cada um deles, considerado separadamente, é inversamente como o quadrado das distâncias dos lugares aos centros do planeta. E, portanto, (pela Proposição 69, Livro I, e seus Corolários) segue-se que a gravidade tendendo em direção a todos os planetas é proporcional à matéria que eles contêm.

[13] [Ass08b], [Ass08a], [Ass10a] e [Ass11a].
[14] [New90, pág. 228].
[15] [New08b, págs. 203-204].

> Além disto, como todas as partes de qualquer planeta A gravitam em direção a qualquer outro planeta B, e a gravidade de toda parte está para a gravidade do todo assim como a matéria da parte está para a matéria do todo, e (pela Lei III) para cada ação corresponde uma reação igual, o planeta B, por sua parte, irá gravitar em direção a todas as partes do planeta A, e sua gravidade em direção a qualquer uma das partes estará para a gravidade em direção ao todo assim como a matéria da parte está para a matéria do todo. *Q.E.D.*

Este último parágrafo é muito importante. Ele mostra o papel fundamental da lei da ação e reação na obtenção do fato de que a força da gravidade é proporcional ao produto das massas dos dois corpos (e não, por exemplo, proporcional à soma das massas, ou proporcional ao produto das massas elevado ao quadrado, ou proporcional ao produto das massas elevado ao cubo etc.). French apresentou uma discussão detalhada e crítica dos argumentos de Newton para chegar na lei de gravitação, enfatizando a importância da lei da ação e reação nesta argumentação.[16]

No Escólio Geral no final do livro lemos:[17]

> Explicamos até aqui os fenômenos dos céus e do nosso mar pelo poder da gravidade, mas ainda não designamos a causa deste poder. Isto é certo, que ele tem de proceder de uma causa que penetra até os centros do Sol e dos planetas, sem sofrer a menor diminuição de sua força; que não opera de acordo com a quantidade das superfícies das partículas sobre as quais atua (como as causas mecânicas fazem usualmente), mas de acordo com a quantidade de matéria sólida que elas contêm, propagando sua virtude para todos os lados a distâncias imensas, diminuindo sempre como o inverso do quadrado das distâncias.

No *Sistema do Mundo* escrito por Newton, publicado pela primeira vez em 1728, também podemos ver a importância da lei da ação e reação para a dedução do fato de que a força gravitacional é proporcional ao produto das massas. Esta obra também já está totalmente traduzida para a língua portuguesa. Citamos aqui a Seção 20 do livro de Newton, logo após a Seção onde Newton discutiu as experiências com o pêndulo que mostraram a proporcionalidade entre o peso e a massa inercial:[18]

> Uma vez que a ação da força centrípeta sobre os corpos atraídos é, a distâncias iguais, proporcional às quantidades de matéria nesses corpos, a razão requer que ela também seja proporcional à quantidade de matéria no corpo atraente.
>
> Pois toda ação é mútua e (pela terceira Lei do Movimento) faz com que os corpos aproximem-se um do outro e, portanto, deve ser a mesma em ambos os corpos. É verdade que podemos considerar um corpo como atraente e outro como atraído, mas esta distinção é mais matemática do que natural. A atração reside, de fato, em cada corpo na direção do outro, sendo, portanto, do mesmo tipo em ambos.

1.4 As Forças Exercidas por Cascas Esféricas

1.4.1 Força Exercida por uma Casca Esférica Parada

Na Seção XII do Livro I do *Principia*, Newton provou dois teoremas extremamente importantes relacionados com a força exercida por uma casca esférica sobre corpos pontuais internos e externos. Nestas provas supôs forças que variam inversamente com o quadrado da distância entre as partículas que estão interagindo, como é o caso da sua força gravitacional, equação (1.7), ou da força eletrostática. No primeiro teorema Newton provou o seguinte:[19]

> *Seção XII: As forças atrativas de corpos esféricos*
>
> *Proposição 70. Teorema 30: Se para cada ponto de uma superfície esférica tenderem forças centrípetas iguais, que diminuem com o quadrado das distâncias a partir desses pontos, afirmo que um corpúsculo localizado dentro daquela superfície não será atraído de maneira alguma por aquelas forças.*

[16][Fre89].
[17][New08b, pág. 331].
[18][New08a, Seção 20, pág. 354].
[19][New90, pág. 221].

Isto é, se um corpo está localizado em qualquer lugar no interior da casca esférica (e não apenas sobre seu centro), a força resultante exercida por toda a casca sobre ele é nula. Isto está representado na figura 1.3, na qual temos uma casca esférica de massa gravitacional M_g, raio R e centro C, com um corpúsculo de massa gravitacional m_g localizado dentro dela em uma posição arbitrária, a uma distância r do centro da casca.

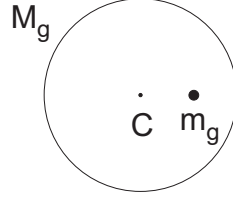



Figura 1.3: A casca esférica não exerce força sobre um corpúsculo localizado em qualquer ponto de seu interior.

O resultado obtido por Newton pode ser expresso matematicamente da seguinte forma:

$$\vec{F} = \vec{0}, \quad \text{se} \quad r < R \; . \tag{1.11}$$

Por simetria poderia ser concluído que a força seria nula caso o corpúsculo estivesse exatamente no centro da casca esférica. Se ele estivesse fora do centro, como no caso da figura 1.3, a única coisa que se poderia concluir a partir de argumentos de simetria é que a força resultante sobre o corpúsculo teria de estar ao longo da reta que une o corpúsculo com o centro da casca. Por outro lado, nenhum argumento de simetria levaria à conclusão de que esta força teria de ser nula. Pode-se mostrar que esta força resultante só é nula no caso em que a força entre as partículas é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas. Caso a força entre as partículas tivesse um outro comportamento (se variasse com o inverso do cubo da distância, por exemplo), então o resultado dado pela equação (1.11) deixaria de ser válido.

Já no teorema 31 Newton provou o seguinte resultado:[20]

> *Proposição 71. Teorema 31: Supondo-se o mesmo que acima, afirmo que um corpúsculo localizado fora da superfície esférica é atraído em direção ao centro da esfera com uma força inversamente proporcional ao quadrado de sua distância até este centro.*

Isto é, um corpo colocado fora da casca esférica é atraído como se a casca estivesse concentrada em seu centro. Isto está representado na figura 1.4, na qual temos uma casca esférica de massa gravitacional M_g, raio R e centro C, com um corpúsculo de massa gravitacional m_g localizado fora dela em uma posição arbitrária, a uma distância r do centro da casca. A força resultante sobre este corpúsculo aponta para o centro da casca e seu valor é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre o corpúsculo e o centro da casca.

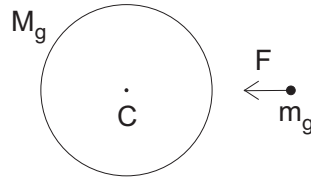



Figura 1.4: A casca esférica exerce uma força atrativa sobre um corpúsculo localizado fora dela apontando para o centro da casca e sendo inversamente proporcional ao quadrado da distância entre este centro e o corpúsculo.

Utilizando a lei de Newton da gravitação universal, equação (1.7), e sua Proposição 71, Teorema 31, obtém-se que uma casca esférica de massa gravitacional M_g e raio R exerce a seguinte força $\vec{F}$ sobre um corpúsculo de massa gravitacional m_g localizado a uma distância $r > R$ do centro da casca:

$$\vec{F} = -G\frac{M_g m_g}{r^2}\hat{r} \; , \quad \text{se} \quad r > R \; . \tag{1.12}$$

[20] [New90, pág. 222].

Aqui $\hat{r}$ é um vetor de módulo unitário apontando radialmente para fora da casca no local em que m_g se encontra, isto é, apontando do centro C para a partícula.

Vamos agora supor o caso em que o corpúsculo de massa gravitacional m_g está exatamente sobre a superfície da casca de raio R e massa gravitacional M_g, como na figura 1.5.

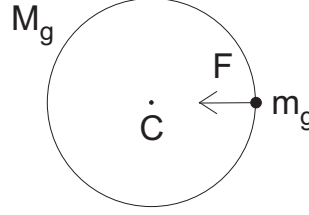



Figura 1.5: A casca esférica exerce uma força atrativa sobre um corpúsculo localizado exatamente sobre a superfície da casca apontando para o centro da casca.

A integração da lei de Newton, equação (1.7), fornece a seguinte força resultante $\vec{F}$ exercida pela casca sobre o corpúsculo:

$$\vec{F} = -\frac{G}{2}\frac{M_g m_g}{R^2}\hat{r} \ , \quad \text{se} \quad r = R \ . \tag{1.13}$$

As Proposições 70 e 71 do Livro I do *Principia* são apresentadas hoje em dia como segue. Temos uma casca esférica de massa gravitacional M_g e raio R centrada em O, figura 1.6. Vamos supor um sistema de referência parado em relação a esta casca, com sua origem sobre o centro da casca. Seja $\vec{r}$ um vetor posição apontando do centro da casca até um ponto material qualquer.

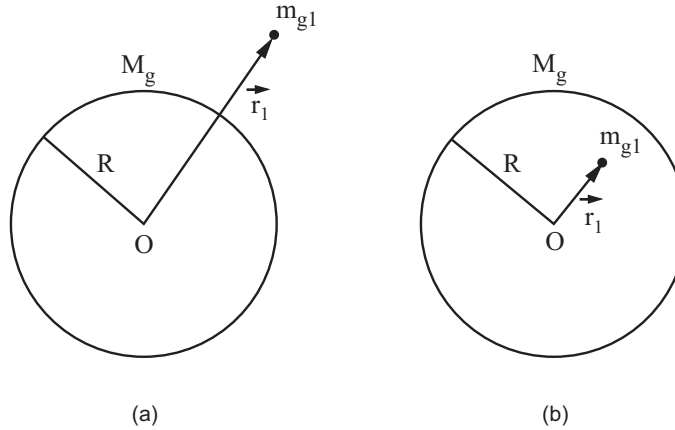



Figura 1.6: Casca esférica.

Um elemento de massa gravitacional dm_{g2} localizado em $\vec{r}_2$ sobre esta casca esférica é dado por $dm_{g2} = \sigma_{g2}da_2 = \sigma_{g2}R^2 d\Omega_2 = \sigma_{g2}R^2 \operatorname{sen}\theta_2 d\theta_2 d\varphi_2$, onde $\sigma_{g2} = M_g/4\pi R^2$ é a densidade superficial de massa gravitacional distribuída uniformemente sobre a superfície da casca, $d\Omega_2$ é o elemento de ângulo esférico, θ_2 e φ_2 são os ângulos usuais em coordenadas esféricas, θ_2 variando de 0 rad até π rad, e φ_2 variando de 0 rad até 2π rad. A força gravitacional exercida por este elemento de massa gravitacional sobre uma partícula teste m_{g1} localizada em $\vec{r}_1$ é dada pela equação (1.7):

$$d\vec{F}_{21}(\vec{r}_1) = -G\frac{m_{g1}dm_{g2}}{r_{12}^2}\hat{r}_{12} \ , \tag{1.14}$$

onde $\vec{r}_{12} = \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ é o vetor apontando de dm_{g2} para m_{g1}, $r_{12} = |\vec{r}_{12}| = r$ é a distância entre dm_{g2} e m_{g1}, enquanto que $\hat{r}_{12} = \vec{r}_{12}/r_{12} = \hat{r}$ é o vetor de módulo unitário apontando de dm_{g2} para m_{g1}. No Apêndice A mostra-se como fazer a integração desta força utilizando coordenadas esféricas. Integrando esta equação obtemos (usando que $r_1 \equiv |\vec{r}_1|$ e $\hat{r}_1 \equiv \vec{r}_1/r_1$):

$$\vec{F}(\vec{r}_1) = \left\{ \begin{array}{ll} -GM_g m_{g1}\hat{r}_1/r_1^2 \ , & \text{se } r_1 > R \\ -GM_g m_{g1}\hat{r}_1/(2R^2) \ , & \text{se } r_1 = R \\ \vec{0} \ , & \text{se } r_1 < R \end{array} \right\} . \tag{1.15}$$

Isto é, se a partícula teste estiver fora da casca esférica, ela será atraída como se toda a casca estivesse concentrada sobre O. Se a partícula teste estiver em qualquer lugar no interior da casca, ela não vai sentir qualquer força gravitacional resultante. E se ela estiver sobre a superfície da casca, ela será atraída em direção ao centro da casca com uma força que é a média aritmética entre os valores da força quando a partícula está ligeiramente fora e ligeiramente dentro da casca.

Como a força de Newton da gravitação não depende da velocidade nem da aceleração dos corpos, a equação (1.15) vai continuar válida qualquer que seja a velocidade ou a aceleração da partícula em relação ao espaço absoluto ou em relação à casca esférica. Esta equação também vai continuar valendo qualquer que seja a velocidade ou aceleração da casca esférica em relação ao espaço absoluto ou em relação à partícula.

Utilizando a lei de Newton da gravitação universal, equação (1.7), e sua Proposição 71, Teorema 31, encontramos que um corpo esfericamente simétrico atrairá um corpo externo como se toda a massa gravitacional do corpo esférico estivesse concentrada no centro da esfera.

No caso da Terra, desprezando os pequenos efeitos devidos a ela não ser exatamente esférica, obtém-se que a força exercida por ela sobre um corpo externo que está a uma distância r de seu centro é dada por:

$$\vec{F}(r > R_T) = -G\frac{M_{gT} m_g}{r^2}\hat{r} \ , \tag{1.16}$$

onde M_{gT} é a massa gravitacional da Terra, m_g é a massa gravitacional do corpo de prova externo à Terra, R_T é o raio da Terra, $\hat{r}$ aponta radialmente para fora da Terra e estamos supondo $r > R_T$. Esta força é usualmente chamada de peso do corpo e é representada por $\vec{P}$:

$$\vec{P} = m_g \left(\frac{-GM_{gT}}{r^2}\hat{r} \right) \equiv m_g \vec{g} \ , \tag{1.17}$$

onde

$$\vec{g}(r) \equiv \frac{\vec{P}}{m_g} = -\frac{GM_{gT}}{r^2}\hat{r} \ . \tag{1.18}$$

Aqui $\vec{g}(r)$ é a força exercida pela Terra, por unidade de massa gravitacional. Como será visto em seguida, $\vec{g}$ tem o mesmo valor que a aceleração radial de corpos caindo livremente no vácuo em direção ao centro da Terra. Por esta equação observa-se que a força por unidade de massa depende da distância dos corpos até o centro da Terra.

No Sistema Internacional de Unidades a massa gravitacional da Terra é dada por: $M_{gT} = 5,98 \times 10^{24}\ kg$. Se o corpo de prova estiver perto da superfície terrestre, então $r \approx R_T$, onde $R_T = 6,37 \times 10^6\ m$ é o raio médio da Terra. Próximo da superfície terrestre o valor em módulo desta aceleração de queda livre, $|\vec{g}(R_T)|$, é dado por:

$$g(R_T) = |\vec{g}(R_T)| = \frac{GM_{gT}}{R_T^2} \approx 9,83\ \frac{m}{s^2} \ . \tag{1.19}$$

Este valor precisa ser corrigido devido a dois fatores principais: (i) A forma achatada da Terra nos polos e bojuda no equador, e (ii) a rotação diária da Terra em relação às estrelas distantes. Estes dois fatores fazem com que o valor medido da força gravitacional terrestre por unidade de massa dependa da latitude. Nos polos este valor é próximo de 9,83 m/s^2, no equador ele vale 9,78 m/s^2, enquanto que em uma latitude de 50° esta força por unidade de massa tem o valor de 9,81 m/s^2 (valores experimentais ao nível do mar). Ou seja, se tivermos uma balança ao nível do mar, parada em relação ao solo, um corpo com massa gravitacional de 1 kg vai pesar $9,83\ N$ nos polos, $9,81\ N$ em uma latitude de 50° e $9,78\ N$ no equador.

1.4.2 Força Exercida por uma Casca Esférica Linearmente Acelerada

Seja uma casca esférica de raio R e massa gravitacional M_g que está deslocando-se em relação ao espaço absoluto com uma aceleração $\vec{A}$, figura 1.7.

Qual é a força exercida por esta casca sobre uma massa gravitacional m_{g1} localizada dentro ou fora da casca esférica? Seja $\vec{r}_1$ o vetor posição da partícula em relação ao centro da casca. Como a lei de Newton da

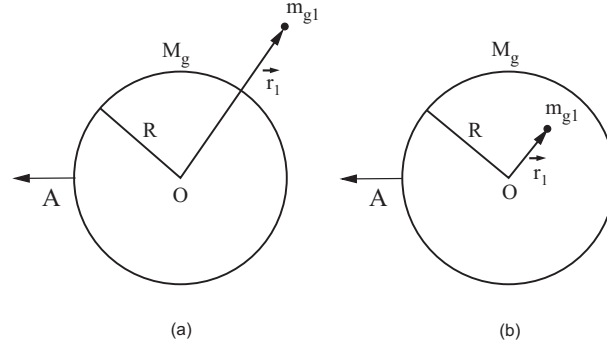



Figura 1.7: Casca esférica acelerada.

gravitação não depende da velocidade nem da aceleração entre os corpos, a equação (1.15) continua valendo qualquer que seja o valor da aceleração $\vec{A}$, ou seja:

$$\vec{F}_{casca\ acelerada}(\vec{r}_1) = \left\{ \begin{array}{ll} -GM_g m_{g1}\hat{r}_1/r_1^2 \ , & \text{se } r_1 > R \\ -GM_g m_{g1}\hat{r}_1/(2R^2) \ , & \text{se } r_1 = R \\ \vec{0} \ , & \text{se } r_1 < R \end{array} \right\} . \tag{1.20}$$

Além do mais, este resultado continua válido qualquer que seja a velocidade $\vec{v}_1$ ou a aceleração $\vec{a}_1$ da partícula de massa m_{g1} em relação ao espaço absoluto.

1.4.3 Força Exercida por uma Casca Esférica Girando

Seja uma casca esférica de raio R e massa gravitacional M_g que está girando em relação ao espaço absoluto com uma velocidade angular $\vec{\Omega}$, figura 1.8.

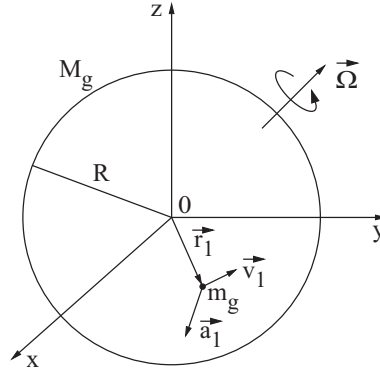



Figura 1.8: Casca esférica girando.

Qual é a força exercida por esta casca sobre uma partícula com massa gravitacional m_{g1} localizada dentro ou fora da casca esférica? Seja $\vec{r}_1$ o vetor posição da partícula em relação ao centro da casca. Como a lei de Newton da gravitação não depende da velocidade nem da aceleração entre os corpos, a equação (1.15) continua valendo qualquer que seja o valor de $\vec{\Omega}$, ou seja:

$$\vec{F}_{casca\ girando}(\vec{r}_1) = \left\{ \begin{array}{ll} -GM_g m_{g1}\hat{r}_1/r_1^2 \ , & \text{se } r_1 > R \\ -GM_g m_{g1}\hat{r}_1/(2R^2) \ , & \text{se } r_1 = R \\ \vec{0} \ , & \text{se } r_1 < R \end{array} \right\} . \tag{1.21}$$

Além do mais, este resultado continua válido qualquer que seja a velocidade $\vec{v}_1$ ou a aceleração $\vec{a}_1$ da partícula de massa m_{g1} em relação ao espaço absoluto.

1.4.4 Implicações Cosmológicas de uma Casca Esférica Exercer Força Nula sobre Corpos Internos

Newton estava perfeitamente ciente das implicações cosmológicas de sua Proposição 70, Teorema 30, do Livro I do *Principia*, discutida na Subseção 1.4.1. Nesta Proposição Newton provou que é nula a força gravitacional resultante exercida por uma casca esférica sobre um corpo de prova localizado em qualquer lugar no interior desta casca.

Ele apresentou esta consequência no segundo Corolário da Proposição 14, Teorema 14 (Os afélios e nós das órbitas dos planetas são fixos), do Livro III do *Principia*:[21]

> Corolário 1 - As estrelas fixas são imóveis, visto que elas mantêm a mesma posição em relação aos afélios e aos nós dos planetas.
>
> Corolário 2 - E como estas estrelas não estão sujeitas a paralaxes perceptíveis devido ao movimento anual da Terra, elas não podem ter força, devido à sua imensa distância, para produzir qualquer efeito perceptível em nosso sistema. Sem mencionar que as estrelas fixas, dispersas promiscuamente por todo lado nos céus, destroem suas ações mútuas devido a suas atrações contrárias, pela Proposição 70, Livro I.

A principal implicação da Proposição 70 é que podemos essencialmente desprezar a influência gravitacional exercida pelo conjunto das estrelas fixas nos movimentos planetários e em experiências realizadas sobre a Terra. O motivo para isto é que as estrelas estão espalhadas mais ou menos homogeneamente por todas as direções do céu, desprezando aqui a concentração de estrelas na Via Láctea. Isto significa que a força resultante exercida pelo conjunto das estrelas sobre o Sol, sobre os planetas do sistema solar e sobre os corpos que estão na Terra é praticamente nula. Ou seja, esta força resultante pode ser desprezada quando comparada com a intensidade das outras forças que atuam usualmente sobre os corpos terrestres, sobre os planetas ou sobre o Sol. Logo, podemos desprezar a influência da força gravitacional exercida pelo conjunto das estrelas fixas tanto sobre os corpos que estão na Terra, quanto na dinâmica do sistema solar.

Embora Newton não tivesse conhecimento da existência de galáxias, o mesmo pode ser afirmado em relação a elas. Ou seja, como as galáxias estão espalhadas mais ou menos homogeneamente no espaço, a força resultante exercida pelas galáxias que estão ao redor da Via Láctea sobre qualquer corpo pertencente à Via Láctea é essencialmente nula, ou muito menor do que as forças usuais que atuam sobre este corpo devida aos outros corpos que estão próximos a ele e que pertencem à Via Láctea.

Os conjuntos de estrelas e galáxias não exercem forças resultantes sobre qualquer corpo do sistema solar, não importando a velocidade ou a aceleração deste corpo em relação ao espaço absoluto. Este resultado é válido não apenas no referencial do espaço absoluto e em todos os referenciais inerciais que se deslocam com velocidades constantes em relação ao espaço absoluto, mas também em todos os referenciais que estão acelerados em relação ao espaço absoluto. Nestes referenciais não inerciais os conjuntos de estrelas e galáxias podem ser vistos com acelerações translacionais ao longo de uma reta, ou girando ao redor de um corpo de prova. Apesar disto, os conjuntos de estrelas e galáxias acelerados ou girando vão continuar exercendo forças nulas sobre este corpo de prova, já que a lei de Newton da gravitação não depende da velocidade nem da aceleração entre os corpos.

Veremos que esta Proposição 70, Teorema 30, continua valendo na teoria da relatividade geral de Einstein, mas deixa de ser válida com uma força de Weber. Este é um dos pontos cruciais em que a mecânica relacional se diferencia tanto da mecânica newtoniana quanto da mecânica einsteiniana. Isto vai levar a uma nova visão de mundo. A interpretação oferecida pela mecânica relacional para a maior parte dos fenômenos simples da física é totalmente distinta das interpretações oferecidas tanto pela mecânica newtoniana quanto pela mecânica einsteiniana.

1.5 A Densidade Média da Terra

Em geral se menciona nos livros didáticos que a constante gravitacional G foi medida por H. Cavendish (1731-1810) em 1798 na sua experiência com a balança de torção. Na verdade, Newton e Cavendish não escreveram a força gravitacional com a constante G, como dado na equação (1.7). Aliás, eles nunca mencionaram a constante G. O artigo de Cavendish se chama "Experiências para determinar a densidade da Terra."[22] O que ele obteve é que a densidade média da Terra é $5,48$ vezes maior do que a densidade da água.[23]

[21] [New08b, pág. 211].
[22] [Cav98] e [Clo87].
[23] [Cav98, pág. 284] e [Cav98, *Gravitation, Heat and X-Rays*, págs. 100-101 e 143].

Para obter seu valor da densidade média da Terra, Cavendish comparou a força gravitacional exercida pela Terra sobre uma esfera de massa gravitacional m_g, com a força gravitacional exercida entre duas esferas de massas gravitacionais M_g e m_g com seus centros separados por uma distância r. Para fazer esta última medida, que fornece um valor muito menor do que a primeira, utilizou uma balança de torção, que é um instrumento muito sensível para determinar forças bem pequenas. Sabendo quantas vezes a densidade da esfera de massa M_g era maior do que a densidade da água, e utilizando os valores conhecidos da distância r e do raio da Terra R_T, Cavendish conseguiu então determinar a densidade média da massa gravitacional terrestre.

Deve ser enfatizado que Newton tinha uma ideia muito boa da densidade média da Terra 100 anos antes de Cavendish. Por exemplo, na Proposição 10 do Livro III do *Principia* ele disse:[24]

> Mas determinei que nosso globo terrestre é de uma densidade maior do que teria se consistisse apenas de água, e isto da seguinte forma. Se todo o globo consistisse apenas de água, tudo que fosse de uma densidade menor do que a água iria emergir e flutuar acima dela devido a sua menor gravidade específica. E baseado nisto, se um globo de matéria terrestre, coberto por todos os lados com água, fosse menos denso do que a água, ele emergiria em algum lugar e a água, retrocedendo, se acumularia no lado oposto. E tal é a condição de nossa Terra que é em grande medida coberta com mares. A Terra, se não fosse por sua maior densidade, emergiria dos mares e, de acordo com seu grau de leveza, seria levantada mais ou menos acima de suas superfícies, a água dos mares retrocedendo para o lado oposto. Pelo mesmo argumento, as manchas do Sol que flutuam sobre sua matéria lúcida, são mais leves do que esta matéria e, não interessando como os planetas foram formados enquanto eles ainda eram massas fluidas, toda a matéria mais pesada afundou para o centro. Como, portanto, a matéria comum de nossa Terra em sua superfície é aproximadamente duas vezes mais pesada do que a água, e um pouco mais abaixo, em minas, encontra-se ao redor de três, ou quatro, ou mesmo cinco vezes mais pesada, é provável que a quantidade de toda a matéria da Terra possa ser cinco ou seis vezes maior do que se ela consistisse toda de água, especialmente por eu ter encontrado antes que a Terra é ao redor de quatro vezes mais densa do que Júpiter. [...]

Isto é, Newton estimou que $5\rho_{água} < \rho_T < 6\rho_{água}$ e Cavendish encontrou 100 anos depois $\rho_T = 5,48\rho_{água}$. Este é apenas mais um pequeno exemplo de quão à frente de seu tempo estava Newton. Medidas atuais da densidade média da Terra fornecem um valor de 5,52 vezes a densidade da água, ou seja, $\rho_T = 5,52 \times 10^3\ kg/m^3$.

1.6 As Medidas da Massa Inercial, do Tempo e do Espaço

1.6.1 Medida da Massa Inercial

Como visto na Seção 1.2, Newton definiu a quantidade de matéria ou massa de um corpo como sendo dada pelo produto de sua densidade pelo volume ocupado pelo corpo. Esta massa de Newton é denominada hoje em dia de massa inercial. Mas na prática Newton não usou esta definição para medir o valor da massa inercial de nenhum corpo. Como ele próprio afirmou na definição I do *Principia*:[25]

> É essa quantidade que doravante sempre denominarei pelo nome de corpo ou massa. A qual é conhecida através do peso de cada corpo, pois é proporcional ao peso, como encontrei com experimentos com pêndulos, realizados muito rigorosamente, os quais serão mostrados mais adiante.

Nas Seções 6.2 e 7.3 serão discutidas as experiências de Newton pelas quais mostrou que a massa inercial de um corpo é proporcional a seu peso. Com esta proporcionalidade Newton encontrou uma maneira operacional precisa para determinar a massa de qualquer corpo, bastando, para isto, pesá-lo com uma balança. Sejam m_{i1} e m_{i2} as massas inerciais dos corpos de pesos P_1 e P_2, respectivamente. A partir de suas experiências com pêndulos, Newton obteve que a razão entre as massas inerciais destes corpos era dada pela razão entre seus pesos, sendo estes pesos determinados no mesmo local da Terra. Algebricamente esta proporcionalidade pode então ser expressa da seguinte maneira:

$$\frac{m_{i1}}{m_{i2}} = \frac{P_1}{P_2} \ . \qquad (1.22)$$

[24] [New08b, págs. 207-208].
[25] [New90, pág. 1].

Newton obteve que esta proporcionalidade entre as massas inerciais e os pesos era válida para todos os corpos, não importando suas formas, densidades ou composições químicas. Ou seja, ele não precisava usar a densidade do corpo para obter sua massa inercial, bastava pesá-lo com uma balança. Isto é, apesar da definição apresentada na equação (1.1), Newton não precisou utilizá-la em sua mecânica.

1.6.2 Medida do Tempo

Como visto na Seção 1.2, de acordo com Newton deve-se utilizar em sua mecânica apenas o tempo absoluto para caracterizar o movimento de um corpo qualquer. Como o tempo absoluto, nas palavras de Newton, não tem relação com qualquer coisa externa, não se poderia medir o tempo absoluto utilizando o movimento de nenhum corpo. Não se poderia utilizar um relógio de pêndulo, nem de água, nem a rotação diária da Terra em relação às estrelas, nem sua translação anual ao redor do Sol. Isto gera então um problema, já que é necessária a medida do tempo para descrever os fenômenos utilizando as leis de Newton, para testar modelos teóricos, para fazer previsões de eventos futuros, etc.

Apesar desta afirmação, Newton sempre considerou a rotação diária da Terra em relação às estrelas como sendo a medida do tempo que deveria ser adotada em sua mecânica. Ele escreveu um texto muito importante, *O Sistema do Mundo*, que foi publicado postumamente em 1728.[26] É um trabalho não matemático que ele intencionava publicar como sendo a última parte do *Principia*. Depois mudou de ideia e publicou o mesmo tema como sendo o Livro III do *Principia*, só que agora com um tratamento matemático bem mais amplo e completo: *Livro III: O Sistema do Mundo (Tratado Matematicamente)*.[27] Na Seção 35 do livro publicado em 1728, Newton foi bem explícito sobre a utilização da rotação dos planetas em relação às estrelas como sendo uma excelente medida do tempo absoluto:[28]

> *35. Os planetas giram ao redor de seus próprios eixos uniformemente com relação às estrelas; estes movimentos são bem adaptados para a medida do tempo.*
>
> Enquanto os planetas giram em órbitas ao redor de centros distantes, eles também realizam diversas rotações ao redor de seus próprios eixos: o Sol em 26 dias; Júpiter em 9^h 56^m; Marte em $24\frac{2}{3}^h$; Vênus em 23^h; e isso em planos não muito inclinados em relação ao plano da eclíptica e de acordo com a ordem dos signos, como os astrônomos determinaram a partir das manchas ou máculas que por vezes aparecem em seus corpos; e há uma semelhante revolução de nossa Terra realizada em 24^h; e esses movimentos não são acelerados nem retardados pelas ações de forças centrípetas, segundo o Corolário 22, Proposição 66, Livro I; e, portanto, dentre todos, eles são os mais uniformes e mais convenientes para a medida do tempo. Mas essas revoluções devem ser consideradas uniformes não a partir de seu retorno ao Sol, mas com relação a alguma estrela fixa. Pois, assim como a posição dos planetas com relação ao Sol varia de forma não uniforme, as revoluções desses planetas de Sol a Sol tornam-se não uniformes.

Ou seja, devemos considerar como sendo uniformes os dias siderais, mas não os dias solares. Por exemplo, devemos considerar o intervalo de tempo para as estrelas fixas darem uma volta ao redor da Terra em 14 de janeiro, como sendo igual ao intervalo de tempo para as estrelas fixas darem uma volta ao redor da Terra em 23 de abril, em 10 de outubro ou em qualquer outra época do ano. Por outro lado, o dia solar (intervalo de tempo para o Sol dar uma volta ao redor da Terra) em 14 de janeiro não deve ser considerado como sendo igual ao dia solar em 23 de abril, nem igual ao dia solar em 10 de outubro.

O equivalente a esta Seção do *Sistema do Mundo* publicado em 1728 aparece no Livro III do *Principia*:[29]

> *Proposição 17. Teorema 15*
>
> *Que os movimentos diurnos dos planetas são uniformes e que a libração da Lua surge de seu movimento diurno.*
>
> A Proposição é provada pela primeira Lei de Movimento e pelo Corolário 22, Proposição 66, Livro I. Júpiter, em relação às estrelas fixas, gira em 9^h 56^m, Marte em 24^h 39^m, Vênus em

[26][New08a].
[27][New08b].
[28][New08a, págs. 364-365].
[29][New08b, págs. 212-213].

aproximadamente 23^{h}, a Terra em $23^{\text{h}}\ 56^{\text{m}}$, o Sol em $25\frac{1}{2}^{\text{d}}$ e a Lua em $27^{\text{d}}\ 7^{\text{h}}\ 43^{\text{m}}$. Isto decorre dos Fenômenos. [...]

No Livro III, Proposição 19, Problema 3 do *Principia*, Newton dá um valor mais preciso ao período de rotação da Terra em relação às estrelas fixas, a saber, 23 horas, 56 minutos e 4 segundos. Vamos adotar este valor aqui para o dia sideral, a saber, 86.164 segundos. A unidade de segundos é definida de tal forma que o período médio de rotação da Terra em relação ao Sol seja de 24 horas = 86.400 segundos.

Seja então este intervalo de 86.164 segundos o tempo que a Terra gasta para dar um giro de $2\pi\ rad$ ao redor de seu eixo em relação às estrelas fixas, ou o tempo gasto para uma volta completa do conjunto das estrelas fixas em relação ao solo. Se a Terra girou de um ângulo θ, medido em radianos, em relação às estrelas fixas, diz-se então que o tempo t transcorrido, medido em segundos, é dado por:

$$\frac{t(s)}{23\ h\ 56\ m\ 4\ s} = \frac{t(s)}{86.164\ s} = \frac{\theta(rad)}{2\pi\ rad}\ . \tag{1.23}$$

Ou seja, o tempo t que aparece na mecânica newtoniana pode ser obtido a partir da medida do ângulo de rotação da Terra em relação às estrelas fixas. Isto mostra que embora Newton tenha afirmado que o tempo absoluto flui uniformemente sem relação com qualquer coisa externa, a medida deste tempo apresentada por ele está relacionada ao movimento de corpos materiais. Em particular, o tempo absoluto seria determinado a partir do ângulo de rotação da Terra em relação às estrelas fixas.

1.6.3 Medida do Espaço

Como visto na Seção 1.2, na mecânica newtoniana deve-se empregar apenas o espaço absoluto como sendo o referencial em relação ao qual se descreve a posição e o movimento de um corpo qualquer. Isto gera um problema prático já que, de acordo com Newton, este espaço absoluto não tem relação com qualquer coisa externa. Portanto, para descrever o movimento de qualquer corpo não se pode, em princípio, utilizar a Terra, o referencial das estrelas fixas, nem qualquer outro referencial que seja definido pela presença de algum corpo material. Como então descrever os movimentos dos corpos em relação ao espaço absoluto, sendo este espaço invisível e não estando ligado a qualquer coisa material? Newton resolveu este problema no *Principia* por meio de uma hipótese:[30]

> *Hipótese I*
>
> *Que o centro do sistema do mundo está imóvel.*
>
> Isto é reconhecido por todos, embora alguns asseverem que a Terra, outros que o Sol, é fixo neste centro. Vamos ver o que segue daqui.
>
> *Proposição 11. Teorema 11*
>
> *Que o centro de gravidade comum da Terra, do Sol e de todos os planetas, está imóvel.*
>
> Pois (pelo Corolário 4 das Leis) este centro ou está em repouso, ou move-se uniformemente para a frente numa linha reta. Mas se este centro se movesse, o centro do mundo também se moveria, contrariando a Hipótese.

Ou seja, por esta hipótese, Newton passou a adotar o centro de gravidade do sistema solar como estando em repouso em relação ao espaço absoluto.

No *Sistema do Mundo* Newton apresentou o mesmo ponto de vista da seguinte maneira:[31]

> *28. O centro comum de gravidade do Sol e de todos os planetas está em repouso e o Sol desloca-se com um movimento muito lento. Explicação do movimento solar.*

---

[30] [New08b, Livro III, págs. 208-209].
[31] [New08a, págs. 359-360].

> Como as estrelas fixas estão imóveis uma com respeito a outra, podemos considerar o Sol, a Terra e os planetas como um sistema de corpos conduzido para cá e para lá por vários movimentos entre eles; e o centro comum de gravidade de todos (pelo Corolário 4 das Leis do Movimento) será quiescente ou mover-se-á uniformemente em uma linha reta. Neste caso todo o sistema também mover-se-á uniformemente em linhas retas. Mas esta é uma hipótese difícil de ser admitida e, portanto, colocando-a de lado, aquele centro comum será quiescente, sendo que dele o Sol nunca se afasta. [...]

Após postular que o centro de gravidade do sistema solar está imóvel em relação ao espaço absoluto, Newton concluiu no Livro III do *Principia* que também as estrelas fixas estão paradas em relação ao espaço absoluto, além de não se deslocarem entre elas:[32]

> *Proposição 14. Teorema 14*
>
> *Os afélios e nós das órbitas dos planetas são fixos.*
>
> Os afélios são imóveis pela Proposição 11, Livro I, e assim são os planos das órbitas, pela Proposição 1 do mesmo livro. E se os planos são fixos, os nós também o são. É verdade que algumas desigualdades podem surgir das ações mútuas dos planetas e cometas em suas revoluções, mas estas serão tão pequenas que podem ser desprezadas aqui.
>
> Corolário 1 - As estrelas fixas são imóveis, visto que elas mantêm a mesma posição em relação aos afélios e aos nós dos planetas.
>
> [...]

No início do *Sistema do Mundo* Newton mencionou que a ideia do sistema heliocêntrico era muito antiga, vindo desde o início da filosofia. Quando descreve esta ideia podemos perceber novamente sua concepção de que as estrelas fixas estariam paradas em relação ao espaço absoluto, embora aqui ele não utilize esta expressão e mencione apenas que elas estariam imóveis "nas partes mais altas do mundo:"[33]

> *1. A matéria dos céus é fluida.*
>
> Nos primórdios da filosofia, de acordo com uma antiga opinião, muitos pensavam que as estrelas fixas permaneciam imóveis nas partes mais altas do mundo; que, abaixo das estrelas fixas, os planetas eram levados em torno do Sol; que a Terra, um desses planetas, descrevia um curso anual em torno do Sol, enquanto que, por um movimento diurno, girava em torno de seu próprio eixo; e que o Sol, como um fogo comum que tudo aquecia, estava fixo no centro do universo.

Logo, na prática Newton podia deixar de lado o espaço absoluto, que não é acessível aos sentidos, descrevendo os movimentos de um corpo qualquer em relação ao referencial das estrelas fixas. Por exemplo, ao descrever as órbitas dos planetas ao redor do Sol, as órbitas das luas ao redor dos planetas, ou as leis de Kepler (1571-1630), Newton sempre apresentava estas órbitas em relação ao referencial das estrelas fixas, considerando-as em repouso em relação ao espaço absoluto.

Citamos aqui dois exemplos deste papel fundamental das estrelas fixas no *Principia*, a saber, quando Newton descreve as órbitas dos satélites de Júpiter ao redor de Júpiter, e as órbitas dos cinco planetas primários ao redor do Sol:[34]

> Fenômeno I
>
> *Que os planetas que circundam Júpiter, por raios traçados ao centro de Júpiter, descrevem áreas proporcionais aos tempos de percurso, e que seus tempos periódicos, estando as estrelas fixas em repouso, estão como a $\frac{3}{2}^{\underline{a}}$ potência de suas distâncias deste centro.*
>
> [...]

[32] [New08b, Livro III, pág. 211].
[33] [New08a, pág. 335].
[34] [New08b, págs. 189-193].

Fenômeno IV

Que estando as estrelas fixas em repouso, os tempos periódicos dos cinco planetas primários e (seja do Sol ao redor da Terra, ou) da Terra ao redor do Sol, são como a $\frac{3}{2}^{\text{a}}$ *potência de suas distâncias médias ao Sol.*

Logo em seguida a estas afirmações, Newton apresentou[35] os *tempos periódicos em relação às estrelas fixas*, dos planetas e da Terra orbitando ao redor do Sol, em dias e em partes decimais de um dia. No caso da Terra, em particular, apresentou o valor do período anual para a Terra completar uma volta ao redor do Sol como sendo de 365,2565 dias. Em outras partes do *Principia* e do *Sistema do Mundo* este período anual é apresentado como sendo de 365 dias, 6 horas e 9 minutos.[36] Ou seja, este é o intervalo de tempo necessário para que a Terra complete uma órbita ao redor do Sol, voltando na mesma posição inicial em relação ao pano de fundo das estrelas fixas.

Foi desta forma que Newton passou a ter algo material e visível, as estrelas fixas, em relação às quais podia descrever as trajetórias dos corpos que estava estudando.

1.7 Referenciais Inerciais

Na segunda lei de Newton, equações (1.3) e (1.4), aparece uma velocidade e uma aceleração (supondo uma massa inercial constante). De acordo com Newton, esta velocidade e esta aceleração do corpo de teste devem ser consideradas em relação ao espaço absoluto, medidas pelo tempo absoluto. De acordo com o quinto corolário, apresentado na Seção 1.2, podemos também referir o movimento do corpo em relação a qualquer sistema de referência que se move em relação ao espaço absoluto em linha reta com uma velocidade constante. Se a força resultante sobre um corpo é nula, ele vai ficar parado ou vai deslocar-se ao longo de uma linha reta com uma velocidade constante, tanto em relação ao espaço absoluto, quanto em relação a qualquer outro sistema de referência que desloca-se com uma velocidade constante em relação ao espaço absoluto. Ou seja, nos casos em que $\sum_{\substack{p=1 \\ p\neq k}}^{N} \vec{F}_{pk}$, conclui-se da equação (1.5) que:

$$\vec{a}_k = \vec{0} \ , \quad \text{ou seja,} \quad \vec{v}_k = \text{constante no tempo} \ . \tag{1.24}$$

Hoje em dia estes sistemas de referência nos quais são válidas as leis de Newton na forma das equações (1.3) e (1.4) são chamados[37] de *sistemas de referência inerciais*, ou de *referenciais inerciais*. Nos próximos Capítulos descreveremos o movimento dos corpos em relação a um sistema de referência inercial.

Existem então três maneiras principais de caracterizar os referenciais inerciais, a saber:

- É o espaço absoluto de Newton ou qualquer sistema de referência que se desloque ao longo de uma linha reta com velocidade constante em relação ao espaço absoluto.
- Qualquer sistema de referência no qual são válidas as leis de Newton na forma das equações (1.3) e (1.4).
- Qualquer sistema de referência no qual uma partícula fica parada ou desloca-se ao longo de uma linha reta com velocidade constante quando é nula a força resultante atuando sobre ela, equação (1.24).

Sabe-se na prática que a Terra pode ser considerada um bom referencial inercial para movimentos que ocorrem nas suas proximidades, desde que estes movimentos tenham um alcance espacial pequeno comparado com o raio da Terra, e que sua duração temporal seja pequena comparada com o período de rotação diária da Terra em relação às estrelas fixas. Este é o chamado *referencial terrestre* ou *referencial do laboratório*, representado pela letra T na figura 1.9. Pode-se, por exemplo, considerar o movimento de queda livre de um corpo de massa m com aceleração $\vec{a}$ em relação ao solo, como na figura 1.9. Neste caso qualquer referencial que esteja em movimento retilíneo uniforme em relação à Terra também pode ser considerado um bom referencial inercial.

Quando estas condições não são satisfeitas, ou caso se queira estudar a rotação diária da Terra, ou seu movimento orbital em relação ao Sol, ou o movimento de qualquer planeta em relação ao Sol, um melhor referencial inercial é aquele no qual as estrelas da nossa galáxia, a Via Láctea, são vistas como estando

[35] [New08b, págs. 192-193].
[36] [New08b, págs. 230, 246] e [New08a, pág. 374].
[37] [Fre71, págs. 163, 174 e 494], [Gol80, pág. 2], [Nus81, págs. 110-111], [Sym82, págs. 304 e 549] e [SJ04, pág. 111].

Figura 1.9: Referencial terrestre T parado em relação ao solo.

essencialmente em repouso. Este é o chamado *referencial das estrelas fixas*, representado pela letra F na figura 1.10. Embora a Lua, o Sol, os planetas e os cometas estejam em movimento em relação ao pano de fundo das estrelas, não há praticamente nenhum movimento perceptível de uma estrela específica em relação às outras estrelas. O céu visto hoje em dia com suas constelações de estrelas é essencialmente o mesmo céu visto pelos antigos gregos ou egípcios. Embora o conjunto das estrelas gire em relação à Terra, elas quase não se movem umas em relação às outras e por este motivo elas são usualmente chamadas de estrelas fixas. Qualquer referencial que esteja em movimento retilíneo uniforme em relação às estrelas fixas também pode ser considerado um bom referencial inercial para estudar, por exemplo, a rotação diária da Terra ao redor de seu eixo, ou o movimento orbital de um planeta ao redor do Sol.

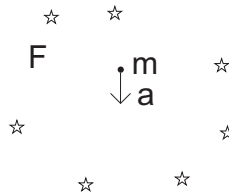



Figura 1.10: Referencial F das estrelas fixas.

Aristarco de Samos (310-230 a.C.) chegou a propor um modelo heliocêntrico na antiguidade. De acordo com este modelo, o Sol é considerado em repouso em relação às estrelas fixas, com a Terra orbitando ao redor do Sol com um período de um ano e dando uma volta ao redor de seu eixo com um período de um dia. Devido a este movimento anual da Terra, deveria ser observada uma paralaxe estelar, ou seja, um movimento ou mudança de posição de uma estrela específica próxima da Terra em relação às outras estrelas mais afastadas. Contudo, a primeira observação desta paralaxe só foi feita por F. W. Bessel (1784-1846) em 1838. Em 1924 Edwin P. Hubble (1889-1953), após encontrar estrelas cefeidas variáveis em algumas nebulosas vistas no céu, demonstrou que estas nebulosas eram sistemas estelares muito afastados da nossa galáxia. Desde então ficou claro que o conjunto de estrelas vistas no céu compõem apenas um dentre milhões de outros sistemas estelares, com cada um destes sistemas sendo chamado de galáxia. Nossa própria galáxia recebe o nome de Via Láctea.

Caso se queira estudar o movimento das estrelas que compõem a Via Láctea, a rotação de nossa galáxia, ou a translação da Via Láctea em relação às outras galáxias, então é necessário um outro sistema de referência. O melhor sistema de referência inercial que se conhece atualmente é aquele no qual o conjunto das galáxias distantes é visto em repouso, sem aceleração translacional e sem rotação. Neste livro chamaremos este último referencial de *referencial universal*, representado pela letra U na figura 1.11. É claro que deve haver movimentos das galáxias entre si. Mas o referencial universal é aquele no qual a velocidade média de todas as galáxias se anula. Qualquer outro sistema de referência que esteja em movimento retilíneo uniforme em relação ao referencial universal também pode ser considerado um bom referencial inercial.

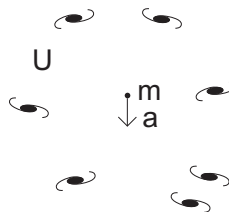



Figura 1.11: Referencial universal U.

Nas figuras apresentadas neste livro o referencial terrestre será representado pela própria Terra ou por

um traço que indica o solo. O referencial das estrelas fixas será representado por algumas estrelas paradas entre si. Já o referencial universal será representado por algumas galáxias paradas entre si. Ou seja, em vez de representar os corpos deslocando-se em relação ao papel, como indicado na figura 1.1 e como usualmente aparece nos livros didáticos, tentaremos enfatizar os corpos materiais que formam o pano de fundo em relação ao qual são observados e medidos os movimentos.

Chamamos de partículas a corpos com dimensões desprezíveis comparadas com os comprimentos e distâncias envolvidas nos problemas. Em geral podemos desprezar suas propriedades internas e representá-las por pontos materiais. Isto é, uma partícula vai ser caracterizada por sua massa inercial e para sua localização usaremos apenas três coordenadas descrevendo sua posição: x, y, z. Estas coordenadas são fixadas em relação a algum referencial inercial. Na prática estas coordenadas estão em geral fixas em relação à Terra, em relação ao referencial das estrelas fixas, ou em relação ao referencial universal. Interessa-nos aqui estudar o movimento de partículas em situações simples e importantes.

Capítulo 2

Outras Forças da Natureza

Além da força gravitacional, diversas forças de outra origem podem atuar sobre um corpo. Apresentamos algumas destas forças neste Capítulo, sempre no Sistema Internacional de Unidades e com fórmulas algébricas modernas expressas em notação vetorial.

2.1 Força de Empuxo

Arquimedes (287-212 a.C.) obteve em seu trabalho *Sobre os Corpos Flutuantes* a força exercida sobre um corpo imerso em um fluido. Sua definição de fluido e o princípio fundamental deste trabalho foram apresentados nas seguintes palavras:[1]

> Supomos como princípio que o fluido possui uma natureza tal que, estando suas partes dispostas de modo uniforme e sendo contínuas, a parte que é menos pressionada é impelida de seu lugar pela parte que é mais pressionada; e que cada uma de suas partes é pressionada pelo fluido que está verticalmente acima dela, a menos que este fluido esteja encerrado em qualquer [recipiente] ou que seja comprimido por qualquer outra coisa.

A definição de fluido apresentado por Newton no *Principia* foi a seguinte:[2]

> Um fluido é qualquer corpo cujas partes cedem a qualquer força impressa sobre ele e, ao ceder, são movimentadas facilmente entre si.

Hoje em dia define-se um fluido como sendo um meio material que não pode resistir a uma tensão de cisalhamento.[3]

Quando Arquimedes supunha que um sólido era mais leve ou mais pesado do que um fluido, ele estava se referindo ao peso relativo ou específico, isto é, se o sólido era menos ou mais denso do que o fluido, respectivamente. Ele mostrou o seguinte nas Proposições 5 a 7 de seu trabalho *Sobre os Corpos Flutuantes*:[4]

> Proposição 5: Qualquer sólido mais leve do que um fluido ficará, caso colocado no fluido, submerso de tal forma que o peso do sólido será igual ao peso do fluido deslocado.
>
> Proposição 6: Se um sólido mais leve do que um fluido for forçadamente submerso nele, o sólido será impelido para cima com uma força igual a diferença entre seu peso e o peso do fluido deslocado.
>
> Proposição 7: Um sólido mais pesado do que um fluido descerá, se colocado nele, ao fundo do fluido, e o sólido será, quando pesado no fluido, mais leve do que seu peso real pelo peso do fluido deslocado.

Estes teoremas são conhecidos hoje em dia pelo nome de *princípio de Arquimedes*. A força exercida pelo fluido sobre um corpo é chamada de empuxo, sendo representada aqui por E. Seja P o peso do corpo no

[1] [Ass08b, pág. 26].
[2] [New08b, Livro II, Seção V, pág. 71].
[3] [Luc80, págs. 369-375] e [Sym82, pág. 278].
[4] [Ass96].

vácuo, apontando para baixo em direção ao centro da Terra. Seja V o volume total ocupado por este corpo. Vamos supor que um volume V_s do corpo seja submerso em um fluido. O empuxo E vai atuar em sentido contrário ao peso P do corpo. Representando por P_f ao peso do fluido ocupando este volume V_s e utilizando a equação (1.17), então estes teoremas de Arquimedes podem ser colocados na seguinte forma:

$$E = P_f = m_{gf} g = \rho_{gf} V_s g \ , \tag{2.1}$$

onde m_{gf} é a massa gravitacional do fluido ocupando o volume V_s e ρ_{gf} é a densidade de massa gravitacional do fluido.

Vamos representar por P_{ap} ao peso aparente do corpo, isto é, ao valor medido do seu peso (utilizando uma balança ou dinamômetro) quando o corpo tem um volume submerso no fluido dado por V_s. De acordo com estes teoremas de Arquimedes, o valor de P_{ap} é dado por:

$$P_{ap} = P - E = P - P_f = P - m_{gf} g = P - \rho_{gf} V_s g \ . \tag{2.2}$$

Atualmente refere-se esta força de empuxo ao gradiente de pressão atuando sobre o corpo imerso no fluido. Seja um corpo infinitesimal de massa inercial dm_i e volume dV imerso em um fluido que está em repouso sobre a Terra. Vamos representar seu peso no vácuo por dP e a força de empuxo atuando sobre ele por dE, figura 2.1.

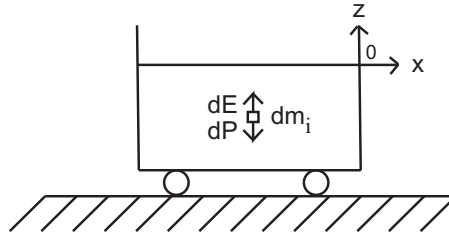



Figura 2.1: Corpo imerso em um fluido.

Sendo $p(x,\ y,\ z)$ a pressão em um ponto qualquer $(x,\ y,\ z)$ do fluido, a força de empuxo atuando sobre o corpo infinitesimal é dada por:

$$d\vec{E} = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial p}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{z}\right) dV \equiv -\left(\nabla p\right) dV \ . \tag{2.3}$$

Aqui ∇p é chamado de gradiente de pressão na região ocupada pelo elemento de volume.

2.2 Força Elástica

A expressão da lei da força elástica foi obtida por Robert Hooke (1635-1703) em 1660, sendo publicada em 1678. Ele expressou-se da seguinte maneira:[5]

> A teoria das molas, embora procurada por vários matemáticos famosos desta época, ainda não foi publicada por ninguém. Tem dezoito anos que a encontrei, mas deixei de publicá-la, pois desejava aplicá-la a algum uso particular.
>
> Tem três anos desde que Sua Majestade ficou feliz ao ver a experiência que provou esta teoria na *White-Hall*, assim como meu relógio de molas.
>
> Tem dois anos desde que publiquei esta teoria em um anagrama no final de meu livro com descrições de helioscópios, a saber, *ceiiinosssttuu, id est, ut tensio sic vis*; isto é, o poder de qualquer mola está na mesma proporção que a tensão sobre ela. Ou seja, se uma potência a estica ou curva por um espaço, duas [potências] vão curvá-la dois [espaços], e três [potências] vão curvá-la três [espaços], e assim por diante. Assim como a teoria é muito curta, também é muito fácil a maneira de experimentá-la.
>
> Considere então uma quantidade de fio homogêneo, seja de aço, ferro, ou bronze, e enrole-o em um cilindro uniforme na forma de uma hélice tendo o comprimento ou o número de voltas

[5] [Hoo78] e [Hoo35].

> desejado, fazendo depois laços nas extremidades do fio. Suspenda esta mola por uma destas extremidades em uma agulha, enquanto que a outra extremidade sustenta o peso desejado para estendê-la. Ao pendurar vários pesos, observe exatamente até qual comprimento cada um destes pesos vai estendê-la, além do comprimento que seu próprio peso a estende. Você encontrará que se uma onça, ou uma libra, ou um certo peso a estende uma linha, ou uma polegada, ou um certo comprimento, então duas onças, ou duas polegadas, ou dois pesos a estendem duas linhas, duas polegadas, ou dois comprimentos; e três onças, libras, ou pesos, [a estendem] três linhas, polegadas, ou comprimentos; e assim por diante. E esta é a regra ou lei da natureza, pela qual procedem todos os tipos de movimentos de restituição ou elásticos, seja de rarefação, ou extensão, ou condensação e compressão.

Uma representação de sua experiência encontra-se na figura 2.2.

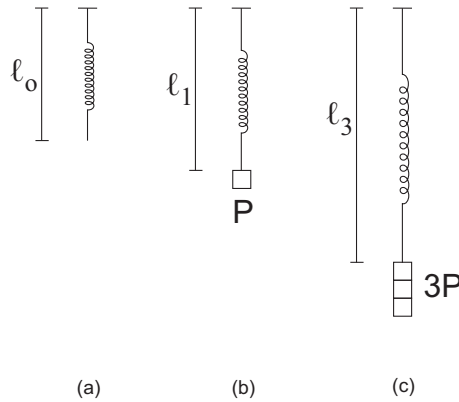



Figura 2.2: Representação da experiência de Hooke.

Na figura 2.2 (a) temos uma mola presa por sua extremidade superior a um suporte fixo no solo. Sua extremidade inferior é livre para se deslocar em relação ao solo. O comprimento entre as extremidades desta mola na vertical ao sustentar seu próprio peso é dado por ℓ_o. Em (b) temos que a mola está um pouco esticada ao sustentar um peso P, ficando com um comprimento ℓ_1. Em (c) ela está ainda mais esticada ao sustentar um peso $3P$ (sendo que os pesos P e $3P$ foram medidos por uma balança de braços iguais). Ela fica com um comprimento ℓ_3. O resultado experimental de Hooke pode ser expresso matematicamente da seguinte maneira:

$$\frac{\ell_3 - \ell_o}{\ell_1 - \ell_o} = \frac{3P}{P} = \frac{3}{1} \ . \tag{2.4}$$

É possível introduzir uma constante elástica k para a mola ao utilizar como um padrão de medida o peso P que a mola sustenta na vertical. Com isto a força elástica F_e de uma mola esticada pode ser expressa da seguinte maneira:

$$F_e = -k(\ell - \ell_o) = -P \ . \tag{2.5}$$

O sinal negativo na frente de $k(\ell - \ell_o)$ indica que quando a mola está esticada, $\ell > \ell_o$, a força elástica atua para cima sobre o corpo, contrabalançando a força peso exercida para baixo pela Terra. Neste caso consideramos como positiva a força que aponta para baixo, sendo negativa a força que aponta para cima.

Na figura 2.3 (a) apresentamos a experiência de Hooke. Em (b) representamos as forças atuando sobre o corpo de massa gravitacional m_g na experiência de Hooke. Há uma força gravitacional exercida para baixo pela Terra sobre ele (seu peso P) e há uma força elástica exercida para cima pela mola sobre ele (a força elástica $F_e = -k(\ell - \ell_o)$). Na figura 2.3 (c) apresentamos as forças sendo exercidas sobre as extremidades da mola. A extremidade inferior sofre uma força para baixo exercida pelo corpo preso a ela. Esta força é o peso P do corpo que é transmitido à mola. Já a extremidade superior da mola, presa ao suporte, sofre uma força para cima T exercida pelo suporte. Como a mola está parada, a força resultante sobre ela é nula. Isto significa que $T = -P$.

Sempre que uma mola está parada em relação ao solo tendo um comprimento ℓ maior do que seu comprimento natural ℓ_o, diz-se que ela está tracionada ou esticada, sendo exercidas forças iguais e opostas sobre

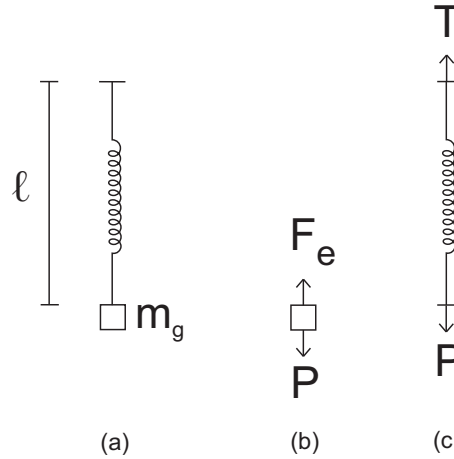



Figura 2.3: (a) Experiência de Hooke. (b) Forças atuando sobre o corpo de massa gravitacional m_g. (c) Forças iguais e opostas exercidas sobre as extremidades da mola.

suas duas extremidades, forças estas que atuam no sentido de esticá-la. Por outro lado, sempre que uma mola está parada em relação ao solo tendo um comprimento ℓ menor do que seu comprimento natural ℓ_o, diz-se que ela está comprimida, sendo exercidas forças iguais e opostas sobre suas extremidades, forças estas que atuam no sentido de comprimí-la.

Na figura 2.4 temos uma mola na horizontal sobre uma mesa sem atrito, parada em relação ao solo. Apresentamos exemplos nos quais ela está esticada ($\ell > \ell_o$) por forças de três naturezas. Em (a) temos forças gravitacionais exercidas pela Terra sobre as duas massas gravitacionais m_g, puxando-as para baixo. Estas forças são transmitidas às extremidades da mola por forças de contato, esticando a mola. Em (b) são forças elétricas de repulsão entre as duas cargas de mesmo sinal que esticam a mola (estamos supondo que ela seja feita de um material isolante ideal). Em (c) temos forças magnéticas de repulsão entre os dois ímãs que esticam a mola (estamos supondo que ela seja feita de um material não ferromagnético).

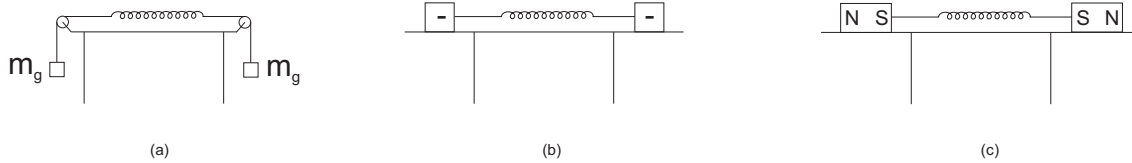



Figura 2.4: Molas paradas na horizontal sendo esticadas por forças (a) gravitacionais, (b) elétricas, e (c) magnéticas.

Na figura 2.5 apresentamos as forças iguais e opostas que estão atuando sobre as extremidades da mola na figura 2.4.

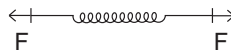



Figura 2.5: Forças iguais e opostas que atuam sobre as extremidades das molas da figura 2.4.

Vamos agora supor uma mola de comprimento ℓ_o quando está relaxada na horizontal. Ao ligarmos um corpo de massa inercial m_i a esta mola e esticá-la ou comprimi-la até um comprimento ℓ, observa-se que a mola exerce uma força $\vec{F}$ sobre ele, figura 7.1.

Seja $x \equiv (\ell - \ell_o)$ e $\hat{x}$ o vetor de módulo unitário apontando na direção horizontal no sentido do esticamento da mola. Neste caso a força exercida pela mola sobre o corpo é expressa atualmente pela seguinte expressão:

$$\vec{F} = -k(\ell - \ell_o)\hat{x} = -kx\hat{x} \ , \tag{2.6}$$

onde k é a chamada constante elástica da mola. Esta expressão da força elástica é usualmente conhecida como “lei de Hooke.”

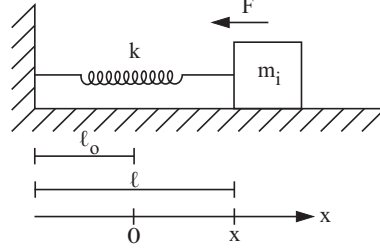



Figura 2.6: Mola.

2.3 Força de Arraste em um Fluido

Quando um corpo se desloca em um fluido como a água ou o ar, ele sofre uma força resistiva exercida por este meio material. Esta força tende a retardar seu movimento em relação ao fluido, sendo chamada de força de arraste.

No Escólio Geral ao fim da Seção 6 do Livro II do *Principia*, logo após a Proposição 31, Teorema 25, Newton apresentou diversas experiências com pêndulos oscilando no ar, na água e no mercúrio.[6] Já no Escólio ao fim da Seção VII do Livro II, logo após a Proposição 40, Problema 9, Newton apresentou experiências com quedas de corpos na água e bexigas caindo no ar de grandes alturas.[7]

Vamos supor que o corpo está se deslocando em relação ao solo com uma velocidade $\vec{v}$. Vamos supor ainda que o fluido ao redor do corpo está se deslocando em relação ao solo com uma velocidade $\vec{v}_f$, figura 2.7.

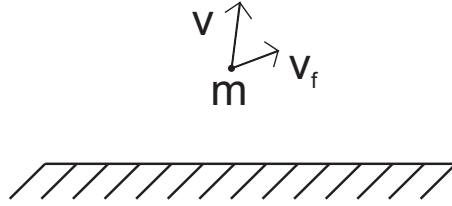



Figura 2.7: Corpo movendo-se com velocidade $\vec{v}$ em relação ao solo, sendo que o fluido ao seu redor se desloca em relação à Terra com velocidade $\vec{v}_f$.

A velocidade relativa do corpo em relação ao fluido pode ser representada por $\vec{v}_r$, sendo definida por:

$$\vec{v}_r \equiv \vec{v} - \vec{v}_f \ . \tag{2.7}$$

A área de seção reta do corpo deve ser considerada perpendicular à sua velocidade em relação ao fluido, isto é, ortogonal à direção de $\vec{v}_r$. No caso de uma esfera de raio r, esta seção reta é dada por $A = \pi r^2$.

Destas experiências Newton concluiu que haviam três componentes principais da força resistiva exercida pelo fluido sobre uma esfera de raio r quando havia uma velocidade relativa entre eles. Ele distinguiu estas três componentes por nomes diferentes.[8] A primeira componente seria a resistência surgindo da "tenacidade" do fluido. Esta componente não dependia da velocidade relativa entre o corpo e o fluido. A segunda componente surgia da "fricção" ou do "atrito" entre as partes do fluido. Esta componente era proporcional ao raio da esfera e à velocidade relativa entre ela e o fluido. Já a terceira componente provinha da "densidade," "inércia" ou "inatividade" do fluido. Esta componente era proporcional à densidade do fluido, ao quadrado do raio da esfera e ao quadrado de sua velocidade relativa em relação ao fluido.[9] Seja ρ_f a densidade de massa inercial do fluido. A expressão geral desta força de atrito de arraste em um fluido pode então ser escrita como:

$$\vec{F} = -(b_0 + b_1 r v_r + b_2 \rho_f r^2 v_r^2)\hat{v}_r \ , \tag{2.8}$$

[6][New08b, págs. 98-108].
[7][New08b, págs. 137-147].
[8][New08b, págs. 21, 59-60, 98-108 e 132-147] e [New96, pág. 268].
[9][New96, pág. 268].

onde $b_0 > 0$, $b_1 > 0$ e $b_2 > 0$ são constantes que não dependem do raio da esfera, da densidade do fluido, nem da velocidade relativa entre a esfera e o fluido. Além disso estamos usando as seguintes definições: $v_r \equiv |\vec{v} - \vec{v}_f|$ e $\hat{v}_r \equiv \vec{v}_r/v_r$. Esta força tende a diminuir a velocidade relativa entre a esfera e o fluido ao seu redor.

Se um corpo de massa inercial m_i estiver interagindo apenas com este fluido, sua equação de movimento pode ser obtida combinando as equações (1.4) e (2.8), a saber:

$$-(b_0 + b_1 r v_r + b_2 \rho_f r^2 v_r^2)\hat{v}_r = m_i \vec{a} \ . \tag{2.9}$$

Newton obteve a partir de suas experiências que em um grande número de situações a principal componente desta força era proporcional à densidade ρ_f do fluido, à área A de seção reta do corpo e ao quadrado da velocidade do corpo em relação ao fluido. Algebricamente esta força $\vec{F}$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$\vec{F} = -\frac{1}{2} C \rho_f A v_r^2 \hat{v}_r \ , \tag{2.10}$$

onde C é uma constante adimensional positiva denominada de coeficiente de arraste que depende da forma do objeto. Geralmente seu valor está situado entre 0,5 e 1,0. Esta força aponta em direção oposta à velocidade relativa entre o corpo e o fluido, ou seja, aponta no sentido de $-\hat{v}_r$. Esta força de arraste tende a diminuir esta velocidade relativa.

Em outras situações a força de atrito é bem representada por uma força linear na velocidade, ou seja:

$$\vec{F} = -c_1 v_r \hat{v}_r = -c_1 \vec{v}_r \ , \tag{2.11}$$

onde c_1 é uma constante positiva. No caso de uma esfera deslocando-se em um fluido muitas vezes esta força de arraste é proporcional ao raio r da esfera. Isto significa que c_1 pode ser escrita como $b_1 r$, sendo b_1 uma constante independente do raio da esfera e também independente da velocidade relativa entre o fluido e a esfera.

Para Newton estava bem claro que a força de arraste depende da velocidade *relativa* entre o corpo e o fluido. Ou seja, no caso da força de arraste em um fluido, não interessa a velocidade do corpo em relação ao espaço absoluto ou em relação a um referencial inercial, mas sim a velocidade do corpo em relação ao fluido com o qual está interagindo. Por exemplo, na Seção VII do Livro II do *Principia* ele discutiu a resistência sofrida por corpos deslocando-se em um fluido. Na Proposição 37, Teorema 29, ele discutiu a resistência sofrida por um cilindro deslocando-se em um fluido. Nos Lemas 5 a 7 ele discutiu o caso em que o cilindro estava parado em relação ao solo, enquanto a água se deslocava. Nesta discussão fica bem claro que apenas a velocidade relativa entre o corpo e o fluido é relevante no que diz respeito à força de arraste exercida entre eles.

2.4 Força entre Cargas Elétricas

Augustin Coulomb (1738-1806) obteve em 1785 a lei de força entre duas cargas pontuais q_1 e q_2. Apresentou seu resultado em dois artigos de 1785, publicados em 1788.[10] Ele denominava as cargas de "massas elétricas," "moléculas eletrizadas," ou "densidades dos fluidos elétricos."[11]

No caso de cargas de mesmo sinal, Coulomb expressou-se nas seguintes palavras:[12]

Lei fundamental da eletricidade.

> *A força repulsiva entre dois pequenos globos eletrizados com o mesmo tipo de eletricidade, está na razão inversa do quadrado da distância entre os centros dos dois globos.*

No caso de cargas de sinais opostos, Coulomb expressou-se nas seguintes palavras:[13]

> Chegamos assim, por um método totalmente diferente do primeiro método, a um resultado similar; desta forma podemos concluir que a atração recíproca do fluido elétrico denominado *positivo*, sobre o fluido elétrico denominado comumente *negativo*, está na razão inversa do quadrado das distâncias; da mesma forma que havíamos obtido, em nossa primeira Memória, que a ação recíproca de um fluido elétrico de mesma natureza, está na razão inversa do quadrado das distâncias.

[10] [Cou85a], [Cou85b], [Pot84] e [Cou35a].
[11] [Gil71b] e [Gil71a, págs. 190-192].
[12] [Cou85a, pág. 572], [Pot84, pág. 110] e [Cou35a].
[13] [Cou85b, pág. 572], [Pot84, pág. 123] e [Cou35a].

Até aqui Coulomb apenas mencionou como a força elétrica varia com a distância entre as cargas. Foi apenas no final de sua segunda Memória que ele mencionou que esta força também é proporcional ao produto entre as cargas:[14]

Recapitulação dos assuntos contidos nesta Memória.

Das pesquisas precedentes, resulta:

1º. Que a ação, seja repulsiva, seja atrativa entre dois globos eletrizados e, consequentemente, entre duas moléculas elétricas, está na razão composta das densidades do fluido elétrico das duas moléculas, e na razão inversa do quadrado das distâncias.

Gillmor apontou corretamente que Coulomb não chegou a demonstrar experimentalmente que a força entre duas cargas era proporcional ao produto entre elas.[15] Ele simplesmente supôs esta proporcionalidade, não considerando que fosse importante tentar demonstrá-la experimentalmente.

Vamos supor cargas pontuais em repouso mútuo, separadas por uma distância r, sendo $\hat{r}$ o versor unitário apontando de 2 para 1, figura 2.8.

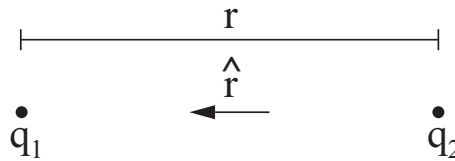



Figura 2.8: Duas cargas separadas por uma distância r.

A força $\vec{F}_{21}$ exercida por q_2 em q_1 é escrita atualmente da seguinte forma:

$$\vec{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_o} \frac{\hat{r}}{r^2} = -\vec{F}_{12} \ . \tag{2.12}$$

Aqui $\varepsilon_o = 8,85 \times 10^{-12}\ A^2 s^4/kgm^3$ é uma constante chamada de permissividade do vácuo e $\vec{F}_{12}$ é a força exercida por q_1 em q_2.

Esta força é muito similar à lei de Newton para a gravitação, equação (1.7). Ambas estão direcionadas ao longo da linha reta ligando os corpos, seguem a lei da ação e reação e variam com o inverso do quadrado da distância entre os corpos. Além do mais, ela depende do produto de duas cargas, enquanto que na força gravitacional temos o produto de duas massas gravitacionais. Parece que Coulomb foi levado a esta expressão mais por analogia com a lei de Newton para a gravitação do que como resultado de suas poucas experiências.[16]

A similaridade entre a força eletrostática entre duas cargas, equação (2.12), e a força de Newton para a gravitação, equação (1.7), mostra que as massas gravitacionais têm o mesmo papel que as cargas elétricas: ambas geram e sofrem a ação de algum tipo de interação com corpos equivalentes, sejam eles gravitacionais ou elétricos. Ou seja, a carga q_2 gera uma força sobre uma carga q_1, acelerando-a em relação a um referencial inercial se ela estiver livre para se deslocar. Da mesma forma, a carga q_1 gera uma força sobre a carga q_2, acelerando-a em relação a um referencial inercial. O mesmo acontece com as massas gravitacionais m_{g2} e m_{g1}, que exercem forças mútuas e tendem a acelerar-se em relação a um referencial inercial devido a uma interação gravitacional entre elas. A forma da interação, ou a expressão algébrica desta força, é essencialmente a mesma tanto para as forças gravitacionais quanto para as forças elétricas.

2.5 Força entre Polos Magnéticos

Para descrever a interação magnética entre ímãs, ou a interação magnética entre um ímã e a Terra, Coulomb propôs em 1785 uma expressão descrevendo a força entre polos magnéticos pontuais.[17] Coulomb denominava estes polos magnéticos "densidades magnéticas."[18] Atualmente estes polos são denominados de polo Norte e

[14] [Cou85b, pág. 611] e [Pot84, pág. 146].
[15] [Gil71b] e [Gil71a, págs. 190-192].
[16] [Hee92].
[17] [Cou85b], [Pot84] e [Cou35b].
[18] [Gil71b] e [Gil71a, págs. 190-192].

polo Sul, com o polo Norte sendo considerado positivo e o polo Sul negativo, por convenção. A unidade de polo magnético no Sistema Internacional de Unidades é Am.

Coulomb expressou-se nas seguintes palavras:[19]

> *O fluido magnético age por atração ou repulsão, seguindo a razão composta diretamente da densidade do fluido, e a razão inversa do quadrado das distâncias entre suas moléculas.*
>
> A primeira parte desta proposição não precisa ser provada; vamos passar para a segunda [parte]. [...]

Sejam p_1 e p_2 dois polos magnéticos separados por uma distância r, com $\hat{r}$ sendo o vetor unitário apontando de 2 para 1, figura 2.9.

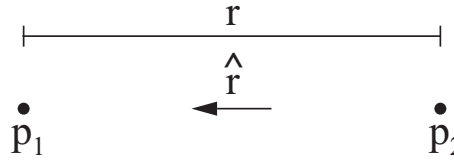



Figura 2.9: Dois polos magnéticos separados por uma distância r.

A força $\vec{F}_{21}$ exercida por um polo magnético p_2 sobre um polo magnético p_1 é expressa atualmente da seguinte forma:

$$\vec{F}_{21} = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{p_1 p_2}{r^2}\hat{r} = -\vec{F}_{12} \ . \tag{2.13}$$

Aqui $\mu_o \equiv 4\pi \times 10^{-7}\ kgm/(A^2 s^2)$ é uma constante chamada de permeabilidade do vácuo e $\vec{F}_{12}$ é a força exercida pelo polo 1 sobre o polo 2.

Gillmor apontou corretamente que Coulomb não chegou a demonstrar experimentalmente que a força entre dois polos magnéticos era proporcional ao produto das intensidades destes polos magnéticos, assim como não provou que a força entre duas cargas era proporcional ao produto entre elas.[20] De acordo com as palavras de Coulomb que acabamos de citar, ele considerava que não era necessário provar que a força entre os polos magnéticos era proporcional ao produto da densidade destes fluidos magnéticos. Não nos parece correta esta conclusão de Coulomb. Esta parte fundamental da força entre polos magnéticos teria de ser verificada experimentalmente antes que se pudesse afirmar que é uma lei da natureza. O mesmo acontece com a proporcionalidade da força elétrica em relação ao produto das cargas.

O conceito de polo magnético é uma idealização, já que até hoje não foi possível isolar um polo magnético. A estrutura magnética básica com a qual se podem fazer medidas é o chamado dipolo magnético. Ele pode ser entendido como um polo Norte pontual, p_N, separado por uma distância fixa ℓ de um polo Sul pontual de mesma intensidade, $p_S = -p_N$. Seja $\hat{\ell}$ um vetor de módulo unitário apontando do polo Sul para o polo Norte deste dipolo, figura 2.10.

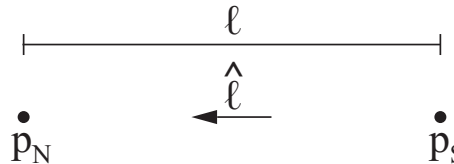



Figura 2.10: Dipolo magnético.

Define-se o momento magnético $\vec{m}$ deste dipolo pela seguinte expressão:

$$\vec{m} \equiv p_N \ell \hat{\ell}. \tag{2.14}$$

Vamos considerar dois dipolos magnéticos de comprimentos ℓ_1 e ℓ_2 com seus centros separados por uma distância r, figura 2.11.

[19][Cou85b, pág. 593], [Pot84, pág. 130] e [Cou35b].
[20][Gil71b] e [Gil71a, págs. 190-192].

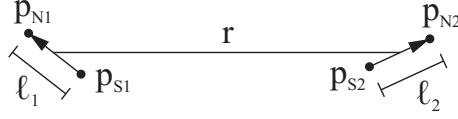



Figura 2.11: Dois dipolos magnéticos separados por uma distância r.

A força entre dois dipolos magnéticos, assim como o torque exercido entre eles, pode ser obtida a partir da equação (2.13) levando em conta as forças entre cada um dos polos magnéticos de um dipolo e cada um dos polos magnéticos do outro dipolo. Por exemplo, a força resultante exercida pelo dipolo 2 sobre o dipolo 1 é a soma vetorial de quatro termos, a saber, a força de p_{N2} em p_{N1}, de p_{N2} em p_{S1}, de p_{S2} em p_{N1}, e de p_{S2} em p_{S1}.

Da mesma forma é possível obter a força e o torque magnético exercido pela Terra sobre uma bússola ao considerar separadamente as forças magnéticas exercidas pela Terra sobre cada um dos polos magnéticos que compõem a bússola.

2.6 Força de Ampère entre Elementos de Corrente

André-Marie Ampère (1775-1836) trabalhou intensamente com a interação entre condutores com corrente elétrica entre 1820 e 1827. As duas partes de seu primeiro artigo sobre este tema já se encontram traduzidas para a língua portuguesa.[21] Obteve a forma final da lei de força atuando entre dois elementos de corrente em 1822.[22] Seu principal trabalho sobre eletrodinâmica, publicado em 1826, já se encontra totalmente traduzido para a língua portuguesa.[23]

Sejam i_1 e i_2 as intensidades de corrente elétrica em dois circuitos, isto é, a quantidade de carga que flui pela seção reta de cada fio por unidade de tempo. Sejam $d\vec{\ell}_1$ e $d\vec{\ell}_2$ dois segmentos orientados em cada circuito, com comprimentos infinitesimais $|d\vec{\ell}_1|$ e $|d\vec{\ell}_2|$, e apontando ao longo dos sentidos das correntes em cada ponto dos dois circuitos. Vamos supor dois elementos de corrente $i_1 d\vec{\ell}_1$ e $i_2 d\vec{\ell}_2$ separados por uma distância r, com $\hat{r}$ sendo o vetor unitário apontando de 2 para 1, figura 2.12.

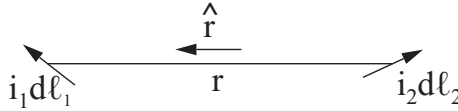



Figura 2.12: Dois elementos de corrente separados por uma distância r.

A força de Ampère $d^2\vec{F}_{21}$ exercida por $i_2 d\vec{\ell}_2$ sobre $i_1 d\vec{\ell}_1$ é expressa atualmente da seguinte forma:[24]

$$d^2\vec{F}_{21} = -\frac{\mu_o}{4\pi} i_1 i_2 \frac{\hat{r}}{r^2}\left[2(d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2) - 3(\hat{r}\cdot d\vec{\ell}_1)(\hat{r}\cdot d\vec{\ell}_2)\right] = -d^2\vec{F}_{12} \ , \tag{2.15}$$

onde $d^2\vec{F}_{12}$ é a força exercida por 1 sobre 2. A constante μ_o que aparece aqui é a mesma constante da equação (2.13).

A força de Ampère, equação (2.15), é central, varia inversamente com o quadrado da distância entre os corpos que estão interagindo, além de satisfazer ao princípio de ação e reação. Além do mais, ela aponta ao longo da reta que une os dois elementos de corrente que estão interagindo. O mesmo comportamento ocorre com a lei de Newton da gravitação universal, equação (1.7), com a força eletrostática entre cargas elétricas, equação (2.12), e com a força magnética entre polos magnéticos, equação (2.13).

Por outro lado, esta força de Ampère apresenta algo novo que não acontecia com as forças entre massas gravitacionais, entre cargas ou entre polos magnéticos. Ou seja, ela depende também do ângulo entre os dois elementos de corrente através do termo $d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2$, assim como depende do ângulo entre cada elemento e a reta que os une através dos termos $\hat{r}\cdot d\vec{\ell}_1$ e $\hat{r}\cdot d\vec{\ell}_2$. O motivo para este novo comportamento é que os elementos de corrente não podem ser considerados pontuais, já que são orientados espacialmente, apontando ao longo do sentido da corrente elétrica fluindo em cada elemento.

[21] [Amp20a], [Amp20b], [CA07], [CA09] e [AC11, Caps. 23 e 24, págs. 295-345].
[22] [Amp22a], [Amp22b] e [Amp85].
[23] [Amp26], [Amp23], [Cha09] e [AC11].
[24] [Ass92b, Cap. 3], [Ass94, Cap. 4], [Ass95b, Cap. 3], [BA98, Cap. 5], [BA01, Cap. 5], [AH07, Cap. 1] e [AH09, Cap. 1].

Ampère fez um trabalho árduo e tortuoso até obter esta forma final da dependência da força em relação ao ângulo entre os dois elementos de corrente que estão interagindo, assim com a dependência da força em relação ao ângulo entre cada elemento de corrente e a reta que os une. Este caminho está descrito detalhadamente, com ênfases diferentes, em diversos trabalhos.[25]

A influência de Newton sobre Ampère foi muito grande. Para chegar nesta expressão Ampère assumiu explicitamente a proporcionalidade da força em $i_1 d\vec{\ell_1}$ e $i_2 d\vec{\ell_2}$. Também assumiu que ela deveria obedecer à lei da ação e reação com a força ao longo da reta ligando os elementos. Estes fatos não vieram de nenhuma de suas experiências. Mas da mesma forma como tinha acontecido com a força eletrostática que explicou muito bem diversos fenômenos elétricos observados na natureza embora nem todas as características desta lei tivessem vindo de resultados experimentais, também a força de Ampère teve um sucesso enorme em explicar muitos fenômenos da eletrodinâmica.

Apresentamos aqui algumas afirmações de Ampère mostrando a grande influência exercida pela força gravitacional de Newton sobre ele. Estas citações vêm de seu principal trabalho com que coroa suas pesquisas: *Teoria dos fenômenos eletrodinâmicos, deduzida unicamente da experiência*. Ele começa assim:[26]

> A época marcada pelos trabalhos de Newton, na história das ciências, não é somente [o período] das descobertas mais importantes que o homem fez sobre as causas dos grandes fenômenos da natureza, é também a época na qual o espírito humano abriu uma nova rota nas ciências que tem por finalidade o estudo desses fenômenos.
>
> Até então, tinham-se quase que exclusivamente procurado as causas [dos fenômenos naturais] no impulso de um fluido desconhecido, que arrastava as partículas materiais seguindo a direção de suas próprias partículas. E sempre que se via um movimento giratório, imaginava-se um turbilhão no mesmo sentido.
>
> Newton nos ensinou que esse tipo de movimento, como todos os que a natureza nos oferece, deve ser reduzido pelo cálculo a forças agindo sempre entre duas partículas materiais, seguindo a reta que as une, de maneira que a ação exercida por uma delas sobre a outra seja igual e oposta à ação que esta última [partícula] exerce ao mesmo tempo sobre a primeira. Consequentemente, quando se supõem essas duas partículas invariavelmente ligadas entre si, disso não pode resultar qualquer movimento [do centro de massa do sistema] devido à ação mútua entre elas. É esta lei, confirmada hoje em dia por todas as observações e por todos os cálculos, que ele exprime no último dos três axiomas dispostos no começo do [seu livro] *Princípios matemáticos de filosofia natural*. Mas não bastava estar elevado a essa alta concepção; era preciso descobrir sob qual lei essas forças variam, conforme a posição respectiva das partículas entre as quais elas se exercem. Ou, o que é equivalente, [era necessário] exprimir o valor [dessas forças] por uma fórmula.
>
> Newton estava longe de pensar que tal lei pudesse ser inventada partindo de considerações abstratas mais ou menos plausíveis. Ele estabeleceu que ela deveria ser deduzida dos fatos observados ou, de preferência, de leis empíricas que, como as de Kepler, são somente os resultados generalizados de um grande número de observações particulares.
>
> O caminho seguido por Newton foi o de inicialmente observar os fatos, variando as circunstâncias na medida do possível, acompanhar este primeiro trabalho com medidas precisas para deduzir as leis gerais, fundadas unicamente na experiência, e deduzir dessas leis, independentemente de toda hipótese sobre a natureza das forças que produzem os fenômenos, o valor matemático dessas forças, ou seja, a fórmula que as representa. Em geral, este caminho tem sido adotado na França pelos sábios a quem a física deve os imensos progressos que fez nos últimos tempos, e foi ele [este procedimento] que me serviu de guia em todas as minhas pesquisas sobre os fenômenos eletrodinâmicos. Consultei unicamente a experiência para estabelecer as leis desses fenômenos, e deduzi a única fórmula que pode representar as forças a que se devem [esses fenômenos]. Não fiz nenhuma pesquisa sobre a própria causa a que se possam designar essas forças, estando bem convencido de que toda pesquisa deste gênero deve ser precedida do conhecimento puramente experimental das leis e da determinação, deduzida unicamente dessas leis, do valor das forças elementares cuja direção é, necessariamente, a da reta que une os pontos materiais entre os quais se exercem [essas forças].

[25] [Blo82], [Hof96], [Cha09] e [AC11].
[26] [AC11, págs. 366-367].

Aqui vai o início de sua explicação de como chegou em sua fórmula descrevendo a força entre elementos de corrente:[27]

> Agora vou explicar como se deduz rigorosamente, destes casos de equilíbrio, a fórmula pela qual representei a ação mútua entre dois elementos de corrente voltaica, mostrando que esta é a única força que age seguindo a linha reta que une os centros [destes elementos] que pode concordar com os dados empíricos. A princípio, é evidente que a ação mútua entre dois elementos de corrente elétrica é proporcional aos seus comprimentos. Pois, ao supor [os elementos de corrente] divididos em partes infinitamente pequenas, iguais à sua medida comum, todas as atrações e repulsões dessas partes, podendo ser consideradas como direcionadas ao longo de uma mesma linha reta, necessariamente se somam. Essa mesma ação também deve ser proporcional às intensidades das duas correntes. [...]

É evidente a influência da lei de Newton da gravitação neste ponto, já que Ampère assumiu que a força estaria ao longo da linha reta ligando os elementos, ou seja, apontando na direção do vetor unitário $\hat{r}$. Ele também assumiu que esta força era proporcional às intensidades das duas correntes, $i_1 i_2$, assim como aos comprimentos dos dois elementos de corrente, $d\ell_1 d\ell_2$. Ele então deduziu a partir de suas experiências que esta força entre elementos de corrente teria de variar com o inverso do quadrado da distância entre os elementos, sendo proporcional a r^{-2}. Apesar de obter esta dependência experimentalmente, já havia suposto que a força variava com o inverso do quadrado da distância desde suas pesquisas iniciais em 1820. Seu grande feito experimental e teórico foi obter que a força entre dois elementos de corrente era proporcional a $2(d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2) - 3(\hat{r} \cdot d\vec{\ell}_1)(\hat{r} \cdot d\vec{\ell}_2)$.

Ao integrar esta força sobre um circuito fechado C_2, Ampère obteve a força $d\vec{F}_{21}$ exercida por este circuito fechado sobre um elemento de corrente $i_1 d\vec{\ell}_1$ que não pertence a este circuito. Modernamente seu resultado é expresso da seguinte maneira:

$$d\vec{F}_{21} = \frac{\mu_o}{4\pi} i_1 i_2 \oint_{C_2} \frac{\hat{r}}{r^2} \left[3(\hat{r} \cdot d\vec{\ell}_1)(\hat{r} \cdot d\vec{\ell}_2) - 2(d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2) \right] = i_1 d\vec{\ell}_1 \times \oint_{C_2} \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{i_2 d\vec{\ell}_2 \times \hat{r}}{r^2} \ . \tag{2.16}$$

Ou seja, esta força é sempre normal ao elemento $i_1 d\vec{\ell}_1$, não importando o formato do circuito fechado 2.

Integrando esta força sobre um circuito fechado C_1, obtém-se a força resultante exercida pelo circuito fechado 2 sobre o circuito fechado 1, a saber:

$$\vec{F}_{21} = \frac{\mu_o}{4\pi} i_1 i_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{\hat{r}}{r^2} \left[3(\hat{r} \cdot d\vec{\ell}_1)(\hat{r} \cdot d\vec{\ell}_2) - 2(d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2) \right]$$

$$= \frac{\mu_o}{4\pi} i_1 i_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{\ell}_1 \times (d\vec{\ell}_2 \times \hat{r})}{r^2} = -\frac{\mu_o}{4\pi} i_1 i_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{(d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2)\hat{r}}{r^2} \ . \tag{2.17}$$

Um caso importante de interação entre dois circuitos fechados é aquele no qual temos duas espiras pequenas separadas por uma grande distância entre seus centros. Sejam as áreas destas espiras a_1 e a_2, suas correntes i_1 e i_2, os vetores normais às áreas destas espiras representados por $\hat{n}_1$ e $\hat{n}_2$, figura 2.13. Estas espiras podem ser consideradas pequenas comparadas com a distância r entre seus centros quando $r \gg \sqrt{a_1}$ e $r \gg \sqrt{a_2}$.

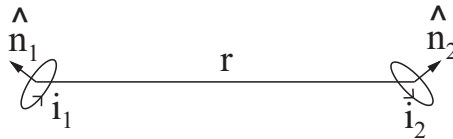



Figura 2.13: Uma espira de área a_1, corrente i_1 e normal $\hat{n}_1$ interagindo com uma outro espira de área a_2, corrente i_2 e normal $\hat{n}_2$.

O momento magnético $\vec{m}$ de cada uma destas espiras é definido por:

$$\vec{m} \equiv i a \hat{n} \ . \tag{2.18}$$

Este momento magnético aponta na direção normal à área de cada espira.

[27] [AC11, págs. 383-384].

2.7 Força entre um Dipolo Magnético e um Fio com Corrente

Em 1820 Oersted (1777-1851) observou a deflexão de uma bússola devida à presença em suas proximidades de um longo fio com corrente constante. Escreveu um trabalho em latim contendo suas observações que enviou a diversos pesquisadores da época. Este artigo já foi traduzido para a língua portuguesa.[28] Este trabalho deu início à ciência do eletromagnetismo, ou seja, do estudo sistemático da relação entre os fenômenos elétricos e magnéticos. Esta palavra *eletromagnetismo* foi cunhada por Oersted.[29] Também em 1820 Oersted observou o fenômeno contrário, a saber, o torque exercido sobre uma espira com corrente devido a um ímã fixo no laboratório.[30]

Ampère prosseguiu estas pesquisas observando também forças de ação e reação entre um ímã e um fio com corrente. Também obteve torques de ação e reação entre um ímã e um fio com corrente. Além disso, conseguiu reproduzir as interações entre ímãs através de interações equivalentes entre condutores com corrente. Para isto substituía cada um dos ímãs por uma espiral plana na qual fluía uma corrente constante, ou por uma hélice na qual fluía uma corrente constante. Também conseguiu reproduzir o torque exercido pela Terra sobre uma bússola, utilizando uma espira com corrente no lugar da bússola. Ele conseguiu explicar todas estas interações eletromagnéticas supondo a existência de correntes elétricas microscópicas fluindo ao redor de átomos ou moléculas. Estas correntes também são chamadas hoje em dia de correntes moleculares ou correntes de Ampère.

Sejam $\vec{m}_1$ e $\vec{m}_2$ os momentos magnéticos de dois dipolos magnéticos infinitesimais, isto é, tais que seus comprimentos ℓ_1 e ℓ_2 sejam muito menores do que a separação r entre os centros dos dipolos, $\ell_1 \ll r$ e $\ell_2 \ll r$, figura 2.11. Ampère mostrou teoricamente que as forças e torques exercidos pelo dipolo 1 sobre o dipolo 2 podem ser reproduzidas substituindo o dipolo 1 por uma espira fechada de área a_1 na qual circula uma corrente i_1, desde que a normal $\hat{n}_1$ a esta espira estivesse ao longo da direção do dipolo magnético 1, $\hat{n}_1 = \hat{\ell}_1$, e que eles tivessem momentos magnéticos equivalentes dados por:

$$m_1 = |\vec{m}_1| = p_{N1}\ell_1 = i_1 a_1 \ . \tag{2.19}$$

Neste caso estamos supondo que também a espira 1 seja infinitesimal, isto é, de tal forma que seu tamanho típico dado por $\sqrt{a_1}$ seja muito menor do que a sua separação até o dipolo 2, $\sqrt{a_1} \ll r$, figura 2.14.

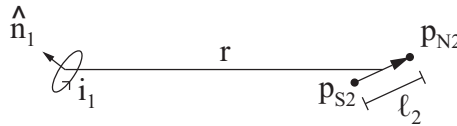



Figura 2.14: Uma espira de área a_1, corrente i_1 e normal $\hat{n}_1$ interagindo com um dipolo magnético de momento magnético $\vec{m}_2$.

Também é possível substituir o dipolo 2 por uma espira fechada de área a_2 na qual circula uma corrente i_2, desde que a normal a esta espira estivesse ao longo de $\hat{\ell}_2$ e que eles tivessem momentos magnéticos equivalentes dados por:

$$m_2 = |\vec{m}_2| = p_{N2}\ell_2 = i_2 a_2 \ . \tag{2.20}$$

Neste caso teríamos a situação representada pela figura 2.13. Ou seja, a força e o torque exercidos pela espira 1 sobre a espira 2 da figura 2.13 vão ter os mesmos valores que a força e o torque exercidos pelo dipolo 1 sobre o dipolo 2 da figura 2.11, desde que sejam válidas as equações (2.19) e (2.20). Para que ocorra esta equivalência é necessário supor ainda que as normais $\hat{n}_1$ e $\hat{n}_2$ das duas espiras estejam apontando nas direções dos momentos de dipolo magnético dos dois dipolos, ou seja, é necessário assumir que $\hat{n}_1 = \hat{\ell}_1$ e que $\hat{n}_2 = \hat{\ell}_2$.

Desta forma Ampère conseguiu reduzir os fenômenos magnéticos e eletromagnéticos em termos dos fenômenos eletrodinâmicos. Ou seja, as forças e torques exercidas entre ímãs, as forças e torques exercidas entre um ímã e a Terra, assim como as forças e torques exercidas entre um ímã e uma espira com corrente, podem ser explicados apenas em termos das forças e torques exercidos entre condutores com corrente.

[28] [Ørs86].
[29] [Ørs98a, p. 421], [Ørs98b, p. 426], [GG90, p. 920] e [GG91, p. 116].
[30] [Ørs98a].

2.8 Força de Weber entre Cargas

Wilhelm Eduard Weber (1804-1891) foi um dos principais cientistas do século XIX. Foi contemporâneo de Maxwell e trabalhou junto com Gauss (1777-1855) em Göttingen. Suas obras completas foram publicadas em 6 volumes entre 1892 e 1894.[31] Escreveu oito trabalhos principais entre 1846 e 1878 sob o título geral de *Elektrodynamische Maassbestimmungen* (*Medidas Eletrodinâmicas*).[32] A oitava Memória só foi publicada postumamente em suas obras completas. Três destas oito Memórias principais já foram traduzidas para a língua inglesa, a saber, a primeira, *Determinações de medidas eletrodinâmicas: Sobre uma lei universal da ação elétrica*;[33] a sexta, *Medidas eletrodinâmicas—Sexta Memória, relacionada especialmente ao princípio de conservação da energia*;[34] e a oitava, *Determinações de medidas eletrodinâmicas: Particularmente com relação à conexão das leis fundamentais da eletricidade com a lei da gravitação*.[35] Em 1848 foi publicada uma versão resumida da primeira Memória,[36] que também já foi traduzida para o inglês, *Sobre a medida das forças eletrodinâmicas*.[37]

Uma listagem de todas as obras de Weber já traduzidas para a língua inglesa foi publicada em 2010.[38] A única obra de Weber já traduzida para a língua portuguesa é um trabalho conjunto com seu amigo Rudolf Kohlrausch (1809-1858) descrevendo a primeira medida de uma constante fundamental que aparece na força de Weber.[39]

Weber propôs[40] em 1846 uma lei de força com a qual pudesse unificar a eletrostática, equação (2.12), com a eletrodinâmica, equação (2.15), juntamente com a lei de indução de Faraday (1791-1867) de 1831. Sua força pode ser aplicada não apenas a cargas em repouso mútuo, mas também quando há um movimento entre elas. Como existem muitas obras discutindo a eletrodinâmica de Weber,[41] só vamos discutir seus aspectos principais neste livro.

No Sistema Internacional de Unidades a força de Weber $\vec{F}_{21}$ exercida pela carga q_2 sobre a carga q_1 é dada por:

$$\vec{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2}\left(1 - \frac{\dot{r}_{12}^2}{2c^2} + \frac{r_{12}\ddot{r}_{12}}{c^2}\right) = -\vec{F}_{12} \ . \tag{2.21}$$

Nesta equação $\vec{F}_{12}$ é a força exercida por q_1 sobre q_2, r_{12} é a distância entre as cargas, $\hat{r}_{12}$ é o vetor unitário apontando de q_2 para q_1, $\dot{r}_{12} \equiv dr_{12}/dt$ é a velocidade radial relativa entre elas, sendo $\ddot{r}_{12} \equiv d\dot{r}_{12}/dt = d^2r_{12}/dt^2$ a aceleração radial relativa entre as cargas.

A constante c que aparece na equação (2.21) é a razão entre as unidades eletromagnéticas e eletrostáticas de carga. Seu valor experimental foi determinado pela primeira vez por Weber e R. Kohlrausch (1809-1858) entre 1854 e 1856.[42] No Sistema Internacional de Unidades esta grandeza é escrita da seguinte maneira:

$$c \equiv \frac{1}{\sqrt{\mu_o\varepsilon_o}} = 2,998 \times 10^8 \ \frac{m}{s} \ . \tag{2.22}$$

Vamos supor que as cargas q_1 e q_2 estão localizadas em $\vec{r}_1 \equiv x_1\hat{x} + y_1\hat{y} + z_1\hat{z}$ e $\vec{r}_2 \equiv x_2\hat{x} + y_2\hat{y} + z_2\hat{z}$, respectivamente, em relação à origem O de um sistema de coordenadas arbitrário, figura 2.15. Este sistema de referência arbitrário não precisa ser inercial no sentido da mecânica newtoniana. Ou seja, ele pode estar acelerado em relação ao referencial das estrelas fixas.

Os vetores unitários $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$ apontam ao longo dos eixos ortogonais x, y e z deste sistema de referência. As velocidades e acelerações destas cargas em relação à origem deste sistema de coordenadas são dadas por: $\vec{v}_1 = d\vec{r}_1/dt = \dot{x}_1\hat{x} + \dot{y}_1\hat{y} + \dot{z}_1\hat{z}$, $\vec{v}_2 = d\vec{r}_2/dt = \dot{x}_2\hat{x} + \dot{y}_2\hat{y} + \dot{z}_2\hat{z}$, $\vec{a}_1 = d^2\vec{r}_1/dt^2 = d\vec{v}_1/dt = \ddot{x}_1\hat{x} + \ddot{y}_1\hat{y} + \ddot{z}_1\hat{z}$ e $\vec{a}_2 = d^2\vec{r}_2/dt^2 = d\vec{v}_2/dt = \ddot{x}_2\hat{x} + \ddot{y}_2\hat{y} + \ddot{z}_2\hat{z}$.

O vetor posição apontando de q_2 para q_1 vai ser representado por $\vec{r}$. Vamos também definir as velocidades vetoriais relativas neste sistema de referência pelas seguintes expressões:

---

[31] [Web92b], [Web92a], [Web93], [Web94b], [WW93] e [WW94].
[32] [Web46], [Web52b], [Web52a], [KW57], [Web64], [Web71], [Web78] e [Web94a].
[33] [Web07].
[34] [Web72].
[35] [Web08].
[36] [Web48].
[37] [Web66].
[38] [Ass10c].
[39] [WK56], com tradução para a língua portuguesa em [WK08].
[40] [Web46], com tradução para a língua inglesa em [Web07].
[41] Ver, por exemplo, [Wie60], [Wie67], [Ass92b], [Ass94], [Ass95b], [Fuk03], [AH07], [AH09] e [AW11], assim como as referências citadas nestas obras.
[42] [Web55], [WK56], traduzido para a língua inglesa em [WK03] e para a língua portuguesa em [WK08], [KW57] e [WK68].

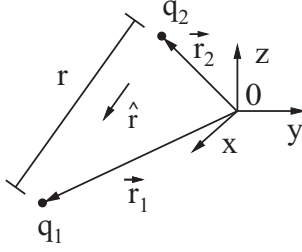



Figura 2.15: Cargas pontuais q_1 e q_2 localizadas em $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ em relação à origem O de um sistema de coordenadas.

$$\vec{r} \equiv \vec{r}_{12} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = (x_1 - x_2)\hat{x} + (y_1 - y_2)\hat{y} + (z_1 - z_2)\hat{z} \equiv x_{12}\hat{x} + y_{12}\hat{y} + z_{12}\hat{z} \ , \tag{2.23}$$

$$\vec{v}_{12} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = (\dot{x}_1 - \dot{y}_1)\hat{x} + (\dot{y}_1 - \dot{y}_2)\hat{y} + (\dot{z}_1 - \dot{z}_2)\hat{z} \equiv \dot{x}_{12}\hat{x} + \dot{y}_{12}\hat{y} + \dot{z}_{12}\hat{z} \ , \tag{2.24}$$

e

$$\vec{a}_{12} \equiv \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}_{12}}{dt} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2 = (\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2)\hat{x} + (\ddot{y}_1 - \ddot{y}_2)\hat{y} + (\ddot{z}_1 - \ddot{z}_2)\hat{z} \equiv \ddot{x}_{12}\hat{x} + \ddot{y}_{12}\hat{y} + \ddot{z}_{12}\hat{z} \ . \tag{2.25}$$

As duas cargas estão separadas por uma distância r dada por:

$$r \equiv |\vec{r}| \equiv r_{12} \equiv |\vec{r}_{12}| = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{1/2} = \sqrt{x_{12}^2 + y_{12}^2 + z_{12}^2} \ . \tag{2.26}$$

O vetor unitário apontando de q_2 para q_1 é dado por:

$$\hat{r} \equiv \frac{\vec{r}}{r} \equiv \hat{r}_{12} \equiv \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} \ . \tag{2.27}$$

A velocidade e aceleração relativas *radiais* entre elas são dadas por, respectivamente:

$$\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt} \equiv \dot{r}_{12} \equiv \frac{dr_{12}}{dt} = \frac{x_{12}\dot{x}_{12} + y_{12}\dot{y}_{12} + z_{12}\dot{z}_{12}}{r} = \hat{r} \cdot \vec{v}_{12} \ , \tag{2.28}$$

e

$$\ddot{r} \equiv \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2} \equiv \ddot{r}_{12} \equiv \frac{\dot{r}_{12}}{dt} = \frac{d^2r_{12}}{dt^2} = \frac{\vec{v}_{12} \cdot \vec{v}_{12} - (\hat{r} \cdot \vec{v}_{12})^2 + \vec{r} \cdot \vec{a}_{12}}{r} \ . \tag{2.29}$$

Com estes resultados a força de Weber dada pela equação (2.21) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\vec{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_o} \frac{\hat{r}}{r^2} \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\vec{v}_{12} \cdot \vec{v}_{12} - \frac{3}{2} (\hat{r} \cdot \vec{v}_{12})^2 + \vec{r} \cdot \vec{a}_{12} \right) \right] = -\vec{F}_{12} \ . \tag{2.30}$$

Foi com esta força que Weber conseguiu unificar os fenômenos eletrostáticos (interações entre cargas em repouso mútuo), eletrodinâmicos (interações entre elementos de corrente) e a lei de indução de Faraday.

2.8.1 O Modelo Planetário de Weber para o Átomo

Antes de prosseguir achamos interessante mencionar aqui uma ligação da eletrodinâmica de Weber com a física nuclear. Weber desenvolveu na segunda metade do século XIX um modelo planetário para o átomo no qual um núcleo composto por cargas positivas era cercado por cargas negativas descrevendo órbitas elípticas ao redor do núcleo. O aspecto mais interessante de seu modelo é que o núcleo era mantido estável por forças puramente eletromagnéticas, sem a necessidade de postular a existência de forças nucleares fortes e fracas. Já na física moderna, ao contrário do que ocorria com o modelo de Weber, é necessário postular forças nucleares para estabilizar o núcleo. Este modelo de Weber foi desenvolvido antes dos trabalhos de Rutherford e Bohr, sendo praticamente desconhecido hoje em dia.

A *molécula indivisível* de Weber (isto é, o núcleo positivo de uma molécula ponderável) representaria os núcleos modernos dos elementos atômicos. De acordo com nosso conhecimento, o modelo de Weber é o único modelo já proposto até hoje de um núcleo composto por várias cargas elementares positivas que é mantido estável através de forças puramente elétricas. Weber obteve esta característica devido a uma propriedade bem particular de sua lei de força, equações (2.21) e (2.30). Esta propriedade está relacionada ao fato de que sua lei de força depende não apenas da distância entre as partículas interagentes, mas também da aceleração radial relativa entre elas. O coeficiente que multiplica esta aceleração tem a mesma unidade que a massa inercial, a saber, o quilograma, kg. Além disso, este coeficiente é proporcional ao produto das duas cargas que estão interagindo, q_1q_2, sendo ainda inversamente proporcional à distância $r_{12} = r$ entre elas. Quando elas estão muito próximas uma da outra, este coeficiente pode ter uma magnitude ou um módulo maior do que a massa inercial de qualquer uma destas partículas. Estas cargas vão então se comportar como se possuíssem uma massa inercial efetiva que é uma função da distância que as separa. Além disso, esta massa inercial efetiva pode ser positiva ou negativa, dependendo do sinal do produto q_1q_2. Em particular, cargas de mesmo sinal deslocando-se uma em relação à outra dentro de uma esfera de diâmetro ρ, vão se comportar como se tivessem uma massa inercial efetiva *negativa*. Esta grandeza ρ pode ser chamada de "distância molecular" ou de "distância crítica," sendo dada no Sistema Internacional de Unidades pela seguinte expressão:

$$\rho \equiv \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\frac{1}{c^2} = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}\frac{1}{c^2} , \tag{2.31}$$

onde m_1 e m_2 são as massas inerciais usuais das partículas 1 e 2, respectivamente.

Consequentemente, quando $r < \rho$, em vez de se repelirem mutuamente como ocorre em distâncias macroscópicas, as cargas q_1 e q_2 irão se atrair, já que se comportarão como tendo uma massa inercial efetiva negativa!

Esta é uma das propriedades mais fascinantes e características da eletrodinâmica de Weber, não sendo compartilhada por outras teorias eletromagnéticas.[43]

Obviamente este modelo ainda precisa ser testado experimentalmente. Uma discussão detalhada sobre o modelo planetário de Weber para o átomo pode ser encontrada em um livro de 2011.[44]

2.9 Equações de Maxwell e Força Baseada em Campos Eletromagnéticos

2.9.1 Definições do Conceito de Campo

Neste livro vamos lidar essencialmente com a interação direta entre massas gravitacionais ou entre cargas elétricas. Apesar disto, para facilitar a comparação entre o tratamento dado nesta obra e aquele encontrado em muitos livros didáticos da atualidade, também apresentaremos alguns exemplos na linguagem do conceito de campo (gravitacional, elétrico e magnético). Este conceito é devido a Faraday, Maxwell (1831-1879), Lorentz (1853-1928) e outros pesquisadores. A dificuldade com esta formulação é que o conceito de campo é polissêmico, ou seja, tem vários significados. Estes múltiplos sentidos associados ao mesmo conceito de campo aparecem não apenas nos trabalhos de Faraday e Maxwell, mas também nos livros didáticos modernos. Listamos aqui alguns destes significados associados à palavra campo:[45]

- O campo é uma região do espaço ao redor de massas gravitacionais, de cargas elétricas, de polos magnéticos, de ímãs, e de fios com corrente.

  Faraday utilizou a palavra "campo" pela primeira vez em 7 de novembro de 1845, em seu Diário.[46] Mas muito antes desta época já utilizava expressões análogas tais como "curvas magnéticas," "linhas de força magnética," ou "linhas de força." Em um artigo publicado em 1851 ele definiu o *campo* como sendo a *região do espaço* ao redor dos corpos que estava investigando:[47]

  > 2806. Tentarei agora considerar qual é a influência que os corpos paramagnéticos e diamagnéticos, considerados como condutores (2797), exercem sobre as linhas de força em um

[43] [Ass93a], [Ass94] e [Ass99a].
[44] [AW11].
[45] [Gar], [KS05], [SK07], [KS08], [Rib], [RVA08], [ARV09] e [AC11].
[46] [Nota 17] nersessian89.
[47] [Far52, §2806, pág. 690].

> campo magnético. Qualquer porção do espaço atravessada por linhas de força magnética, pode ser considerada como um tal campo, e provavelmente não existe espaço sem elas.

O mesmo conceito foi adotado por Maxwell, como pode ser observado a partir de sua definição do campo elétrico:[48]

> 44.] O campo elétrico é a porção do espaço na vizinhança dos corpos eletrizados, considerado com referência aos fenômenos elétricos.

Maxwell apresentou uma definição similar de campo magnético ao interpretar a descoberta de Oersted da deflexão de uma bússola colocada nas proximidades de um longo fio com corrente:[49]

> 476.] Portanto, parece que no espaço ao redor de um fio transmitindo uma corrente elétrica agem forças sobre um ímã que dependem da posição do fio e da intensidade da corrente. Portanto, o espaço no qual agem estas forças pode ser considerado como um campo magnético, e podemos estudá-lo da mesma forma como já estudamos o campo na vizinhança dos ímãs comuns, ao traçar o curso das linhas de força magnética, e medindo a intensidade da força em cada ponto.

Em seu artigo de 1864-1865 contendo uma teoria dinâmica do campo eletromagnético ele já havia expresso pontos de vista similares:[50]

> (3) Portanto, a teoria que proponho pode ser chamada uma teoria do *campo eletromagnético*, já que ela lida com o espaço na vizinhança dos corpos elétricos ou magnéticos, e ela pode ser chamada uma teoria *dinâmica*, pois ela assume que no espaço há matéria em movimento, pela qual são produzidos os fenômenos eletromagnéticos observados.
>
> (4) O campo eletromagnético é aquela parte do espaço que contém e circunda corpos em condições elétricas ou magnéticas.

Esta definição também foi seguida por J. J. Thomson (1856-1940):[51] "A região na qual atrações e repulsões [elétricas] são observadas é chamada de campo elétrico." James Jeans (1877-1946) também seguiu as definições de Faraday e Maxwell:[52] "O espaço na vizinhança de cargas de eletricidade, considerado com referência aos fenômenos elétricos ocorrendo neste espaço, é denominado de campo elétrico." Heilbron resumiu essas definições nos seguintes termos:[53] "Campo em geral significa uma região do espaço considerado com relação ao comportamento potencial de corpos de prova que se movem nessa região."

Ao longo do tempo foram dadas outras definições para o conceito de campo, sendo algumas delas apresentadas a seguir.

- O campo é uma função vetorial (com módulo, direção e sentido).

  O campo gravitacional é normalmente representado por $\vec{g}$, o campo elétrico por $\vec{E}$, enquanto que o campo magnético é representado por $\vec{B}$.

- O campo eletromagnético propaga-se em um meio material de acordo com Maxwell.

  Maxwell apresentou sua teoria eletromagnética da luz no Capítulo 20 de seu livro *Tratado de Eletricidade e Magnetismo*. Ele defendia a existência de um meio material, o éter, existindo entre os corpos materiais. Este meio seria elástico e teria uma densidade finita de matéria. A luz seria uma perturbação eletromagnética neste meio, propagando-se em relação a ele:[54]

  > 781.] Em várias partes deste tratado tem sido feita uma tentativa de explicar os fenômenos eletromagnéticos por meio da ação mecânica transmitida de um corpo para outro através de um meio ocupando o espaço entre eles. A teoria ondulatória da luz também assume a

[48] [Max54, Vol. 1, §44, pág. 47].
[49] [Max54, Vol. 2, §476, pág. 139].
[50] [Max65, pág. 460] e [Max65a, pág. 527].
[51] [Tho21, pág. 1].
[52] [Jea41, pág. 24].
[53] [Hei81, pág. 187].
[54] [Max54, Vol. 2, §781, pág. 431].

> existência de um meio. Temos agora de mostrar que as propriedades do meio eletromagnético são idênticas às propriedades do meio luminífero.
> [...]
> Mas as propriedades dos corpos são passíveis de medida quantitativa. Portanto, obtemos o valor numérico de alguma propriedade do meio, tal como a velocidade com a qual uma perturbação é propagada através dele, que pode ser calculada a partir das experiências eletromagnéticas, e também observada diretamente no caso da luz. Se for encontrado que a velocidade de propagação das perturbações eletromagnéticas é a mesma que a velocidade da luz, e isto não apenas no ar, mas [também] em outros meios transparentes, teremos fortes motivos para acreditar que a luz é um fenômeno eletromagnético, e a combinação da evidência óptica com a evidência elétrica produzirá uma convicção sobre a realidade do meio similar à convicção que obtemos, no caso dos outros tipos de matéria, a partir da evidência combinada dos sentidos.

- O campo eletromagnético propaga-se no espaço vazio de acordo com Einstein.

  Em seu artigo de 1905 introduzindo a teoria da relatividade restrita, Einstein tornou o éter supérfluo e passou a considerar que a luz e as ondas eletromagnéticas propagam-se no espaço vazio, nossa ênfase:[55]

  > Exemplos deste gênero, assim como o insucesso das experiências feitas para constatar um movimento da Terra em relação ao meio luminífero ("Lichtmedium") levam à suposição de que, tal como na Mecânica, também na Eletrodinâmica os fenômenos não apresentam nenhuma particularidade que possa fazer-se corresponder à ideia de um repouso absoluto. Pelo contrário em todos os sistemas de coordenadas em que são válidas as equações da mecânica, também são igualmente válidas leis ópticas e eletrodinâmicas da mesma forma — o que, até a primeira ordem de aproximação, já está demonstrado. Vamos erguer a categoria de postulado esta nossa suposição (a cujo conteúdo chamaremos daqui em diante "Princípio da Relatividade"); e, além disso, vamos introduzir o postulado — só aparentemente incompatível com o primeiro — de que *a luz, no espaço vazio, se propaga sempre com uma velocidade determinada*, independente do estado de movimento da fonte luminosa. Estes dois postulados são suficientes para chegar a uma eletrodinâmica de corpos em movimento, simples e livre de contradições, baseada na teoria de Maxwell para corpos em repouso. *A introdução de um "éter luminífero" revelar-se-á supérflua*, visto que na teoria que vamos desenvolver não necessitaremos de introduzir um "espaço em repouso absoluto", nem de atribuir um vetor velocidade a qualquer ponto do espaço vazio em que tenha lugar um processo eletromagnético.

- O campo armazena energia, momento linear e momento angular.

  Existe uma densidade de energia e de momento do campo eletromagnético.

- O campo é o agente intermediário para a ação entre massas gravitacionais, entre cargas elétricas, entre polos magnéticos, entre ímãs, e entre correntes elétricas.

- O campo é uma grandeza que possui unidades.

  No Sistema Internacional de Unidades, por exemplo, a unidade do campo gravitacional $\vec{g}$ é a mesma da aceleração, m/s^2. A unidade do campo elétrico $\vec{E}$ é $V/m = kgmC^{-1}s^{-2} = kgmA^{-1}s^{-3}$. Já a unidade do campo magnético $\vec{B}$ é $T = Wm^{-2} = kgC^{-1}s^{-1} = kgA^{-1}s^{-2}$.

- O campo distorce ou altera o espaço.

  Este é o caso do campo gravitacional dentro da teoria da relatividade geral de Einstein.

- O campo é gerado ou produzido por massas gravitacionais, cargas elétricas, polos magnéticos, ímãs, e correntes elétricas.

  Os corpos que produzem estes campos são chamados de fontes.

- O campo gera ou produz a força sobre massas gravitacionais, cargas elétricas, polos magnéticos, ímãs, e correntes elétricas.

  Os corpos que sofrem a ação destes campos são chamados de corpos de prova, ou de corpos de teste.

---
[55] [Ein78c, pág. 48].

- Um campo pode produzir um outro campo.

  Para explicar a lei de indução de Faraday afirma-se que um campo magnético variável no tempo produz um campo elétrico induzido. Também se afirma que um campo elétrico variável no tempo produz um campo magnético induzido.

  Existe um outro contexto conceitual no qual também se afirma que um campo elétrico pode se transformar em um campo magnético e vice-versa. Como será visto na Subseção 14.5.4, Einstein, por exemplo, defendeu em seu artigo de 1905 sobre a teoria da relatividade especial, que um campo elétrico $\vec{E}$ poderia gerar ou se transformar em um campo magnético $\vec{B}$ através de uma mudança entre dois sistemas de referência inerciais, assim como o campo $\vec{B}$ poderia se transformar no campo $\vec{E}$.[56]

- Etc.

2.9.2 Estas Definições São Contraditórias Entre Si

Muitas das definições ou propriedades dos campos apresentadas na Subseção 2.9.1 são contraditórias entre si e também com as definições iniciais de Faraday e Maxwell. Damos aqui alguns exemplos destas contradições e problemas introduzidos com o conceito de campo:

- Como pode uma região do espaço se propagar no espaço?

  Faraday, Maxwell e diversos pesquisadores definiram tanto o campo elétrico quanto o campo magnético como regiões do espaço. De acordo com Einstein as ondas eletromagnéticas propagam-se no espaço vazio. Mas ele nunca explicou como uma região do espaço pode se propagar no espaço.

- Como pode uma região do espaço ter módulo, direção e sentido?

  O conceito usual de espaço é como sendo um vácuo ou vazio entre os corpos materiais. Por outro lado, define-se usualmente o campo como uma região do espaço, ao mesmo tempo em que se afirma que ele é uma grandeza vetorial, com módulo, direção e sentido. Como pode uma região do espaço ter módulo, direção e sentido?

- Como pode uma região do espaço distorcer o espaço?

  Em geral se define o campo gravitacional como uma região do espaço nas proximidades de um corpo material. Einstein, por outro lado, defendia a ideia de que a matéria e o campo gravitacional distorceriam o espaço ao redor do corpo. Como pode uma região do espaço distorcer o espaço?

- Como pode uma região do espaço, algo imaterial, interagir com um corpo material?

  Normalmente considera-se que uma massa gravitacional sofre a ação de uma força quando está na presença de um campo gravitacional. Neste caso esta massa pode, por exemplo, ser acelerada em relação ao solo por este campo gravitacional. Da mesma forma, um corpo eletrizado sentiria a presença de um campo elétrico, um ímã sentiria a presença de um campo magnético, assim como um condutor com corrente também sentiria a ação de um campo magnético. De que maneira um campo imaterial atua sobre um corpo material?

- Como pode uma região do espaço ter unidades diferentes de comprimento, área ou volume?

  Se o campo é uma região do espaço, como definido por Faraday, Maxwell e diversos cientistas, deveria ter unidades de "espaço," a saber, as unidades de comprimento, m, área, m^2, ou volume, m^3.

  Mas não é isto o que acontece. As unidades do campo gravitacional $\vec{g}$, do campo elétrico $\vec{E}$ e do campo magnético $\vec{B}$ são diferentes das unidades de comprimento, área e volume. Logo não se pode identificar um "campo" com o "espaço."

- Os campos gravitacional, elétrico e magnético possuem unidades diferentes entre si. Logo não são entidades do mesmo tipo e não deveriam receber uma denominação comum, tal como a denominação de "campo."

  Na física temos diversos tipos de energia, a saber, energia cinética, energia potencial gravitacional, energia potencial elástica, energia potencial elétrica, energia nuclear, energia térmica etc. Todas elas possuem a mesma unidade, Joule, representada por J. Por outro lado, no Sistema Internacional

[56] [Ein05], [Ein52c] e [Ein78c].

de Unidades, a unidade do campo gravitacional $\vec{g}$ é a mesma da aceleração, m/s^2. A unidade do campo elétrico $\vec{E}$ é $V/m = kgmC^{-1}s^{-2} = kgmA^{-1}s^{-3}$. Já a unidade do campo magnético $\vec{B}$ é $T = Wm^{-2} = kgC^{-1}s^{-1} = kgA^{-1}s^{-2}$. Ou seja, estas três grandezas possuem unidades diferentes. Isto significa que elas são grandezas conceitualmente distintas. Logo não faz sentido colocá-las na mesma categoria. Não se deveria denominá-las por um termo comum, tal como "campo."

- Como pode um campo elétrico se transformar em um campo magnético se eles possuem unidades diferentes?

  Quando estudamos um corpo em queda livre com o conceito de energia, é comum afirmar que a energia potencial do corpo foi transformada em energia cinética. Quando temos uma bateria ligada a um resistor em um circuito elétrico, é comum estudar este problema considerando a conversão de energia química da bateria em energia térmica no resistor. Se tivermos um capacitor eletrizado sendo descarregado através de um resistor, podemos estudar este problema considerando a conversão de energia elétrica em energia térmica. Tudo isto faz sentido, já que estamos lidando com grandezas comuns, do mesmo tipo.

  Por outro lado, como um campo elétrico tem unidade diferente da unidade de campo magnético, um não pode se transformar no outro. Porém, como será visto na Subseção 14.5.4, Einstein defendeu em seu artigo de 1905 sobre a teoria da relatividade especial, que um campo elétrico $\vec{E}$ poderia gerar ou se transformar em um campo magnético $\vec{B}$ através de uma mudança entre dois sistemas de referência inerciais, assim como o campo $\vec{B}$ poderia se transformar no campo $\vec{E}$.[57]

- Como fica a questão de ação e reação entre o campo e um corpo material?

  Usualmente consideramos a lei de ação e reação para a interação entre corpos materiais. A força que o corpo A exerce sobre o corpo B é igual e oposta à força que B exerce sobre A. Esta força pode ser de origem gravitacional, elétrica, magnética, elástica etc. Se os corpos A e B estiverem inicialmente em repouso e livres para se deslocar, a interação entre eles vai fazer com que ambos passem a ser acelerados em relação a um referencial inercial deslocando-se em sentidos opostos.

  Mas hoje em dia se afirma que é o campo produzido pelo corpo A que é propagado no espaço e passa a interagir com o corpo B quando entra em contato com ele. Além disso, o campo é definido como uma região do espaço e é, portanto, algo não material. Como fica a lei de ação e reação neste caso? O corpo B é acelerado quando uma força atua sobre ele. Será que o campo que atuou sobre ele recebe uma força contrária, fazendo com que o campo seja acelerado na direção contrária à aceleração do corpo B?

- Etc.

Parte destas contradições poderia ser evitada eliminando a definição de campo como sendo uma região do espaço nas proximidades de massas, corpos eletrizados, ímãs e condutores com corrente. Mas então estaríamos abandonando exatamente os conceitos introduzidos por Faraday e Maxwell. Não mais teríamos a teoria eletromagnética apresentada por eles. Seria então incorreto afirmar que estaríamos seguindo suas ideias e teríamos de começar com um outro contexto conceitual.

Além disso, mesmo as outras definições apresentadas na Subseção 2.9.1 são problemáticas e contraditórias entre si, como visto nesta Subseção 2.9.2.

2.9.3 Equações de Maxwell

Deixando de lado estes problemas, usualmente considera-se no eletromagnetismo clássico que uma densidade volumétrica de carga, ρ, e uma densidade volumétrica de corrente elétrica, $\vec{J}$, produzem os chamados campos elétricos e magnéticos, representados por $\vec{E}$ e $\vec{B}$, cujas unidades são kgm/As^3 e kg/As^2, respectivamente. Maxwell apresentou um conjunto de equações descrevendo os campos produzidos por estas fontes. Supondo fontes no vácuo, a forma diferencial destas equações no Sistema Internacional de Unidades, em notação vetorial, é dada por:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_o} \ , \tag{2.32}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_o \vec{J} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \ , \tag{2.33}$$

[57] [Ein05], [Ein52c] e [Ein78c].

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \ , \tag{2.34}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \ . \tag{2.35}$$

Na forma integral estas equações ficam no seguinte formato:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int\int\int_V \frac{\rho}{\varepsilon_o} dV \ , \tag{2.36}$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_o \int\int \vec{J} \cdot d\vec{a} + \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int\int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} \ , \tag{2.37}$$

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0 \ , \tag{2.38}$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int\int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} \ . \tag{2.39}$$

Supõe-se que estes campos produzidos pelas fontes propagam-se através do espaço com a velocidade da luz no vácuo, passando a interagir com outras cargas e correntes nas regiões em que se encontram estas outras cargas e correntes. Estas cargas e correntes que reagem à presença dos campos são chamadas de corpos de prova ou de teste.

O campo elétrico $\vec{E}$ e o campo magnético $\vec{B}$ também podem ser expressos em termos do potencial escalar elétrico ϕ e do potencial vetor magnético $\vec{A}$ através das seguintes equações:

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \ , \tag{2.40}$$

e

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \ . \tag{2.41}$$

2.9.4 Força sobre uma Carga Baseada em Campos Eletromagnéticos

No caso da gravitação a força exercida sobre uma massa gravitacional m_g na presença de um campo gravitacional $\vec{g}$ é dada por:

$$\vec{F} = m_g \vec{g} \ . \tag{2.42}$$

A força $\vec{F}$ atuando sobre uma carga q na presença de um campo elétrico $\vec{E}$ e de um campo magnético $\vec{B}$ é dada por:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} = -q\nabla\phi - q\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + q\vec{v} \times \vec{B} \ . \tag{2.43}$$

A história desta força e o significado da velocidade $\vec{v}$ que aparece nesta expressão serão discutidos na Seção 14.5.

Capítulo 3

Tópicos Adicionais da Mecânica Clássica

3.1 Conservação do Momento Linear

Vamos supor que temos um conjunto de N partículas interagindo entre si, sem a presença de forças externas a este sistema. Seja S um referencial inercial de origem O. Vamos representar o vetor posição de uma partícula p em relação à origem de S como sendo $\vec{r}_p$, com $\vec{v}_p \equiv d\vec{r}_p/dt$ e $\vec{a}_p \equiv d\vec{v}_p/dt = d^2\vec{r}_p/dt^2$ sendo sua velocidade e aceleração em relação ao referencial S, figura 3.1, sendo $p = 1, ..., N$. A massa inercial dessa partícula será representada por m_{ip}.

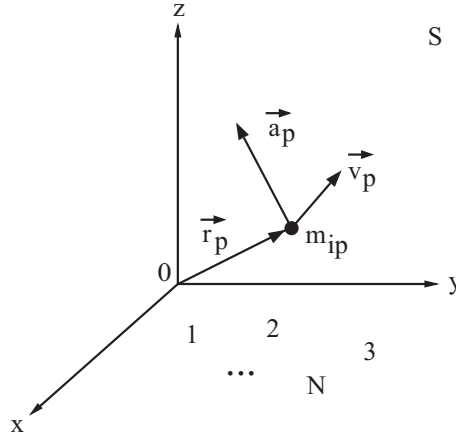



Figura 3.1: Vetor posição, velocidade e aceleração de uma partícula p em relação à origem O de um sistema de referência inercial S.

Define-se o momento linear total $\vec{p}_t$ deste sistema de partículas por:

$$\vec{p}_t \equiv \sum_{p=1}^{N} m_{ip}\vec{v}_p \ . \tag{3.1}$$

Derivando o momento linear total em relação ao tempo e usando a segunda lei de Newton na forma da equação (1.5) obtém-se, supondo massas inerciais constantes:

$$\frac{d\vec{p}_t}{dt} = \sum_{p=1}^{N} m_{ip}\vec{a}_p = m_{i1}\vec{a}_1 + m_{i2}\vec{a}_2 + ... + m_{iN}\vec{a}_N = \sum_{\substack{p=1\\p\neq 1}}^{N} \vec{F}_{p1} + \sum_{\substack{p=1\\p\neq 2}}^{N} \vec{F}_{p2} + ... + \sum_{\substack{p=1\\p\neq N}}^{N} \vec{F}_{pN}$$

$$= \left(\vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + ... + \vec{F}_{N1}\right) + \left(\vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} + ... + \vec{F}_{N2}\right) + ... + \left(\vec{F}_{1N} + \vec{F}_{2N} + ... + \vec{F}_{N-1,\ N}\right) \ . \tag{3.2}$$

Supondo que as forças entre cada par de partículas satisfaça ao princípio de ação e reação dado pela equação (1.6), teremos, para todo par de partículas pq pertencente a este conjunto de N corpos:

$$\vec{F}_{pq} = -\vec{F}_{qp} \ . \tag{3.3}$$

A equação (3.3) faz com que a soma do lado direito da equação (3.2) se anule, ou seja:

$$\vec{p}_t = \text{constante no tempo} \ . \tag{3.4}$$

Isto é, o momento linear total de um sistema de partículas é conservado quando não há forças externas atuando sobre o sistema e quando a força entre cada par de partículas satisfaz ao princípio de ação e reação dado pela equação (1.6).

3.2 Conservação do Momento Angular

Consideramos aqui a mesma situação da Subseção 3.1. Define-se o momento angular total deste sistema de N partículas por:

$$\vec{L}_t \equiv \sum_{p=1}^{N} \vec{r}_p \times (m_{ip}\vec{v}_p) \ . \tag{3.5}$$

Derivando o momento angular total em relação ao tempo obtém-se, supondo massas constantes e usando que $\vec{v}_p \times \vec{v}_p = \vec{0}$:

$$\frac{d\vec{L}_t}{dt} = \sum_{p=1}^{N} \vec{r}_p \times (m_{ip}\vec{a}_p) = \vec{r}_1 \times m_{i1}\vec{a}_1 + \vec{r}_2 \times m_{i2}\vec{a}_2 + ... + \vec{r}_N \times m_{iN}\vec{a}_N \ . \tag{3.6}$$

Usando a equação (3.6) juntamente com a equação (1.5) obtém-se:

$$\frac{d\vec{L}_t}{dt} = \vec{r}_1 \times \left(\vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + ... + \vec{F}_{N1}\right) + \vec{r}_2 \times \left(\vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} + ... + \vec{F}_{N2}\right) + ... + \vec{r}_N \times \left(\vec{F}_{1N} + \vec{F}_{2N} + ... + \vec{F}_{N-1,\ N}\right) \ . \tag{3.7}$$

Usando a equação (3.3) na equação (3.7) obtém-se, com $\vec{r}_{pq} \equiv \vec{r}_p - \vec{r}_q$:

$$\frac{d\vec{L}_t}{dt} = \vec{r}_{12} \times \vec{F}_{21} + \vec{r}_{13} \times \vec{F}_{31} + ... + \vec{r}_{N-1,\ N} \times \vec{F}_{N,\ N-1} \ . \tag{3.8}$$

Vamos supor agora que as forças entre cada par de partículas satisfaça ao princípio de ação e reação na forma forte. Isto é, a força $\vec{F}_{pq}$ exercida pela partícula p sobre a partícula q é não apenas igual e oposta à força de q sobre p, equação (3.3), mas está ao longo da reta unindo p com q:

$$\vec{F}_{pq} \text{ aponta ao longo de } \hat{r}_{pq} \ . \tag{3.9}$$

A suposição (3.9) faz com que o lado direito da equação (3.8) se anule, ou seja:

$$\vec{L}_t = \text{constante no tempo} \ . \tag{3.10}$$

Isto é, o momento angular total de um sistema de partículas é conservado quando não há forças externas atuando sobre o sistema e quando a força entre cada par de partículas satisfaz ao princípio de ação e reação na forma forte dado pelas equações (1.6) e (3.9).

3.3 Centro de Massa

Seja o sistema de N partículas descrito na Seção 3.1. Define-se o vetor posição $\vec{r}_{cm}$ e a velocidade $\vec{v}_{cm}$ do centro de massa deste sistema em relação à origem O do referencial inercial S como sendo dadas por, respectivamente:

$$\vec{r}_{cm} \equiv \sum_{p=1}^{N} \frac{m_{ip}\vec{r}_p}{m_t} \ , \tag{3.11}$$

e

$$\vec{v}_{cm} \equiv \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = \sum_{p=1}^{N} \frac{m_{ip}\vec{v}_p}{m_t} , \tag{3.12}$$

onde $m_t \equiv \sum_{p=1}^{N} m_p$ é a massa total do sistema.

Com esta definição obtém-se que o momento linear total $\vec{p}_t$ deste sistema de partículas, dado pela equação (3.1), pode ser escrito como:

$$\vec{p}_t = \sum_{p=1}^{N} m_{ip}\vec{v}_p = m_t \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = m_t \vec{v}_{cm} . \tag{3.13}$$

3.4 Energia

Newton baseou sua mecânica nos conceitos de força e aceleração. Há uma outra formulação baseada na ideia de energia, cuja unidade no Sistema Internacional de Unidades é o Joule, J. Apresentamos nesta Seção os aspectos essenciais relacionados com os conceitos de energia potencial e cinética.

3.4.1 Energia Cinética

O conceito básico de energia é o de energia cinética T. Vamos supor que estamos em um sistema de referência inercial S e que uma partícula de massa inercial m_i desloca-se neste sistema de referência com uma velocidade $\vec{v}$. Neste caso sua energia cinética T é definida por:

$$T \equiv \frac{m_i v^2}{2} = m_i \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{2} . \tag{3.14}$$

Esta energia cinética é uma energia de movimento puro na mecânica clássica. Isto é, ela não está relacionada com qualquer tipo de interação (gravitacional, elétrica, magnética, elástica, nuclear, etc.). Como tal, ela depende do sistema de referência, já que o mesmo corpo no mesmo instante pode ter velocidades diferentes com relação a diferentes sistemas inerciais. Isto significa que sua energia cinética em relação a cada um destes sistemas pode ter um valor diferente.

Já a energia cinética total T_t de um conjunto de N partículas é definida por:

$$T_t \equiv \sum_{p=1}^{N} \frac{m_{ip} v_p^2}{2} = \sum_{p=1}^{N} m_{ip} \frac{\vec{v}_p \cdot \vec{v}_p}{2} , \tag{3.15}$$

onde m_{ip} é a massa inercial da partícula p e $\vec{v}_p$ é a velocidade desta partícula em relação ao sistema de referência inercial S, com $p = 1, \; ..., N$.

3.4.2 Energia Potencial

Os outros tipos de energia são baseados em como a partícula interage com outros corpos. Por exemplo, a energia potencial gravitacional U_g entre dois corpos pontuais de massas gravitacionais m_{g1} e m_{g2} separados por uma distância r entre si é dada por

$$U_g = -G \frac{m_{g1} m_{g2}}{r} . \tag{3.16}$$

Se o corpo m_{g1} está fora da Terra a uma distância r_1 de seu centro, podemos integrar esta equação substituindo m_{g2} por dm_{g2}, sendo dm_{g2} uma quantidade infinitesimal de massa gravitacional ocorrendo em cada ponto do interior e da superfície da Terra. Supondo uma distribuição isotrópica de matéria distribuída por toda a Terra obtém-se, após integrar esta energia para todos os elementos da Terra, o seguinte valor para a energia potencial gravitacional de interação entre m_{g1} e a Terra:

$$U_g = -G \frac{m_{g1} M_{gT}}{r_1} , \tag{3.17}$$

onde M_{gT} é a massa gravitacional da Terra.

Se o corpo está a uma distância h da superfície terrestre, $r_1 = R_T + h$, onde R_T é o raio da Terra e se $h \ll R_T$, esta expressão pode ser aproximada da seguinte forma:

$$U_g = -G\frac{m_{g1}M_{gT}}{R_T + h} \approx -\frac{Gm_{g1}M_{gT}}{R_T} + m_{g1}gh \ , \tag{3.18}$$

onde $g = GM_{gT}/R_T^2 \approx 9,81 \ m/s^2$ é o valor da força gravitacional terrestre por unidade de massa gravitacional, atuando em sua superfície. Deixando de lado o termo constante $-Gm_{g1}M_{gT}/R_T$, obtém-se que a energia potencial gravitacional próxima da Terra é dada por $m_{g1}gh$.

Seja uma mola com uma extremidade presa à Terra e com a outra extremidade presa a um corpo de massa inercial m_i. A energia potencial elástica U_k desta massa inercial interagindo com esta mola de constante elástica k é dada por

$$U_k = \frac{kx^2}{2} \ . \tag{3.19}$$

Aqui x é o deslocamento do corpo preso à mola em relação à posição de equilíbrio da mola. Ou seja, $x = \ell - \ell_o$, com ℓ sendo o comprimento esticado ou comprimido da mola, enquanto que ℓ_o é seu comprimento natural quando ela está relaxada.

A energia potencial eletrostática, U_e, para a interação entre duas cargas elétricas q_1 e q_2 separadas por uma distância r é dada por:

$$U_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_1q_2}{r} \ . \tag{3.20}$$

Aqui $\varepsilon_o = 8,85 \times 10^{-12} \ A^2s^4/kgm^3$ é uma constante chamada de permissividade do vácuo.

Esta expressão é análoga à equação (3.16) para a interação entre duas massas gravitacionais.

A energia potencial magnetostática, U_m, entre dois polos magnéticos p_1 e p_2 separados por uma distância r é dada por:

$$U_m = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{p_1p_2}{r} \ . \tag{3.21}$$

Nesta expressão $\mu_o \equiv 4\pi \times 10^{-7} \ kgm/(A^2s^2)$ é uma constante chamada de permeabilidade do vácuo.

Como nunca foram encontrados até hoje polos magnéticos isolados, mas apenas dipolos magnéticos, apresentamos aqui a energia potencial magnetostática de interação entre dois dipolos magnéticos. Cada dipolo magnético é composto por um polo Norte p_N e por um polo Sul de mesma intensidade, $p_S = -p_N$, separados por uma distância ℓ. Seja $\hat{\ell}$ um vetor de módulo unitário apontando do polo Sul para o polo Norte deste dipolo. O momento magnético $\vec{m}$ de cada dipolo foi definido pela equação (2.14), a saber, $\vec{m} = p_N\ell\hat{\ell}$. A energia potencial de interação entre dois dipolos com momentos magnéticos $\vec{m}_1$ e $\vec{m}_2$, como aqueles representados na figura 2.11, é dada por:

$$U_m = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 - 3(\vec{m}_1 \cdot \hat{r})(\vec{m}_2 \cdot \hat{r})}{r^3} \ , \tag{3.22}$$

onde r é a distância entre os centros dos dipolos, sendo $\hat{r}$ o vetor unitário apontando do centro do dipolo 2 para o centro do dipolo 1. Esta relação é válida quando a distância entre os dipolos é muito maior do que seus comprimentos, $r \gg \ell_1$ e $r \gg \ell_2$.

Vamos supor que temos dois circuitos fechados C_1 e C_2 nos quais fluem as correntes elétricas constantes i_1 e i_2, respectivamente. Seja $i_1d\vec{\ell}_1$ um elemento de corrente infinitesimal do circuito C_1 localizado em $\vec{r}_1$, de comprimento $d\ell_1 = |d\vec{\ell}_1|$ e apontando no sentido da corrente elétrica i_1 em cada ponto do circuito 1. Seja $i_2d\vec{\ell}_2$ um elemento de corrente infinitesimal do circuito C_2 localizado em $\vec{r}_2$, de comprimento $d\ell_2 = |d\vec{\ell}_2|$ e apontando no sentido da corrente elétrica i_2 em cada ponto do circuito 2. A energia potencial de interação eletrodinâmica entre estes dois circuitos fechados C_1 e C_2 é dada por:

$$U = i_1i_2M \ , \tag{3.23}$$

onde M é o chamado de coeficiente de indutância mútua entre os dois circuitos. Ele é definido por:

$$M \equiv \frac{\mu_o}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{(\hat{r} \cdot d\vec{\ell}_1)(\hat{r} \cdot d\vec{\ell}_2)}{r} = \frac{\mu_o}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2}{r} \ . \tag{3.24}$$

Aqui $\vec{r} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ é o vetor apontando de $i_2d\vec{\ell}_2$ para $i_1d\vec{\ell}_1$, $r = |\vec{r}|$ é a distância entre os dois elementos de corrente e $\hat{r} = \vec{r}/r$ é o vetor unitário apontando de $i_2d\vec{\ell}_2$ para $i_1d\vec{\ell}_1$.

Vamos considerar o caso particular no qual temos duas espiras pequenas de áreas a_1 e a_2, nas quais fluem correntes i_1 e i_2, sendo as normais às duas áreas dadas por $\hat{n}_1$ e $\hat{n}_2$, figura 2.13. Seja r a distância entre os centros das duas espiras e $\hat{r}$ o vetor unitário apontando do centro da espira 2 para o centro da espira 1. Vamos supor ainda que esta distância entre as espiras seja muito maior do que seus tamanhos típicos, ou seja, tal que $r \gg \sqrt{a_1}$ e $r \gg \sqrt{a_2}$. Neste caso a energia potencial de interação eletrodinâmica entre elas é dada pela equação (3.22) com os momentos magnéticos $\vec{m}$ das duas espiras dados pela equação (2.18), ou seja, $\vec{m} = ia\hat{n}$.

Vamos agora considerar a interação entre um dipolo magnético de comprimento ℓ e momento magnético dado pela equação (2.14) interagindo com uma pequena espira de área a, corrente i e momento magnético dado pela equação (2.18), figura 2.14. A energia de interação entre eles também é dada pela equação (3.22), desde que estejam separados por uma grande distância r, tal que $r \gg \ell$ e $r \gg \sqrt{a}$.

A energia da eletrodinâmica de Weber, U_W, descrevendo a interação entre duas cargas elétricas pontuais q_1 e q_2 localizadas em $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$, respectivamente, foi proposta por ele em 1848.[1] No Sistema Internacional de Unidades esta energia de interação é dada por:

$$U_W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_1 q_2}{r_{12}}\left(1 - \frac{\dot{r}_{12}^2}{2c^2}\right) . \tag{3.25}$$

Nesta expressão $r_{12} = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| \equiv r$ é a distância entre q_1 e q_2, sendo $\dot{r}_{12} \equiv dr_{12}/dt$ a velocidade radial relativa entre elas.

Como discutido na Seção 2.8, a constante c que aparece na equação (3.25) é a razão entre as unidades eletromagnéticas e eletrostáticas de carga. Seu valor experimental foi apresentado na equação (2.22), ou seja, $c = 2,998 \times 10^8$ m/s.

3.4.3 Relação entre Força e Energia Potencial

Relacionamos os conceitos de força conservativa $\vec{F}$ e energia potencial U através do gradiente ou derivada direcional:

$$\vec{F} = -\nabla U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{z}\right) . \tag{3.26}$$

Nesta equação $\vec{F}$ é a força atuando sobre uma partícula pontual localizada em $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$, sendo U a energia de interação entre ela e os outros corpos ao seu redor. O gradiente de U é considerado como atuando no posição em que a partícula se encontra.

Esta relação é especialmente útil quando a energia potencial e a força dependem apenas da posição dos corpos. Um exemplo desta situação ocorre quando a força entre dois corpos é central, satisfaz ao princípio de ação e reação, e depende apenas da distância r entre eles. Neste caso a força $\vec{F}_{21}$ exercida por 2 em 1 pode ser obtida da energia mútua U entre estes corpos utilizando a seguinte expressão:

$$\vec{F}_{21} = -\frac{dU}{dr}\hat{r} = -\vec{F}_{12} , \tag{3.27}$$

onde $\vec{F}_{12}$ é a força exercida por 1 em 2, sendo $\hat{r}$ o vetor unitário apontando de 2 para 1.

Vamos supor agora que temos um conjunto de N partículas interagindo entre si através de forças conservativas. Sejam p e q dois destes corpos, com $p = 1, ..., N$ e $q = 1, ..., N$, sendo $q \neq p$. Seja a energia potencial entre cada par de partículas representada por U_{pq}. A energia potencial total U_t deste sistema de partículas é definida por:

$$U_t \equiv \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N}\sum_{\substack{q=1\\ q\neq p}}^{N} U_{pq} = \sum_{p=1}^{N}\sum_{\substack{q=1\\ q>p}}^{N} U_{pq} . \tag{3.28}$$

O fator $1/2$ no termo central desta expressão é devido ao fato de que $U_{pq} = U_{qp}$. Logo $(U_{pq} + U_{qp})/2 = U_{pq}$ para todo p e para todo $q \neq p$. O fator $1/2$ garante então que a energia de interação entre cada par de partículas é contada apenas uma vez na energia total do sistema.

Seja k uma partícula localizada em $\vec{r}_k = x_k\hat{x} + y_k\hat{y} + z_k\hat{z}$ em relação à origem O de um referencial inercial S, com $k = 1, ..., N$. A força $\vec{F}_k$ atuando sobre k e sendo devida a todas as outras $N - 1$ partículas do sistema é dada por:

[1] [Web48], com tradução para a língua inglesa em [Web66].

$$\vec{F}_k = -\nabla_k U_t = -\left(\frac{\partial U_t}{\partial x_k}\hat{x} + \frac{\partial U_t}{\partial y_k}\hat{y} + \frac{\partial U_t}{\partial z_k}\hat{z}\right) . \quad (3.29)$$

3.4.4 Conservação da Energia

Nesta formulação da mecânica, em vez das três leis do movimento de Newton, utiliza-se o teorema de conservação da energia no caso de sistemas conservativos. Vamos supor que temos N partículas interagindo entre si. Seja U_{pq} a energia potencial de interação entre as partículas p e q, com $p = 1, ..., N$ e $q = 1, ..., N$. Seja U_t a energia potencial total deste conjunto de partículas dada pela equação (3.28) e T_t a energia cinética total deste sistema de N partículas dada pela equação (3.15). A energia total E_t deste conjunto de partículas é definida por:

$$E_t \equiv U_t + T_t = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N}\sum_{\substack{q=1 \\ q\neq p}}^{N} U_{pq} + \sum_{p=1}^{N} m_{ip}\frac{\vec{v}_p \cdot \vec{v}_p}{2} , \quad (3.30)$$

onde m_{ip} é a massa inercial da partícula p deslocando-se com velocidade $\vec{v}_p$ em relação a um sistema de referência inercial.

O teorema de conservação da energia no caso de sistemas conservativos afirma que a energia total (soma das energias potenciais com as energias cinéticas) é uma constante no tempo. Matematicamente este teorema pode ser escrito da seguinte forma:

$$E_t \equiv \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N}\sum_{\substack{q=1 \\ q\neq p}}^{N} U_{pq} + \sum_{p=1}^{N} m_{ip}\frac{\vec{v}_p \cdot \vec{v}_p}{2} = \text{constante no tempo} . \quad (3.31)$$

3.5 Valores de Grandezas Terrestres, do Sistema Solar e Cosmológicas

Apresentamos nesta Seção os valores aproximados de algumas grandezas terrestres, do sistema solar e cosmológicas.

Raio médio da Terra: $R_T = 6,37 \times 10^6\ m$. Raio da Lua: $R_L = 1,74 \times 10^6\ m$. Raio do Sol: $R_S = 6,96 \times 10^8\ m$. Distância média entre a Terra e o Sol (chamada de *unidade astronômica*, UA): $d_{TS} = 1,50 \times 10^{11}\ m$. Distância do sistema solar ao centro da Via Láctea: $d_{SVL} = 2,5 \times 10^{20}\ m$.

Existe ainda uma distância R_o que pode ser definida a partir da constante de Hubble H_o e da velocidade da luz c:

$$R_o \equiv \frac{c}{H_o} . \quad (3.32)$$

Esta constante R_o é chamada algumas vezes de *raio de Hubble*, *comprimento de Hubble* ou *distância de Hubble*. Há uma grande incerteza no valor da constante de Hubble H_o. Hoje em dia seu valor é estimado entre 50 $kms^{-1}Mpc^{-1}$ e 100 $kms^{-1}Mpc^{-1}$, ou seja:[2]

$$1,6 \times 10^{-18}\ s^{-1} < H_o < 3,2 \times 10^{-18}\ s^{-1} . \quad (3.33)$$

Combinando as equações (3.32) e (3.33) obtém-se:

$$9,8 \times 10^{25}\ m < R_o < 1,9 \times 10^{26}\ m . \quad (3.34)$$

Embora algumas vezes se afirme que R_o seria o raio do universo conhecido, deve ser enfatizado aqui que o próprio Edwin Hubble defendia um modelo cosmológico no qual o universo era infinito no espaço e no tempo, sem expansão e homogêneo em larga escala.[3] Ou seja, para ele não haveria um raio do universo já que este se estenderia indefinidamente em todas as direções, sendo de tamanho infinito. De qualquer forma, tendo clarificado este aspecto, como a constante R_o foi definida a partir da constante de Hubble, faz sentido denominar esta distância de comprimento de Hubble.

[2] [Bor88, Seção 2.2: The Hubble Constant H_o - How Big is the Universe?].

[3] [ANS08] e [ANS09].

Massa da Terra: $M_T = 5,98 \times 10^{24}\ kg$. Massa da Lua: $M_L = 7,36 \times 10^{22}\ kg$. Massa do Sol: $M_S = 1,99 \times 10^{30}\ kg$. Massa da Via Láctea: $M_{VL} \approx 4 \times 10^{41}\ kg$.

Densidade média de massa da Terra: $\rho_T = 5,52 \times 10^3\ kg/m^3$. Densidade média de massa da Lua: $\rho_L = 3,33 \times 10^3\ kg/m^3$. Densidade média de massa do Sol: $\rho_S = 1,41 \times 10^3\ kg/m^3$. Densidade média de massa da Via Láctea nas proximidades do Sol: $\rho_{VL} \approx 0,2 M_S/parsec^3 \approx 1,4 \times 10^{-20}\ kg/m^3$.

É comum em cosmologia definir-se uma grandeza teórica chamada de densidade crítica de massa, representada pelo símbolo ρ_c, pela seguinte relação:

$$\rho_c \equiv \frac{3H_o^2}{8\pi G} \ . \tag{3.35}$$

O valor de ρ_c depende do valor da constante de Hubble H_o.

O valor da densidade média de massa gravitacional visível no universo ainda é incerto. Vamos representar esta grandeza pelo símbolo ρ_{go}. A incerteza no valor de ρ_{go} está ligada à incerteza na determinação das distâncias das galáxias até a Terra. Normalmente estas distâncias são determinadas utilizando a lei de Hubble do desvio para o vermelho da luz vinda destas galáxias. Isto significa que o valor de ρ_{go} depende do valor que se assume para a constante de Hubble, sendo em particular proporcional ao quadrado da constante de Hubble. Por outro lado, o valor da razão ρ_{go}/ρ_c é independente do valor que se adota para a constante de Hubble. As observações atuais indicam que esta razão adimensional está entre os seguintes valores:[4]

$$0,1 < \frac{\rho_{go}}{\rho_c} < 0,3 \ . \tag{3.36}$$

Combinando as equações (3.33), (3.35) e (3.36) obtém-se:

$$4,6 \times 10^{-28}\ \frac{kg}{m^3} < \rho_{go} < 5,5 \times 10^{-27}\ \frac{kg}{m^3} \ . \tag{3.37}$$

Como a massa de um átomo de hidrogênio vale $1,67 \times 10^{-27}\ kg$, os limites desta densidade média de massa do universo correspondem a:

$$0,28\ \frac{\text{átomos de hidrogênio}}{m^3} < \rho_{go} < 3,3\ \frac{\text{átomos de hidrogênio}}{m^3} \ . \tag{3.38}$$

A massa gravitacional M_{go} de uma esfera tendo o comprimento de Hubble R_o como raio e com a densidade média ρ_{go} de matéria visível observada no universo em larga escala é definida por $M_{go} \equiv 4\pi\rho_{go}R_o^3/3$. Com as equações (3.34) e (3.37) obtém-se:

$$1,8 \times 10^{51}\ kg < M_{go} < 1,6 \times 10^{53}\ kg \ . \tag{3.39}$$

A Terra gira diariamente ao redor de seu eixo, em relação às estrelas fixas, com um período de um dia sideral ($T_{dia} = 8,6164 \times 10^4\ s$), ou com uma velocidade angular $\omega_{dia} = 2\pi/T_{dia} = 7,29 \times 10^{-5}\ rad/s$. A Terra orbita ao redor do Sol, em relação ao pano de fundo das estrelas fixas, com um período de um ano ($T_{ano} = 365^{\text{d}}\ 6^{\text{h}}\ 9^{\text{m}} = 3,156 \times 10^7\ s$), ou com uma velocidade angular $\omega_{ano} = 2\pi/T_{ano} = 2,0 \times 10^{-7}\ rad/s$. O sistema planetário orbita ao redor do centro de nossa galáxia, em relação ao pano de fundo das galáxias distantes, com um período de $T_{galaxia} = 2,5 \times 10^8\ anos = 7,9 \times 10^{15}\ s$, ou com uma velocidade angular $\omega_{galaxia} = 2\pi/T_{galaxia} \approx 8,0 \times 10^{-16}\ rad/s$. Temos então:

$$T_{galaxia} \gg T_{ano} \gg T_{dia} \ , \tag{3.40}$$

e

$$\omega_{galaxia} \ll \omega_{ano} \ll \omega_{dia} \ . \tag{3.41}$$

A aceleração de queda livre de um corpo em relação ao solo em uma latitude de 50^{o} tem o valor de $a = g = 9,81\ m/s^2$, figura 3.2. A aceleração de queda livre g_L de um corpo na superfície da Lua tem aproximadamente $1/6$ deste valor, a saber, $g_L = 1,6\ m/s^2$.

Uma partícula no equador terrestre, parada em relação ao solo, não está acelerada em relação à Terra. Mas a própria Terra realiza uma rotação diária ao redor de seu eixo Norte-Sul em relação ao referencial das estrelas fixas. Isto significa que esta partícula tem uma aceleração centrípeta em relação ao referencial das estrelas fixas, descrevendo uma órbita circular ao redor do eixo da Terra, figura 3.3.

[4][Bor88, Seção 2.3, ver especialmente as págs. 69, 71 e 74].

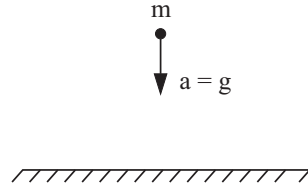



Figura 3.2: Aceleração de um corpo em queda livre em relação ao solo.

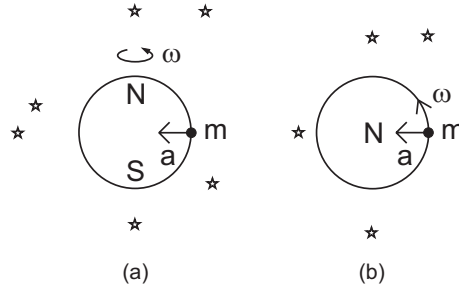



Figura 3.3: Aceleração centrípeta de uma partícula no equador terrestre, parada em relação ao solo, devida à rotação diária da Terra em relação ao pano de fundo das estrelas fixas. (a) Situação em um plano meridiano. (b) Situação no plano equatorial, vista do polo Norte para o polo Sul.

O valor desta aceleração centrípeta devida à rotação diária da Terra é dada por (usando a equação (8.5) que será apresentada na Seção 8.1):

$$a_{centripeta\ diária} = R_T \omega_{dia}^2 \approx 3,4 \times 10^{-2}\ m/s^2\ . \tag{3.42}$$

A Terra descreve uma órbita elíptica ao redor do Sol, em relação ao pano de fundo das estrelas fixas, com um período de um ano. Esta órbita é quase circular, já que a excentricidade da elipse é muito pequena. Ou seja, a distância entre o Sol e a Terra é praticamente constante ao longo do ano. Isto significa que a própria Terra tem uma aceleração centrípeta em relação ao referencial das estrelas fixas, figura 3.4.

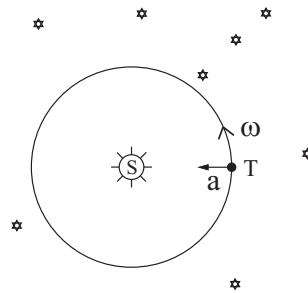



Figura 3.4: Aceleração centrípeta da Terra ao descrever uma órbita em torno do Sol, em relação ao pano de fundo das estrelas fixas.

A aceleração centrípeta da Terra devida à sua translação anual ao redor do Sol, em relação ao referencial das estrelas fixas, é dada por:

$$a_{centripeta\ anual} = d_{TS} \omega_{ano}^2 \approx 6,0 \times 10^{-3}\ m/s^2\ . \tag{3.43}$$

Hoje em dia sabe-se que o próprio sistema solar está afastado do centro de nossa galáxia, a Via Láctea. Além disso, o sistema solar descreve, em relação ao pano de fundo das galáxias distantes, uma órbita ao redor do centro de nossa galáxia. Isto significa que o sistema solar possui uma a aceleração centrípeta devida à sua rotação ao redor do centro da galáxia, em relação ao referencial universal das galáxias distantes, figura 3.5.

Esta aceleração centrípeta do sistema solar em relação ao referencial universal é dada por:

$$a_{centripeta\ galáxia} = d_{SVL} \omega_{galaxia}^2 \approx 2,5 \times 10^{20} (8,0 \times 10^{-16})^2 \approx 1,6 \times 10^{-10}\ m/s^2\ . \tag{3.44}$$

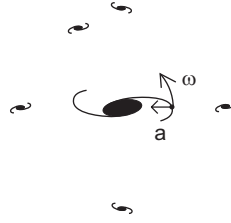



Figura 3.5: Aceleração centrípeta da sistema solar ao descrever uma órbita em torno do centro de nossa galáxia, em relação ao pano de fundo das galáxias distantes.

Temos então:

$$g \gg a_{centripeta\ diária} > a_{centripeta\ anual} \gg a_{centripeta\ galáxia} \ . \tag{3.45}$$

Uma aceleração obtida com a constante de Hubble H_o e com o comprimento de Hubble $R_o \equiv c/H_o$ é dada por $a_o \equiv R_o H_o^2 = cH_o$. Com os limites dados pela equação (3.33) obtém-se:

$$4,8 \times 10^{-10} \frac{m}{s^2} < a_o < 9,6 \times 10^{-10} \frac{m}{s^2} \ . \tag{3.46}$$

Parte II

Aplicações da Mecânica Newtoniana

Capítulo 4

Corpos em Repouso sobre a Terra

Vamos inicialmente considerar a Terra como sendo um referencial inercial. Seja um corpo de massa inercial m_i inicialmente em repouso em relação à Terra. Caso a força resultante sobre ele seja nula, a equação (1.4) indica que ele permanecerá em repouso.

4.1 Bloco Parado

Na figura 4.1 temos um bloco de massa inercial m_i e massa gravitacional m_g parado sobre uma mesa. Neste caso o peso $\vec{P}$ exercido pela Terra sobre o corpo é contrabalançado pela força normal $\vec{N}$ exercida pela mesa sobre o corpo. Embora a força normal atue na região de contato entre o bloco e a mesa, ela está sendo representada nesta figura como atuando no centro do corpo para ilustrar mais claramente o equilíbrio das duas forças.

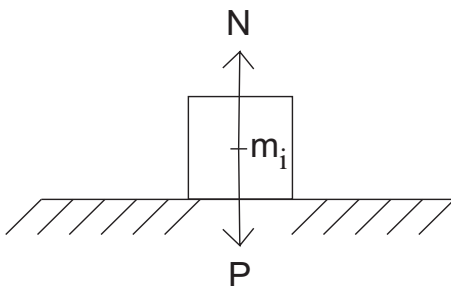



Figura 4.1: Corpo de massa inercial m_i parado sobre uma mesa. A força peso exercida pela Terra sobre o bloco é contrabalançada pela força normal exercida pela mesa sobre ele.

4.2 Corpo Dependurado em um Fio ou Mola

De acordo com a lei de Newton da gravitação, equação (1.17), a força exercida pela Terra sobre uma partícula fora dela varia com o quadrado da distância entre esta partícula e o centro da Terra. Seja r_1 a distância inicial da partícula até o centro da Terra e r_2 sua distância final. Caso $r_2 = r_1 + h$, com $h \ll r_1$, então esta força pode ser considerada praticamente constante. Isto está ilustrado na figura 4.2. Na situação (a) temos uma balança comum de braços iguais equilibrada com dois pesos que estão na mesma distância do solo. Leva-se um destes pesos para uma distância mais afastada da Terra, como indicado na situação (b). Observa-se que a balança continua equilibrada.[1] Isto mostra que perto da superfície terrestre o peso de um corpo praticamente não depende de sua altura em relação ao solo.

Apenas com a utilização de balanças extremamente precisas seria possível perceber uma diferença entre as situações (a) e (b) da figura 4.2. Vamos supor que partimos de uma balança em equilíbrio como na situação (a). Colocamos então o corpo da direita no prato superior da balança, soltando-a do repouso, como indicado na figura (b). Se tivermos uma balança extremamente precisa, ela deixará de ficar em equilíbrio

[1] [Ass08b, págs. 147-148], [Ass10a, págs. 153-154] e [Ass11a, págs. 137-138].

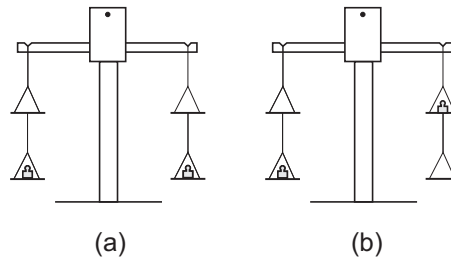



Figura 4.2: (a) Balança de braços iguais com dois pesos em equilíbrio. (b) A balança continua equilibrada quando um dos pesos está mais afastado do solo do que o outro peso.

nesta situação (b) após ser solta em repouso. Em particular, o corpo da esquerda que está mais próximo do solo vai se aproximar da Terra, enquanto que o corpo da direita vai se afastar do solo.

Uma outra maneira de perceber que o peso de um corpo praticamente não depende de sua altura em relação ao solo, quando ele está próximo da superfície terrestre, é ilustrado na figura 4.3. Na situação (a) temos uma mola de constante elástica k e comprimento ℓ_o quando está na vertical presa por sua extremidade superior a uma distância d do solo, com $d > \ell_o$. Na situação (b) prendemos a extremidade superior da mola a uma distância D do solo, com $D > d > \ell_o$. Observa-se que o comprimento da mola relaxada continuou praticamente o mesmo, a saber, ℓ_o. Estamos aqui supondo $D \ll R_T$, ou seja, muito menor do que o raio da Terra.

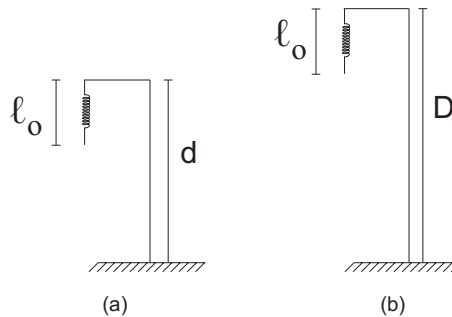



Figura 4.3: A mesma mola suspensa na vertical a diferentes distâncias do solo.

Em seguida dependura-se na extremidade inferior da mola, quando sua extremidade superior está presa a uma distância d do solo, um corpo de peso P, massa gravitacional m_g e massa inercial m_i. Aguarda-se que a mola atinja o equilíbrio, ficando parada em relação ao solo, figura 4.4 (a).

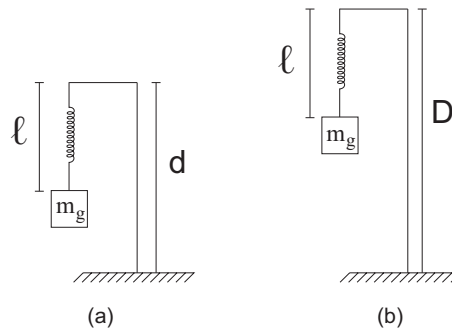



Figura 4.4: A mesma mola suspensa na vertical a diferentes distâncias do solo, agora com um corpo preso em sua extremidade inferior.

As forças atuando sobre o corpo são seu peso P apontando para baixo, que surge de sua interação gravitacional com a Terra, e a força elástica F apontando para cima, que surge pelo fato da mola estar esticada. Como estamos analisando a situação em que este corpo está parado em relação ao solo, estas duas forças têm de se equilibrar. De acordo com a equação (2.6), observa-se que o novo comprimento ℓ de

equilíbrio da mola é dado por:

$$\ell - \ell_o = \frac{P}{k} = \frac{m_g g}{k} \ . \tag{4.1}$$

Quando esta mesma mola é presa por sua extremidade superior a uma distância D do solo, com o mesmo corpo de massa gravitacional m_g preso em sua extremidade inferior, a situação de equilíbrio é representada na figura 4.4 (b). Observa-se que o comprimento ℓ de equilíbrio da mola nesta situação é o mesmo da situação em que estava presa a uma distância d do solo, ou seja, dado pela equação (4.1).

Isto indica mais uma vez que perto da superfície terrestre o peso de um corpo praticamente não depende de sua altura em relação ao solo.

Em vez de suspender o corpo por uma mola, pode-se suspendê-lo por um fio ideal inextensível, figura 4.5.

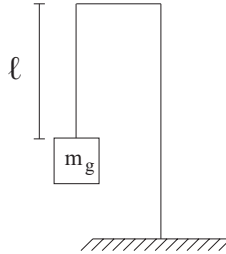



Figura 4.5: Fio de comprimento constante ℓ com um corpo preso em sua extremidade inferior.

Novamente temos o peso do corpo sendo equilibrado pela tensão no fio:

$$T = P = m_g g \ . \tag{4.2}$$

A única diferença deste caso em relação ao caso da mola é que a tensão no fio não pode ser visualizada por uma variação de seu comprimento, já que o fio é considerada ideal, inextensível. Para medir esta tensão seria necessário utilizar um dinamômetro preso ao fio ideal.

4.2.1 Fio Inclinado em Relação à Vertical quando uma Força Horizontal Atua sobre o Corpo

Na figura 4.6 apresentamos diversas situações nas quais um fio sustentando um corpo fica inclinado em relação à vertical. O corpo preso ao fio de comprimento constante ℓ tem peso P, massa gravitacional m_g e massa inercial m_i. Em todos os casos não há movimento em relação ao solo. Esta inclinação de um ângulo θ em relação à vertical é causada por uma força horizontal atuando sobre o corpo de massa inercial m_i preso ao fio.

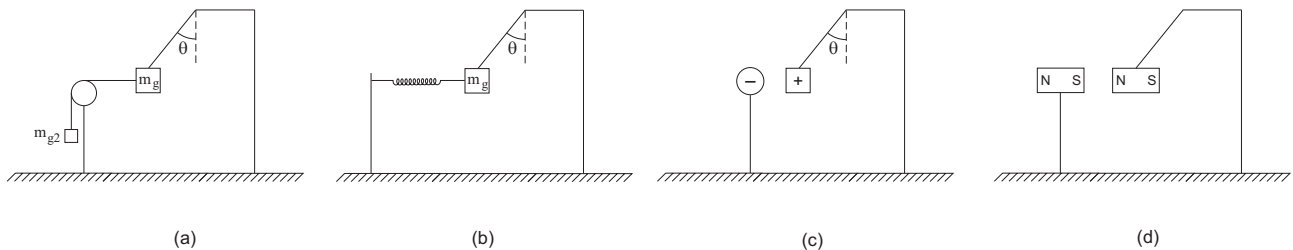



Figura 4.6: Fios inclinados em relação à vertical devido à atuação de forças horizontais de origem: (a) gravitacional, (b) elástica, (c) elétrica e (d) magnética.

Na figura 4.6 (a) temos um segundo corpo de massa gravitacional m_{g2} dependurado na extremidade inferior de um segundo fio, enquanto que a extremidade superior deste segundo fio está presa horizontalmente ao primeiro corpo. O peso deste segundo corpo é transmitido pelo segundo fio ao primeiro corpo, inclinando o fio que prende o primeiro corpo ao suporte superior. Em (b) temos uma mola horizontal esticada presa entre o corpo e uma parede. A força elástica exercida por esta mola esticada inclina o fio. Em (c) supomos que o corpo dependurado no fio isolante tenha sido eletrizado, sendo atraído eletricamente por uma força

elétrica exercida por um outro corpo eletrizado preso ao seu lado. Esta força elétrica horizontal inclina o fio. Em (d) supomos que o corpo dependurado no fio seja um ímã que está sendo atraído por um segundo ímã preso ao seu lado. Esta força magnética horizontal inclina o fio em relação à vertical.

Vamos representar por F ao módulo desta força horizontal que está atuando sobre o corpo de massa inercial m_i, enquanto que P é o peso deste corpo e T a tensão no fio que o prende. Na figura 4.7 apresentamos estas três forças que atuam sobre o corpo.

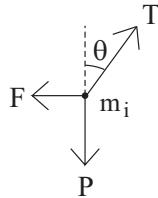



Figura 4.7: Forças que atuam sobre o corpo preso ao fio inclinado.

Como o corpo está parado em relação ao solo, estas três forças se equilibram. Pela figura 4.7 obtém-se:

$$T \operatorname{sen} \theta = F \ , \tag{4.3}$$

e

$$T \cos \theta = P \ . \tag{4.4}$$

Dividindo estas duas equações obtém-se o ângulo θ de inclinação em termos do peso P e da força horizontal F:

$$\tan \theta = \frac{F}{P} \ . \tag{4.5}$$

Por outro lado, a partir das equações (4.3) e (4.4), obtém-se que a tração T no fio é dada por:

$$T = \sqrt{F^2 + P^2} \ . \tag{4.6}$$

Esta tensão pode ser medida colocando um dinamômetro preso ao fio. Esta tensão pode ser visualizada substituindo o fio por uma mola de comprimento relaxado ℓ_o. Supondo que a massa inercial e a massa gravitacional desta mola sejam desprezíveis comparadas com a massa inercial e a massa gravitacional do corpo dependurado nela, podemos desprezar o peso da mola comparado com o peso do corpo preso a ela. Também podemos desprezar a variação de comprimento da mola quando ela passa da posição horizontal para a posição vertical, comparada com sua variação de comprimento quando se dependura na mola o corpo de teste que está sendo considerado aqui. A tensão T na mola é dada por $k(\ell - \ell_o)$, onde ℓ é seu comprimento esticado quando ela está tensionada. Neste caso podemos escrever:

$$T = k(\ell - \ell_o) = \sqrt{F^2 + P^2} \ . \tag{4.7}$$

Ou seja, quanto maior for a variação de comprimento $\ell - \ell_o$ da mola, maior será a tensão que está atuando sobre ela.

4.3 Recipiente Parado com Fluido

Na figura 4.8 temos um recipiente parado em relação ao solo, com um líquido em seu interior. Vamos supor em nossas figuras que o recipiente seja cúbico ou retangular, embora seu formato não seja relevante. Observa-se que o nível do fluido fica horizontal.

Vamos tratar deste problema com a mecânica newtoniana, considerando um fluido ideal incompressível. A água, o leite e o óleo são líquidos que se comportam razoavelmente como fluidos incompressíveis. Consideramos um elemento do fluido de massa inercial dm_i, massa gravitacional dm_g e volume dV. Neste caso o peso $d\vec{P}$ exercido pela Terra sobre ele é contrabalançado pela força de empuxo $d\vec{E}$ exercida pelo restante do fluido sobre este elemento de volume.

A aplicação a este caso da segunda lei de Newton na forma da equação (1.4) fornece:

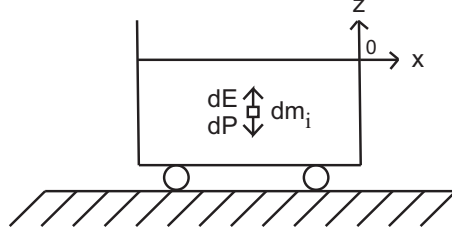



Figura 4.8: Recipiente parado em relação à Terra, com um fluido em seu interior.

$$d\vec{P} + d\vec{E} = dm_i\vec{a} = \vec{0} \ . \tag{4.8}$$

Vamos obter a pressão em um ponto qualquer do fluido. Para isto escolhemos coordenadas retangulares com o plano xy horizontal, sendo o eixo z vertical apontando para cima, com sua origem $z = 0$ na superfície livre do fluido. Com as equações (1.17) e (2.3) obtém-se, com $\vec{g} = -|\vec{g}|\hat{z} = -g\hat{z}$:

$$-dm_g g\hat{z} - \left(\frac{\partial p}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial p}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{z}\right) dV = \vec{0} \ . \tag{4.9}$$

Como $\partial p/\partial x = 0$ e $\partial p/\partial y = 0$, conclui-se que a pressão não depende de x nem de y. Sobra apenas a dependência com z, de tal forma que a derivada parcial pode ser escrita como derivada total:

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{dm_g}{dV}g \equiv -\rho_g g \ , \tag{4.10}$$

onde a densidade de massa gravitacional do fluido, dm_g/dV, foi representada por ρ_g. Representando a pressão na superfície livre do fluido por $p_o = 1 \ atm = 760 \ mm \ Hg = 1 \times 10^5 \ N/m^2$, a equação (4.10) fornece:

$$p(z) = p_o - \rho_g g z \ . \tag{4.11}$$

Conclui-se então que a pressão varia linearmente com a profundidade do líquido.

As superfícies isobáricas (ou seja, com pressões constantes), com $p(z) = p_1 =$ constante, são planos horizontais paralelos à superfície livre do fluido localizados na altura z_1 dada por:

$$z_1 = \frac{p_o - p_1}{\rho_g g} \ . \tag{4.12}$$

Isto completa a solução do problema neste caso.

Capítulo 5

Movimento Retilíneo Uniforme sobre a Terra

Se tivermos uma partícula que está livre de forças externas, ou se for nula a força resultante atuando sobre ela, obteremos a partir da equação (1.4) que será nula a aceleração desta partícula em relação ao espaço absoluto de Newton ou em relação a qualquer referencial inercial que desloca-se com velocidade constante em relação ao espaço absoluto. Ela vai se mover com uma velocidade constante $\vec{v}$ em relação a qualquer referencial inercial, estando isto de acordo com a primeira lei do movimento.

Matematicamente a equação (1.4) leva aos seguintes resultados:

$$\vec{a} = \vec{0} \ , \tag{5.1}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \text{constante} \ , \tag{5.2}$$

e

$$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{v}t \ . \tag{5.3}$$

Aqui $\vec{r}(t)$ é o vetor posição do corpo em relação a um sistema de referência inercial, $\vec{r}_o$ é a posição inicial da partícula e t é o tempo. A velocidade $\vec{v}$ é a velocidade do corpo em relação ao espaço absoluto de Newton ou em relação a um sistema de referência inercial.

Vamos inicialmente considerar a Terra como sendo um referencial inercial. Logo esta velocidade $\vec{v}$ pode ser considerada a velocidade do corpo em relação ao solo.

5.1 Corpo Deslizando em Relação ao Solo enquanto está Preso em uma Mola

Vamos considerar um bloco deslizando na horizontal sobre um trilho de ar, de tal forma que a força de atrito atuando sobre ele seja essencialmente nula, figura 5.1. Além disso, a força gravitacional exercida pela Terra é contrabalançada pela força normal exercida pela mesa sobre o corpo, apontando verticalmente para cima. Neste caso pode-se desprezar a força resultante atuando sobre o corpo, de tal forma que ele se deslocará com uma velocidade essencialmente constante sobre a Terra.

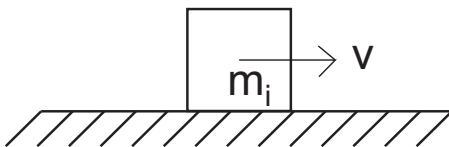



Figura 5.1: Corpo deslocando-se com velocidade constante quando a força resultante sobre ele é nula.

A situação análoga de um corpo celeste movendo-se na Via Láctea afastado de outros corpos é apresentada na figura 5.2.

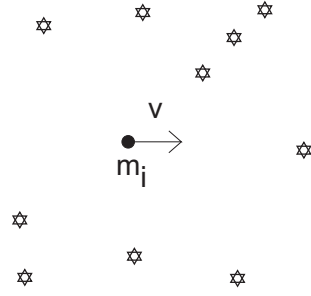



Figura 5.2: Corpo deslocando-se com velocidade constante em relação ao referencial das estrelas fixas.

A situação análoga de um corpo celeste afastado dos outros corpos e movendo-se em relação ao referencial universal das galáxias distantes com uma velocidade constante é apresentada na figura 5.3.

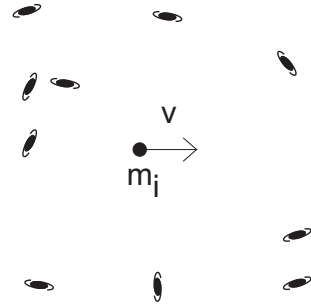



Figura 5.3: Corpo deslocando-se com velocidade constante em relação ao referencial universal das galáxias distantes.

Vemos então que a direção, o sentido e o valor numérico da velocidade vão permanecer constantes no tempo. Este resultado ou esta previsão só faz sentido se soubermos dizer quando (ou em que condições) uma partícula está livre de forças externas, sem utilizar a primeira lei de Newton. Para fazer isto também precisamos encontrar um sistema de referência inercial, sem utilizar a primeira lei de Newton (para evitar de cair em círculos viciosos). Nada disto é simples ou trivial.[1]

Consideramos agora dois corpos com mesma massa inercial m_i apoiados sobre um vagão sem atrito. Os corpos estão presos a duas molas horizontais iguais de comprimento relaxado ℓ_o quando o vagão está em repouso no solo, figura 5.4 (a). Cada corpo está preso em uma única mola.

Aplica-se uma força sobre o vagão até deixá-lo deslocando-se em relação ao solo com uma velocidade constante v. Depois que esta situação foi estabilizada, observa-se que as duas molas continuam relaxadas mantendo o comprimento inicial ℓ_o, figura 5.4 (b). O cilindro representa um corpo externo ao vagão parado em relação ao solo.

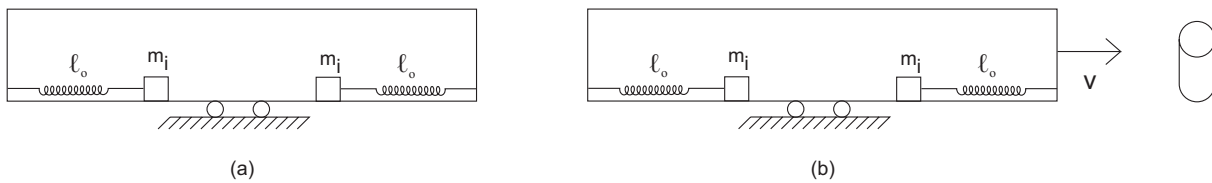



Figura 5.4: (a) Vagão parado no solo. (b) Vagão deslocando-se com velocidade constante em relação ao solo.

[1] [Chi99].

5.2 Corpo Dependurado em um Fio ou Mola enquanto Desliza em Relação ao Solo

Na figura 5.5 temos um corpo de peso P, massa gravitacional m_g e massa inercial m_i preso a um fio ideal de comprimento constante ℓ. A extremidade superior do fio está presa a um vagão. É fornecido um movimento ao vagão fazendo com que ele se desloque em relação ao solo com uma velocidade constante $\vec{v}$. Estamos supondo que o fio está dentro de um vagão fechado, de tal forma que possamos desprezar os efeitos do vento. Observa-se experimentalmente que o fio continua vertical, assim como ocorria no caso em que o fio estava parado em relação ao solo.

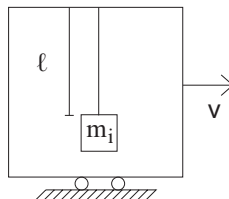



Figura 5.5: Vagão deslocando-se com velocidade constante em relação ao solo, com um corpo dependurado na extremidade inferior do fio preso ao vagão.

Na figura 5.6 temos um corpo de massa inercial m_i preso a uma mola de constante elástica k. O vagão fechado ao qual a mola está presa desloca-se com velocidade constante $\vec{v}$ em relação ao solo. Observa-se que a mola continua vertical, como ocorria quando ela estava parada em relação ao solo. O comprimento final ℓ da mola esticada é dado pela equação (4.1) tanto no caso do vagão parado quanto no caso em que o vagão desloca-se com uma velocidade constante em relação ao solo.

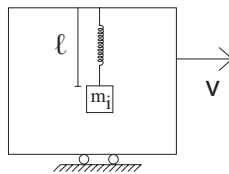



Figura 5.6: Mola deslocando-se com velocidade constante em relação ao solo, com um corpo dependurado em sua extremidade inferior.

5.3 Recipiente Deslizando sobre o Solo, com um Fluido em seu Interior

Na figura 5.7 temos um recipiente deslizando em relação ao solo com velocidade constante, com um fluido em seu interior. Observa-se que a superfície do fluido continua horizontal, como ocorria quando o recipiente estava parado em relação à Terra. Isto é facilmente observado nas viagens transatlânticas de avião. O avião pode estar viajando a 700 km/h em relação ao solo que a água continua plana em um copo sobre a mesinha do passageiro.

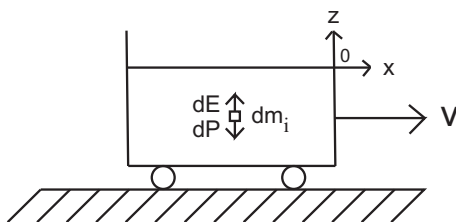



Figura 5.7: Recipiente deslizando com velocidade constante em relação ao solo, com um fluido em seu interior.

É fácil resolver este problema com a mecânica newtoniana utilizando o mesmo procedimento adotado na Seção 4.3. Conclui-se que novamente a pressão no fluido varia linearmente com a profundidade de acordo

com a equação (4.11). As superfícies isobáricas são mais uma vez planos horizontais paralelos à superfície livre do fluido. Ou seja, estes aspectos são os mesmos que ocorrem quando o recipiente está parado na Terra.

Capítulo 6

Movimento Retilíneo com Aceleração Constante sobre a Terra

Podemos integrar facilmente a equação (1.4) quando atua uma força constante $\vec{F}$ sobre um corpo de massa inercial m_i. Este corpo sofre então uma aceleração $\vec{a}$ constante em relação a um referencial inercial, com esta aceleração dada por:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}}{m_i} = \text{constante} \ . \tag{6.1}$$

Sua velocidade $\vec{v}$ e sua posição $\vec{r}$ em função do tempo são dadas por:

$$\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{a}t \ , \tag{6.2}$$

e

$$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{v}_o t + \frac{\vec{a}t^2}{2} \ . \tag{6.3}$$

Aqui $\vec{v}_o$ é a velocidade inicial e $\vec{r}_o$ é a posição inicial da partícula. Nestas equações o vetor posição $\vec{r}$, a velocidade $\vec{v}$ e a aceleração $\vec{a}$ são relativas ao corpo de prova, medidas em relação a um referencial inercial.

Vamos inicialmente supor que a Terra é um bom referencial inercial para descrever o movimento dos corpos em sua superfície.

6.1 As Experiências de Queda Livre de Galileu

6.1.1 Um Corpo em Queda Livre Cai com uma Aceleração Constante em Direção ao Solo

Galileu Galilei (1564-1642) foi o primeiro a concluir que os corpos caem com acelerações constantes nas proximidades da Terra quando se desprezam as resistências do meio. Alguns de seus principais resultados obtidos em mecânica surgiram no período entre 1600 e 1610. Mas ele só publicou a descrição de suas experiências em seu livro *Duas Novas Ciências*, de 1638. Ele definiu o movimento uniformemente acelerado da seguinte maneira:[1]

> Chamo movimento igualmente, ou o que é o mesmo, uniformemente acelerado, àquele que, partindo do repouso, adquire em tempos iguais, momentos (momenta) iguais de velocidade.

Seja v_i a velocidade do corpo no instante t_i. Caso $v_4 - v_3 = v_2 - v_1$ quando $t_4 - t_3 = t_2 - t_1$, quaisquer que sejam estes tempos, então define-se que o movimento é uniformemente acelerado. Outra maneira de dizer isto é que em um movimento uniformemente acelerado as velocidades adquiridas em quaisquer tempos estão entre si como estes tempos transcorridos, ou seja:

[1] [Gal85, pág. 127].

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{t_1}{t_2} \ . \tag{6.4}$$

Galileu provou em seguida o seguinte teorema:[2]

> Teorema 2 - proposição 2
>
> Se um móvel, partindo do repouso, cai com um movimento uniformemente acelerado, os espaços por ele percorridos em qualquer tempo estão entre si na razão dupla dos tempos, a saber, como os quadrados desses mesmos tempos.

Algebricamente isto pode ser expresso da seguinte maneira. Seja d_1 o espaço percorrido no tempo t_1 e d_2 o espaço percorrido no tempo t_2, logo:

$$\frac{d_1}{d_2} = \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^2 \ . \tag{6.5}$$

Esta definição e este teorema são resultados teóricos. Para saber se a natureza se comporta desta maneira, Galileu realizou experiências com esferas descendo por planos inclinados. Seus resultados foram os seguintes:[3]

> Pelo que se refere às experiências, o autor não deixou de fazê-las; e para assegurar-se de que a aceleração dos graves, que caem de modo natural, acontece na proporção acima afirmada, encontrei-me muitas vezes em sua companhia procurando tal prova da seguinte maneira.
>
> Numa ripa, ou melhor dito, numa viga de madeira com um comprimento aproximado de 12 braças, uma largura de meia braça num lado e três dedos no outro, foi escavada uma canaleta neste lado menos largo com pouco mais que um dedo de largura. No interior desta canaleta perfeitamente retilínea, para ficar bem polida e limpa, foi colada uma folha de pergaminho que era polida até ficar bem lisa; fazíamos descer por ela uma bola de bronze duríssima perfeitamente redonda e lisa. Uma vez construído o mencionado aparelho, ele era colocado numa posição inclinada, elevando sobre o horizonte uma de suas extremidades até a altura de uma ou duas braças, e se deixava descer (como afirmei) a bola pela canaleta, anotando como exporei mais adiante o tempo que empregava para uma descida completa; repetindo a mesma experiência muitas vezes para determinar exatamente a quantidade de tempo, na qual nunca encontrava uma diferença nem mesmo da décima parte de uma batida de pulso. Feita e estabelecida com precisão tal operação, fizemos descer a mesma bola apenas por uma quarta parte do comprimento total da canaleta; e, medido o tempo de queda, resultava ser sempre rigorosamente igual à metade do outro. Variando a seguir a experiência, e comparando o tempo requerido para percorrer todo o comprimento com o tempo requerido para percorrer a metade, ou os dois terços, ou os três quartos, ou para concluir qualquer outra fração, através de experiências repetidas mais de cem vezes, sempre se encontrava que os espaços percorridos estavam entre si como os quadrados dos tempos e isso em todas as inclinações do plano, ou seja, da canaleta, pela qual se fazia descer a bola. Observamos também que os tempos de queda para as diferentes inclinações do plano mantinham exatamente entre si aquela proporção que, como veremos mais adiante, foi encontrada e demonstrada pelo autor. No que diz respeito à medida do tempo, empregávamos um grande recipiente cheio de água, suspenso no alto, o qual através de um pequeno orifício feito no fundo, deixava cair um fino fio de água, que era recolhido num pequeno copo durante todo o tempo em que a bola descia pela canaleta ou por suas partes. As quantidades de água assim recolhidas eram a cada vez pesadas com uma balança muito precisa, sendo as diferenças e proporções entre os pesos correspondentes às diferenças e proporções entre os tempos; e isto com tal precisão que, como afirmei, estas operações, muitas vezes repetidas, nunca diferiam de maneira significativa.

Seja um plano inclinado de comprimento ℓ, altura h e inclinação θ em relação à horizontal, figura 6.1. Galileu usou $\ell = 12$ braças e $h = 1$ ou 2 braças. Quando $h = 1$ braça, o ângulo de inclinação era de $\theta_1 = 4,78^o \approx 5^o$, enquanto que quando $h = 2$ braças, $\theta_2 = 9,59^o \approx 10^o$.

[2][Gal85, pág. 136].
[3][Gal85, págs. 140-141].

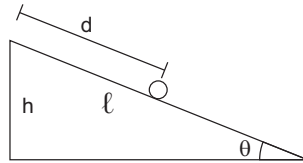



Figura 6.1: Esfera rolando por um plano inclinado.

O resultado obtido por Galileu com estas experiências estava de acordo com a equação (6.5). Isto mostrou que, de fato, a queda de uma esfera por um plano inclinado é um exemplo de um movimento uniformemente acelerado.

Galileu considerou também planos de mesma altura com diferentes inclinações. Sejam dois planos inclinados de mesma altura h. Seja ℓ_1 o comprimento do plano inclinado de um ângulo θ_1 com a horizontal e ℓ_2 o comprimento do plano inclinado de um ângulo θ_2, como na figura 6.2.

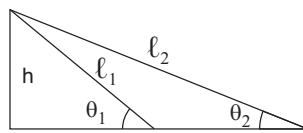



Figura 6.2: Planos de mesma altura com inclinações diferentes.

Galileu provou o seguinte resultado:[4]

> Teorema 3 - Proposição 3
>
> Se sobre um plano inclinado ou segundo uma vertical, tendo ambos a mesma altura, um móvel se movimenta a partir do repouso, os tempos do movimento estarão entre si na mesma proporção dos comprimentos do plano inclinado e da vertical.
>
> [...]
>
> Corolário
>
> Do que foi dito pode-se concluir que os tempos empregados para descer por planos diversamente inclinados, desde que tenham a mesma altura, estão entre si como seus respectivos comprimentos.

Sejam t_1 e t_2 os intervalos de tempo para um corpo percorrer os comprimento ℓ_1 e ℓ_2 da figura 6.2, respectivamente. O resultado de Galileu pode ser expresso como:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\ell_1}{\ell_2} \ . \tag{6.6}$$

Galileu considerou também planos de mesmo comprimento com alturas diferentes. Sejam dois planos inclinados de mesmo comprimento ℓ. Seja h_1 a altura do plano inclinado de um ângulo θ_1 com a horizontal e h_2 a altura do plano inclinado de um ângulo θ_2, como na figura 6.3.

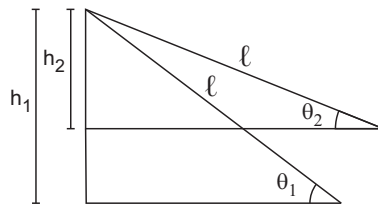



Figura 6.3: Planos de mesmo comprimento com alturas diferentes.

Galileu provou o seguinte resultado:[5]

[4] [Gal85, pág. 146].
[5] [Gal85, pág. 147].

> Teorema 4 - Proposição 4
>
> Os tempos de descida por planos de mesmo comprimento, mas de diferentes inclinações, estão entre si na proporção inversa das raízes quadradas de suas respectivas alturas.

Sejam t_1 e t_2 os intervalos de tempo para um corpo percorrer o mesmo comprimento ℓ em dois planos de alturas h_1 e h_2 da figura 6.3, respectivamente. O resultado de Galileu pode ser expresso como:

$$\frac{t_1}{t_2} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} \ . \tag{6.7}$$

Galileu generalizou ainda estes resultados para os casos de planos com inclinações, comprimentos e alturas diferentes. Em cada um destes casos Galileu obteve experimentalmente que corpos rolando ao longo de planos inclinados caem com acelerações constantes em relação ao solo:

$$\vec{a} = \text{constante} \ . \tag{6.8}$$

O valor desta aceleração dependia da inclinação θ do plano em relação à horizontal. Mas dada uma inclinação constante, Galileu observou que o corpo descia com uma aceleração constante. Um caso particular é o de queda livre, quando $\theta = 90^o$, de tal forma que o plano inclinado deixa de influenciar na queda do corpo.

6.1.2 A Aceleração Não Depende do Peso do Corpo

A partir de suas experiências com planos inclinados, Galileu concluiu que um corpo em queda livre cai com uma aceleração constante. Mas o valor desta aceleração poderia depender do peso do corpo. Com outras experiências Galileu também foi o primeiro a concluir que este não era o caso. Ou seja, dois corpos de mesma natureza caem no vácuo com a mesma aceleração, independente de seus pesos. Em uma de suas experiências comparou os tempos de queda de duas bolas de ferro caindo a partir do repouso no ar de uma altura de cem braças, uma bola com cem libras e outra com uma libra. Embora uma bola fosse 100 vezes mais pesada que a outra, seus tempos de queda eram praticamente os mesmos:[6]

> Constata-se, fazendo a experiência, que a maior precede a menor em dois dedos, ou seja, que no momento em que a maior chega ao solo, a outra está a uma distância de dois dedos.

Galileu atribuiu corretamente esta pequena diferença de tempo ao atrito do ar. Combinando este resultado com a equação (6.8) conclui-se que Galileu obteve o seguinte resultado na queda livre:

$$\vec{a} = \text{constante qualquer que seja o peso do corpo} \ . \tag{6.9}$$

6.1.3 A Aceleração Não Depende da Densidade nem da Composição Química do Corpo

Galileu foi também o primeiro a descobrir outro aspecto muito importante na queda livre, a saber, que esta aceleração constante é a mesma para todos os corpos, não importando suas composições químicas. Este aspecto é altamente não trivial. Galileu comparou os tempos de queda de corpos com densidades diferentes caindo em meios que também possuem densidades diferentes. Observou que quanto maior fosse a diferença de densidade dos meios, para um mesmo par de corpos com densidades diferentes, maior era a diferença entre as velocidades de queda livre adquiridas por estes corpos ao serem soltos de uma mesma altura. Em uma de suas experiências ele afirmou o seguinte:[7]

> Tendo em vista que a diferença de velocidade nos móveis de pesos específicos diferentes é cada vez maior em meios cada vez mais resistentes, o que mais podemos dizer? Na prata encandescente o ouro não apenas desce ao fundo mais velozmente que o chumbo, mas é o único a descer, ao passo que os outros metais e pedras sobem à superfície e flutuam, enquanto que no ar as bolas de ouro, de chumbo, de cobre, de pórfido ou de outras substâncias pesadas terão uma diferença de velocidade quase insensível, posto que certamente uma bola de ouro ao final de uma queda de cem braças não precederá em quatro dedos uma bola de cobre. Tendo constatado isso, cheguei

[6] [Gal85, pág. 57].
[7] [Gal85, pág. 62].

> à conclusão de que eliminando completamente a resistência do meio, todos os corpos desceriam com a mesma velocidade.

Fez esta descoberta adicional não apenas através de suas experiências com planos inclinados, mas também através das medidas dos períodos de oscilação de pêndulos simples.

Os resultados experimentais de Galileu sobre a queda livre podem então ser expressos da seguinte maneira:

$$\vec{a} = \text{constante qualquer que seja o peso, a forma ou a natureza do corpo} \ . \tag{6.10}$$

Ou seja, qualquer que seja a composição química do corpo, todos os objetos caem com a mesma aceleração no vácuo.

A igualdade da aceleração de queda livre de dois corpos é válida independente do peso, forma, temperatura ou composição química destes corpos. Ou seja, não apenas um corpo de chumbo com massa de 3 kg cai com a mesma aceleração que um outro corpo de chumbo com massa de 1 kg, mas também com a mesma aceleração que um bloco de madeira com massa de 200 g. Este é um dos resultados mais importantes e misteriosos da mecânica clássica.

Esta igualdade das acelerações de queda livre está representada na figura 6.4.

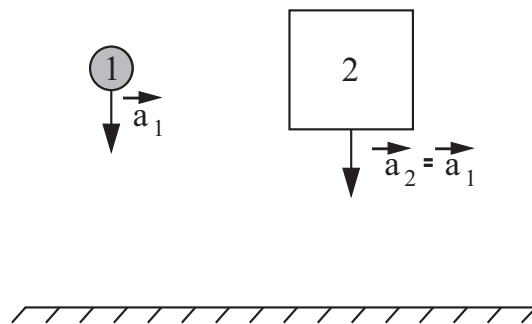



Figura 6.4: Dois corpos caem com a mesma aceleração no vácuo, quaisquer que sejam seus pesos, formas ou composições químicas.

6.1.4 Newton e a Igualdade entre os Tempos de Queda Livre de Corpos Diferentes Soltos da Mesma Altura

Otto von Guericke (1602-1686) inventou a bomba de vácuo no início da década de 1650. Robert Boyle (1627-1691) solicitou que seu assistente, Robert Hooke, construísse uma máquina similar à de Guericke. Com sua bomba de vácuo, Boyle verificou em 1669 que uma pena cai no vácuo em linha reta, da mesma forma que os corpos densos caem no ar. Outros pesquisadores mostraram também que uma pena e uma moeda caem juntas no vácuo ao serem soltas em repouso da mesma altura, levando o mesmo tempo para percorrer alturas iguais.

O fato de que no vácuo todos os corpos caem juntos de alturas iguais em tempos iguais foi expresso por Newton na Proposição 6, Teorema 6, do Livro III do *Principia* como segue:[8]

> Tem sido observado por outros por um longo tempo que todos os tipos de corpos pesados (levando em conta a desigualdade de retardação que eles sofrem devido a um pequeno poder de resistência no ar) descem para a Terra *de alturas iguais* em tempos iguais.

Já na Proposição 10, Teorema 10, do Livro III do *Principia*, Newton afirmou o seguinte:[9]

> Nos espaços próximos da Terra a resistência é produzida apenas pelo ar, exalações e vapores. Quando estes são cuidadosamente extraídos pela bomba de ar sob o recipiente, corpos pesados caem dentro do recipiente com a maior liberdade e sem a menor resistência perceptível. O próprio ouro e a mais leve pena, soltos juntos, irão descer com igual velocidade. Embora eles caiam através de um espaço de quatro, seis e oito pés, chegam ao fundo no mesmo tempo, como decorre das experiências.

[8] [New08b, pág. 200].
[9] [New08b, pág. 208].

No Escólio Geral ao final do *Principia* ele voltou a este ponto:[10]

> Os corpos lançados em nosso ar sofrem resistência apenas do ar. Retire o ar, como é feito no vácuo do Sr. Boyle, e cessa a resistência; pois neste vazio uma pena e um pedaço de ouro sólido caem com igual velocidade.

No seu livro *Óptica*, Newton afirmou o seguinte:[11]

> [...] O ar livre que respiramos é oitocentas ou novecentas vezes mais leve do que a água, e portanto oitocentas ou novecentas vezes mais rarefeito, e por isso sua resistência é menor do que a da água na mesma proporção, ou aproximadamente, como também verifiquei por experiências feitas com pêndulos. E no ar mais rarefeito a resistência é ainda menor, até que, rarefazendo o ar, ela se torna imperceptível. Pois pequenas penas caindo ao ar livre encontram grande resistência, mas num vidro alto bem esvaziado de ar elas caem tão rápido quanto o chumbo ou o ouro, como me foi dado comprovar diversas vezes.

6.1.5 O Valor da Aceleração de Queda Livre

Embora Galileu tenha sido o primeiro a mostrar que dois corpos caem com a mesma aceleração constante em relação à Terra quando se desprezam as resistências devidas ao ar, ele não chegou a obter um valor preciso para esta aceleração. Os primeiros a obter o valor preciso correspondente a uma aceleração de $9,8\ m/s^2$, embora sem expressar seus resultados nestas unidades, foram Huygens (1629-1695) e Newton, a partir de experiências com pêndulos. Os principais trabalhos de Huygens com relógios de pêndulo ocorreram entre 1650 e 1670. Sua obra principal sobre o tema, o livro *Horologium Oscillatorum* [O Relógio de Pêndulo], foi publicada em 1673, antes da publicação do *Principia* de Newton em 1687. Este livro de Huygens já encontra-se traduzido para as línguas francesa, alemã e inglesa. É neste livro que aparece pela primeira vez o valor moderno e preciso da aceleração de queda livre de um corpo próximo à superfície terrestre.[12]

6.2 Queda Livre na Mecânica Newtoniana

6.2.1 Resultados Obtidos a partir das Leis de Newton

Vamos analisar o problema de queda livre com a mecânica de Newton, figura 6.5.

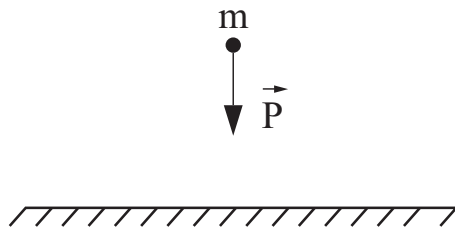



Figura 6.5: Queda livre.

A única força atuando sobre o corpo de prova é a atração gravitacional da Terra, ou seja, seu peso $\vec{P}$. Se o corpo está caindo de uma altura de 10 metros, podemos supor que a força exercida pela Terra sobre ele é essencialmente constante durante esta queda, como visto na Seção 4.2. O motivo para podermos desprezar a variação da força gravitacional durante a queda é que esta distância de $10\ m$ é desprezível comparada com o raio médio da Terra de $6,37 \times 10^6\ m$. Ou seja, durante a queda podemos colocar que a força exercida pela Terra sobre o corpo de massa gravitacional m_g é dada aproximadamente por:

$$\vec{P} = -G\frac{M_{gT}m_g}{R_T^2}\hat{r} = m_g\vec{g}(R_T) \ , \tag{6.11}$$

onde

[10][New08b, págs. 327-328].
[11][New96, Questão 28, págs. 268-269].
[12][Huy13, págs. 180-186 e 264 Nota 175], [Huy34, págs. 348-359], [Huy86, págs. xiii-xiv, xviii-xix e 167-172] e [Bar89, págs. 454 e 528-530].

$$\vec{g}(R_T) = -G\frac{M_{gT}}{R_T^2}\hat{r} \ . \tag{6.12}$$

Com a equação (1.4) obtemos que a aceleração de queda livre vai ser uma constante dada por:

$$\vec{a} = \frac{\vec{P}}{m_i} = -\frac{m_g}{m_i}\frac{GM_{gT}}{R_T^2}\hat{r} = \frac{m_g}{m_i}\vec{g}(R_T) = \text{constante} \ . \tag{6.13}$$

Desta equação (6.13) obtida pela mecânica newtoniana conclui-se então que a aceleração de queda livre é uma constante para cada corpo. Isto está de acordo com o resultado experimental de Galileu dado pela equação (6.8).

6.2.2 A Proporcionalidade entre o Peso e a Massa Inercial a partir das Experiências de Queda Livre

O valor de $\vec{g}$ dado pela equação (6.12) depende apenas da massa gravitacional M_{gT} da Terra e da localização do corpo de prova, mas não depende de m_g nem de m_i. Ou seja, $\vec{g}$ não depende da massa gravitacional do corpo que está sendo acelerado em direção à Terra, assim como não depende de sua massa inercial.

Vamos supor que temos uma moeda de chumbo de peso $P_c = |\vec{P}_c|$, massa gravitacional m_{gc} e massa inercial m_{ic} caindo livremente com aceleração constante $a_c = |\vec{a}_c|$ em direção à Terra. Já uma pena de peso $P_p = |\vec{P}_p|$, massa gravitacional m_{gp} e massa inercial m_{ip} vai cair no vácuo em direção à Terra com uma aceleração constante dada por $a_p = |\vec{a}_p|$. De acordo com a equação (6.13), a razão destas duas acelerações é dada por:

$$\frac{a_c}{a_p} = \frac{P_c/m_{ic}}{P_p/m_{ip}} = \frac{m_{gc}/m_{ic}}{m_{gp}/m_{ip}} \ . \tag{6.14}$$

Utilizando apenas a mecânica newtoniana, não se pode prever o valor desta razão entre as acelerações de queda livre do chumbo e da pena.

Vamos agora utilizar o resultado de Galileu de que todos os corpos caem no vácuo em direção à Terra com a mesma aceleração, quaisquer que sejam seus pesos, formas e composições químicas, equação (6.10). Aplicando este resultado experimental na equação (6.14), obtida com a mecânica newtoniana, chega-se ao seguinte resultado:

$$\frac{a_c}{a_p} = \frac{P_c/m_{ic}}{P_p/m_{ip}} = \frac{m_{gc}/m_{ic}}{m_{gp}/m_{ip}} = 1 \ . \tag{6.15}$$

A equação (6.15) pode ser expressa de duas formas diferentes:

$$\frac{P_c}{m_{ic}} = \frac{P_p}{m_{ip}} \ , \tag{6.16}$$

ou

$$\frac{m_{gc}}{m_{ic}} = \frac{m_{gp}}{m_{ip}} \ . \tag{6.17}$$

As equações (6.16) e (6.17) são válidas não apenas para o chumbo (c) e a pena (p), mas também para qualquer outro corpo de peso P, massa gravitacional m_g e massa inercial m_i, não importando seu peso, formato ou composição química. A equação (6.16) pode então ser expressa como:

$$\frac{P_c}{m_{ic}} = \frac{P_p}{m_{ip}} = \frac{P}{m_i} = \text{constante para todos os corpos} \ . \tag{6.18}$$

Outra maneira de expressar as equações (6.17) e (6.18) é colocando que a razão entre as massas inerciais de dois corpos 1 e 2 é igual à razão entre seus pesos, ou à razão entre suas massas gravitacionais, isto é:

$$\frac{m_{i1}}{m_{i2}} = \frac{P_1}{P_2} = \frac{m_{g1}}{m_{g2}} \ . \tag{6.19}$$

Como já mencionado na Seção 1.2, as equações (6.18) e (6.19), obtidas da mecânica newtoniana quando combinadas com a conclusão experimental de Galileu de que todos os corpos caem no vácuo com a mesma

aceleração, foram apresentadas por Newton de outra maneira equivalente, quando disse que a massa de um corpo é conhecida através do peso do corpo, pois a massa é proporcional ao peso.[13] Ou seja, se o corpo 1 é cinco vezes mais pesado do que o corpo 2, como determinado por uma balança, então necessariamente a massa inercial do corpo 1 é cinco vezes a massa inercial do corpo 2, não interessando suas composições químicas.

No Sistema Internacional de Unidades define-se que a razão da massa gravitacional m_g de um corpo qualquer para sua massa inercial m_i tem o valor unitário adimensional. Isto significa que a equação (6.17) pode ser escrita como:

$$\frac{m_{gc}}{m_{ic}} = \frac{m_{gp}}{m_{ip}} = \frac{m_g}{m_i} = \text{constante para todos os corpos} \equiv 1 \ . \tag{6.20}$$

Esta equação significa que a proporcionalidade entre a massa inercial e o peso de um corpo, como expressa por Newton, também pode ser colocada em outras palavras dizendo que a massa inercial de um corpo é conhecida através da massa gravitacional deste corpo, pois a massa inercial é proporcional à massa gravitacional.

A massa inercial de qualquer corpo fica então igual à sua massa gravitacional, com estas duas grandezas tendo a mesma unidade, o quilograma, representado por kg:

$$m_g = m_i \equiv m \ . \tag{6.21}$$

Isto significa que é possível utilizar uma única grandeza para indicar tanto a massa inercial do corpo quanto sua massa gravitacional, podendo esta grandeza ser chamada simplesmente de *massa*, representada aqui por m.

No caso de dois corpos 1 e 2 caindo no vácuo na mesma localização próxima da superfície terrestre, vem da experiência que o valor desta aceleração é dado por:

$$a_1 = a_2 = 9,8 \ \frac{m}{s^2} \ . \tag{6.22}$$

O valor exato desta aceleração depende da latitude, como visto na Seção 1.4. Nos polos ela vale $9,83 \ m/s^2$, na latitude de 50^o ela vale $9,81 \ m/s^2$, enquanto que no equador ela vale $9,78 \ m/s^2$, sempre considerando que estamos ao nível do mar.

Vamos supor uma situação hipotética na qual Galileu tivesse encontrado que nas quedas livres todos os corpos caíssem em direção à Terra com acelerações constantes, mas na qual estas acelerações pudessem ter valores diferentes para corpos distintos. Por exemplo, um pedaço de ouro mais pesado poderia cair com uma aceleração maior do que a aceleração de um outro pedaço mais leve de ouro. Um peso de ouro poderia cair livremente em direção ao solo com uma aceleração diferente daquela adquirida por um mesmo peso de prata. Mesmo nesta situação hipotética toda a estrutura da mecânica newtoniana poderia permanecer a mesma. Mas agora o peso de um corpo não mais seria proporcional à sua massa inercial. A razão da massa gravitacional para a massa inercial poderia mudar de um corpo para outro. A mecânica ficaria mais complicada. Nesta situação hipotética seria necessário considerar a massa gravitacional e a massa inercial como conceitos distintos, que teriam de ser medidos de maneira independente, já que não haveria relação entre eles. Apesar deste fato, a essência da mecânica newtoniana ainda permaneceria a mesma.

Esta situação hipotética seria equivalente ao que acontece hoje em dia com os conceitos de carga elétrica e massa inercial. É possível aumentar a eletrização de um corpo sem afetar sua massa inercial. Além disso, dois corpos com a mesma carga elétrica não precisam ter a mesma massa inercial. Não há relação entre a carga elétrica de um corpo e sua massa inercial.

O que queremos enfatizar aqui, é que a proporcionalidade entre o peso e a massa inercial não é uma consequência necessária da mecânica newtoniana, não podendo ser deduzida de seus postulados ou axiomas. Este é um dado empírico adicional que tem de ser acrescentado à formulação de Newton.

6.2.3 Movimento de Atração entre Dois Corpos no Referencial das Estrelas Fixas

Na Subseção 6.2.1 analisamos apenas a aceleração de queda livre do corpo em relação à Terra, desprezando o movimento da Terra.

[13][New90, pág. 1].

Uma situação mais geral que pode ser resolvida é a atração gravitacional entre dois corpos, tais como a Terra e a maçã, levando em conta a aceleração de ambos em relação ao espaço absoluto. Vamos considerar aqui o referencial F das estrelas fixas como sendo um bom referencial inercial. Vamos chamar estes corpos de 1 e 2. O corpo 1 exerce uma força sobre o corpo 2, acelerando-o em relação ao referencial F. Pela terceira lei de Newton, 2 exerce uma força igual e oposta sobre 1, acelerando-o no referencial F. A massa inercial de 1 será representada por m_{i1}, enquanto sua massa gravitacional será representada por m_{g1}. Já a massa inercial de 2 será representada por m_{i2}, enquanto sua massa gravitacional será representada por m_{g2}. Vamos tratar estes dois corpos como partículas localizadas em seus centros de massa.

De acordo com as equações (3.16) e (3.30), a energia total E_t deste sistema é dada por:

$$E_t \equiv -G\frac{m_{g1}m_{g2}}{r_{12}} + m_{i1}\frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1}{2} + m_{i2}\frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2}{2} \ . \tag{6.23}$$

Nesta equação as velocidades são consideradas em relação ao referencial inercial das estrelas fixas, sendo r_{12} a distância entre 1 e 2.

É fácil ver que a energia total E_t é constante ao derivar a equação (6.23) em função do tempo. Usando ainda as equações (1.4), (1.7) e (2.28) obtém-se, com $\vec{v}_{12} \equiv \vec{v}_1 - \vec{v}_2$:

$$\frac{dE_t}{dt} = G\frac{m_{g1}m_{g2}}{r_{12}^2}\dot{r}_{12} + \vec{v}_1 \cdot m_{i1}\vec{a}_1 + \vec{v}_2 \cdot m_{i2}\vec{a}_2 = G\frac{m_{g1}m_{g2}}{r_{12}^2}\hat{r}_{12} \cdot \vec{v}_{12} - \vec{v}_{12} \cdot \left(G\frac{m_{g1}m_{g2}}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}\right) = 0 \ . \tag{6.24}$$

Ou seja, a energia total E_t tem sempre o mesmo valor ao longo do tempo, não interessando os valores de r_{12}, $\vec{v}_1$ ou $\vec{v}_2$:

$$E_t \equiv -G\frac{m_{g1}m_{g2}}{r_{12}} + m_{i1}\frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1}{2} + m_{i2}\frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2}{2} = \text{constante no tempo} \ . \tag{6.25}$$

Já a força $\vec{F}_{21}$ exercida por 2 sobre 1 é dada pela equação (1.7):

$$\vec{F}_{21} = -G\frac{m_{g1}m_{g2}}{r_{12}^2}\hat{r}_{12} = -\vec{F}_{12} \ , \tag{6.26}$$

onde $\hat{r}_{12} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)/r_{12}$ é o vetor unitário apontando de 2 para 1, enquanto que $\vec{F}_{12}$ é a força de 1 em 2.

Combinando a equação (6.26) com a segunda lei de Newton, equação (1.4), e usando que $\hat{r}_{21} = -\hat{r}_{12}$, as equações de movimento para as partículas 1 e 2 ficam dadas por, respectivamente:

$$\vec{F}_{21} = G\frac{m_{g1}m_{g2}}{r_{12}^2}\hat{r}_{21} = m_{i1}\vec{a}_1 \ , \tag{6.27}$$

e

$$\vec{F}_{12} = -G\frac{m_{g1}m_{g2}}{r_{12}^2}\hat{r}_{21} = m_{i2}\vec{a}_2 \ . \tag{6.28}$$

A lei de Newton da gravitação, equação (6.26), satisfaz ao princípio de ação e reação na forma forte. De acordo com as equações (3.4) e (3.10), isto significa que também o momento linear total $\vec{p}_t$ e o momento angular total $\vec{L}_t$ são constantes no tempo. Supondo que as partículas partam do repouso, $\vec{v}_1(t=0) = \vec{v}_2(t=0) = \vec{0}$, o momento linear total será sempre nulo, o mesmo acontecendo com o momento angular total. Vamos supor ainda o centro de massa do sistema na origem do sistema de coordenadas das estrelas fixas, $\vec{r}_{cm} = \vec{0}$, sendo $\vec{r}_{cm}$ definido pela equação (3.11). Com isto obtém-se:

$$\vec{r}_{cm} = m_{i1}\vec{r}_1 + m_{i2}\vec{r}_2 = \vec{0} \ , \tag{6.29}$$

e

$$\vec{r}_2 = -\frac{m_{i1}}{m_{i2}}\vec{r}_1 \ , \quad \vec{v}_2 = -\frac{m_{i1}}{m_{i2}}\vec{v}_1 \ , \quad \vec{a}_2 = -\frac{m_{i1}}{m_{i2}}\vec{a}_1 \ . \tag{6.30}$$

Esta situação está representada na figura 6.6.

Usando ainda a igualdade entre as massas inerciais e gravitacionais no Sistema Internacional de Unidades, equação (6.21), juntamente com as equações (1.4) e (6.26), obtém-se, com $r_1 \equiv |\vec{r}_1|$ e $r_2 \equiv |\vec{r}_2|$:

$$\vec{a}_2 = -G\frac{m_{g1}}{(r_1 + r_2)^2}\hat{r}_{21} = -\frac{m_{i1}}{m_{i2}}\vec{a}_1 \ . \tag{6.31}$$

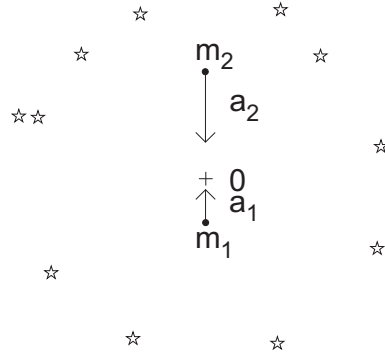



Figura 6.6: Duas massas interagindo no referencial das estrelas fixas.

Se, por exemplo, $m_1 = 3m_2$, então $\vec{a}_2 = -3\vec{a}_1$. Por outro lado, se $m_1 \gg m_2$, teremos $r_1 \ll r_2$, $|\vec{v}_1| \ll |\vec{v}_2|$ e $|\vec{a}_1| \ll |\vec{a}_2|$. Por exemplo, vamos supor uma maçã com uma massa $m_{i2} = 100\ g = 0,1\ kg$ interagindo com a Terra, cuja massa é dada por $m_{i1} = 6 \times 10^{24}\ kg$. Vamos usar ainda que a aceleração de queda livre da maçã é dada por $|\vec{a}_2| = 9,8\ m/s^2$. Neste caso obtém-se pela equação (6.30) que a aceleração da Terra em relação ao referencial das estrelas fixas é dada por: $|\vec{a}_1| = 1,666 \times 10^{-26}|\vec{a}_2| = 1,6 \times 10^{-25}\ m/s^2$, totalmente desprezível. Ou seja, se a massa de 1 for muito maior do que a massa de 2, é possível desprezar a aceleração do corpo 1 comparada com a aceleração do corpo 2. Mas não se deve esquecer que os dois corpos estarão acelerados em relação a um referencial inercial. A conservação do momento linear ocorre neste referencial inercial.

6.3 Carga Elétrica no Interior de um Capacitor Ideal

6.3.1 Força Eletrostática por Unidade de Carga

Apresentamos agora um outro exemplo de força constante.

Um capacitor plano ideal é representado na figura 6.7. Neste capacitor ideal temos duas placas planas, quadradas, de lado L separadas por uma pequena distância d, onde $d \ll L$. Escolhe-se um sistema de coordenadas cartesiano parado em relação a estas placas, com o eixo z sendo normal às placas, com sua origem no centro delas e apontando da placa negativa para a positiva, sendo este o sentido para o qual aponta o vetor unitário $\hat{z}$. As placas situadas em $z = z_o$ e em $z = -z_o$ estão uniformemente carregadas com cargas totais Q e $-Q$, respectivamente. Na placa positiva temos uma densidade superficial de carga constante dada por $\sigma_+ \equiv \sigma \equiv Q/L^2$. Já na placa negativa temos uma densidade superficial de carga σ_- que é oposta à densidade da placa positiva: $\sigma_- = -\sigma$. Considera-se ainda que estas cargas estão fixas sobre o capacitor ideal, não sendo afetadas por outras cargas (ou seja, supõe-se que as placas deste capacitor ideal são feitas de materiais isolantes uniformemente carregados).

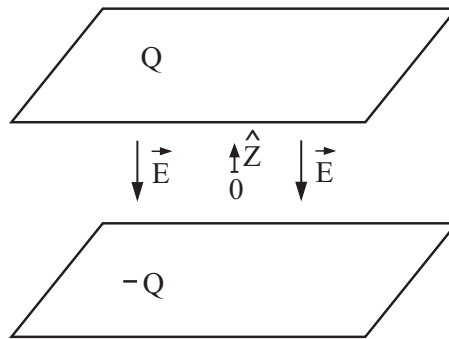



Figura 6.7: Capacitor plano ideal parado em relação ao solo.

Ao integrarmos a força exercida pelo capacitor atuando sobre uma partícula carregada em seu interior utilizando a força eletrostática, equação (2.12), e desprezando os efeitos de borda, obtemos o resultado bem conhecido dado por:

$$\vec{F} = -q\frac{\sigma\hat{z}}{\varepsilon_o} \equiv q\vec{E} \ , \tag{6.32}$$

onde $\vec{E}$ é a força eletrostática por unidade de carga definida por:

$$\vec{E} \equiv \frac{\vec{F}}{q} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_o}\hat{z} \ . \tag{6.33}$$

Esta força é constante na região entre as placas, não havendo força para uma carga do lado de fora do capacitor, de acordo com a integração da equação (2.12).

Pode-se utilizar as equações (2.32) e (2.36) para calcular o campo elétrico no interior deste capacitor. O resultado coincide com a equação (6.33). Com a força eletromagnética dada pela equação (2.43), obtém-se que a força atuando em uma carga teste no interior do capacitor é dada pela equação (6.32).

Na eletrodinâmica clássica (equações de Maxwell juntamente com a força eletromagnética atuando sobre uma carga) obtém-se que esta é a força total exercida pelo capacitor em qualquer carga interna a ele, não interessando sua posição, velocidade ou aceleração em relação às placas, supondo cargas fixas sobre as placas do capacitor. Isto pode ser obtido supondo um capacitor feito de placas dielétricas carregadas (havendo vácuo entre as placas) que não permitem um movimento livre das cargas sobre a superfície das placas. Neste caso o capacitor gera apenas um campo elétrico constante no interior das placas e nenhum campo magnético.

Na eletrodinâmica de Weber vão existir ainda componentes da força que dependem da velocidade e da aceleração da carga teste em relação às placas do capacitor. Vamos supor que a carga q esteja localizada em $\vec{r} = z\hat{z}$ (com $-z_o < z < z_o$), deslocando-se em relação ao capacitor com velocidade $\vec{v} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z}$ e aceleração $\vec{a} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y} + a_z\hat{z}$. Neste caso a força exercida pelo capacitor sobre esta carga é dada por:[14]

$$\vec{F} = -q\frac{\sigma}{\varepsilon_o}\left\{\hat{z} + \frac{1}{c^2}\left[\frac{v^2}{2}\hat{z} - v_z(v_x\hat{x} + v_y\hat{y}) + 2za_z\hat{z} - z\vec{a}\right]\right\} \ . \tag{6.34}$$

Supondo baixas velocidades e acelerações da carga teste, de tal forma que $v^2 \ll c^2$ e $|z\vec{a}| \ll c^2$, retorna-se ao resultado clássico dado pela equação (6.32). Vamos supor que estas condições sejam satisfeitas daqui por diante. Isto significa que podemos considerar a situação de uma carga teste no interior de um capacitor ideal como sendo uma situação de força constante.

A tensão ou diferença de potencial elétrico entre as placas deste capacitor ideal, representada por $\Delta\phi$, é dada por:

$$\Delta\phi = Ed = \frac{\sigma d}{\varepsilon_o} = \frac{Qd}{L^2\varepsilon_o} \ . \tag{6.35}$$

6.3.2 Carga Parada no Interior do Capacitor

Existem várias experiências que mostram que não há relação entre a carga elétrica de um corpo e seu peso, ou que não há relação entre a carga elétrica de um corpo e sua massa gravitacional. Uma das mais simples é observar que se pode alterar a eletrização de uma régua plástica ao atritá-la de maneira diferente no cabelo, sem com isso alterar o seu peso. Seu grau de eletrização pode ser indicado pela quantidade de papeizinhos que consegue atrair ao ser aproximada deles.[15]

Apresentamos nesta Subseção outras situações experimentais mostrando que não há relação entre o peso e a carga elétrica de um corpo.

Entre 1908 e 1913 Robert Millikan (1868-1953) realizou algumas experiências para determinar a carga do elétron. Nestas experiências uma gota de óleo eletrizada era mantida em equilíbrio na vertical entre as placas de um capacitor, com o peso da gota sendo equilibrado pelo empuxo exercido pelo ar e pela força elétrica do capacitor. Em outros casos a gota deslocava-se com uma velocidade de arraste constante na vertical. Nestes casos era necessário levar em consideração a força de arraste exercida pelo meio. Vamos considerar apenas a situação em que a gota ficava praticamente parada na vertical, sendo este um caso de equilíbrio instável, figura 6.8.

Utilizando a segunda lei de Newton, equação (1.4), obtém-se:

$$P_{ap} - F_E = m_i a = 0 \ , \tag{6.36}$$

[14] [Ass89b], [AC91], [AC92], [Ass92b, Seção 5.6], [Ass94, Seções 6.7 e 7.2] e [Ass95b, Seção 5.5].
[15] [Ass10b], [Ass10a] e [Ass11b].

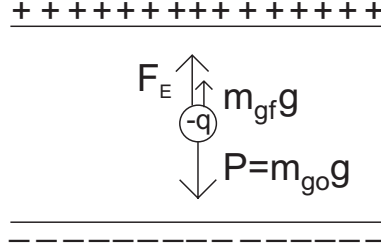



Figura 6.8: Forças atuando sobre a gota eletrizada com uma carga $-q$: peso da gota de óleo $= P = m_{go}g$, empuxo exercido pelo fluido $= m_{gf}g$, e força elétrica F_E.

onde P_{ap} é o peso aparente da gota. Se a gota de óleo tem uma massa gravitacional m_{go} e se um volume igual ao da gota preenchido com o fluido ao seu redor tem uma massa gravitacional m_{gf}, este peso aparente é dado pelo peso da gota no vácuo menos o empuxo exercido sobre ela pelo fluido, isto é, $P_{ap} = m_{go}g - m_{gf}g$. Além disso, $F_E = |\vec{F}_E|$ é o módulo da força elétrica atuando sobre a gota eletrizada com uma carga $-q$.

De acordo com a equação (1.17), o peso da gota de raio r é dado por $P = m_{go}g = 4\pi r^3 \rho_{go} g/3$, onde ρ_{go} é a densidade de massa gravitacional do óleo. De acordo com a equação (2.1), o empuxo atuando sobre a gota é dado por $m_{gf}g = 4\pi r^3 \rho_{gf} g/3$, onde ρ_{gf} é a densidade de massa gravitacional do fluido ao redor da gota. De acordo com as equações (6.32) e (6.33), a força elétrica atuando sobre a gota eletrizada com uma carga $-q$ é dada por $F_E = qE = q\sigma/\varepsilon_o$. Utilizando as equações (6.35) e (6.36), obtém-se que a razão entre o peso aparente da gota e sua carga elétrica é dada por:

$$\frac{P_{ap}}{q} = \frac{4\pi r^3 g(\rho_{go} - \rho_{gf})}{3q} = \frac{\sigma}{\varepsilon_o} = \frac{\Delta\phi}{d} \ . \tag{6.37}$$

Experimentalmente observa-se que são necessárias tensões diferentes para equilibrar gotas diferentes, ou seja, são necessárias densidades de carga diferentes nas placas de um mesmo capacitor para equilibrar gotas diferentes. De acordo com a equação (6.37), isto significa que não há relação entre o valor da carga elétrica q da gota e o peso da gota (seja seu peso P no vácuo, ou seu peso aparente P_{ap} no ar). Pode-se variar q independente de P, aumentando a eletrização da gota. Também pode-se variar P independente de q, considerando gotas de raios diferentes e mesma eletrização. Isto significa que para equilibrar gotas com razões de carga por peso diferentes, são necessárias tensões diferentes entre as placas do capacitor, ou seja, placas com densidades de carga diferentes, figura 6.9.

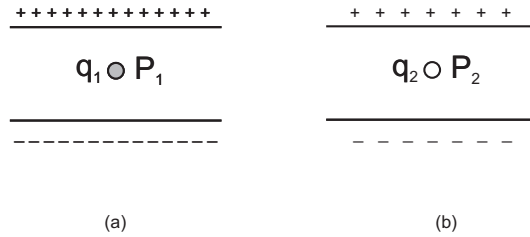



Figura 6.9: As gotas 1 e 2 possuem razões de carga por peso diferentes. Elas só podem ser equilibradas verticalmente no interior de capacitores que possuem tensões diferentes, isto é, densidades de carga superficial diferentes.

Uma outra situação simples que mostra que não há relação entre a carga de um corpo e seu peso é ilustrada na figura 6.10. Temos um corpo de massa gravitacional m_g, massa inercial m_i e carga elétrica q preso a um fio de comprimento ℓ no interior de um capacitor ideal com densidades de carga $\pm\sigma$ nas duas placas, gerando uma força por unidade de carga E.

Neste caso temos uma carga elétrica q no interior de um capacitor ideal com suas placas eletrizadas localizadas em planos verticais. As forças atuando sobre a carga estão representadas na figura 6.10 (b), a saber, o peso $\vec{P}$ do corpo atuando verticalmente para baixo, a força de tensão $\vec{T}$ ao longo da direção do fio que o prende, juntamente com uma força elétrica $\vec{F}_E$ horizontal. No equilíbrio temos que:

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_E = m_i \vec{a} = \vec{0} \ . \tag{6.38}$$

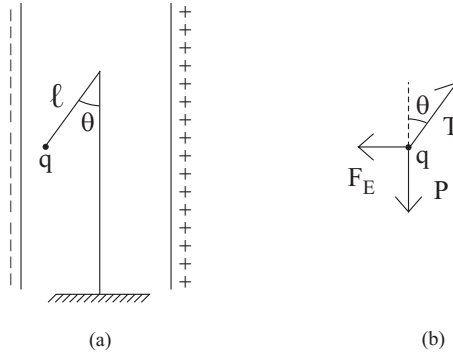



Figura 6.10: (a) Um corpo de carga q e peso P em equilíbrio no interior de um capacitor. (b) Forças atuando sobre o corpo.

De acordo com as equações (1.17), (6.32) e (6.33), juntamente com a figura 6.10 (b), obtemos:

$$T \operatorname{sen} \theta = F_E = qE = q\frac{\sigma}{\varepsilon_o} \ , \tag{6.39}$$

e

$$T \cos \theta = P = m_g g \ . \tag{6.40}$$

Elevando ao quadrado as equações (6.39) e (6.40) obtém-se que a tensão no fio que prende a carga é dada por:

$$T = \sqrt{q^2 E^2 + P^2} = \sqrt{q^2 \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_o}\right)^2 + m_g^2 g^2} \ . \tag{6.41}$$

Esta tensão pode ser medida com um dinamômetro preso ao fio.

Dividindo a equação (6.39) pela equação (6.40) e utilizando a equação (6.35) obtém-se que:

$$\tan \theta = \frac{q}{P} E = \frac{q}{m_g} \frac{E}{g} = \frac{q}{m_g} \frac{\sigma}{g \varepsilon_o} = \frac{q}{m_g} \frac{\Delta \phi}{gd} \ . \tag{6.42}$$

Experimentalmente observa-se que este ângulo de inclinação em relação à vertical pode ter valores diferentes para corpos diferentes, figura 6.11, mesmo que estes corpos sejam colocados no interior do mesmo capacitor com a mesma tensão entre suas placas.

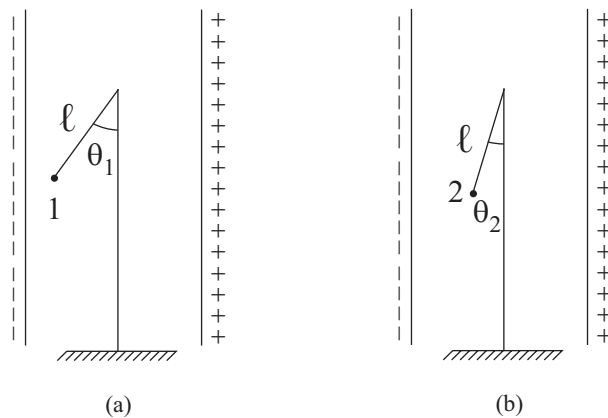



Figura 6.11: Os fios que prendem dois corpos que possuem razões carga por peso diferentes ficam inclinados de ângulos diferentes em relação à vertical quando estão no interior do mesmo capacitor.

De acordo com a equação (6.42), esta diferença nos ângulos de inclinação dos fios em relação à vertical significa que estes dois corpos possuem diferentes razões de carga por peso, ou diferentes razões de carga por massa gravitacional:

$$\frac{q_1}{P_1} \neq \frac{q_2}{P_2} , \tag{6.43}$$

ou

$$\frac{q_1}{m_{g1}} \neq \frac{q_2}{m_{g2}} . \tag{6.44}$$

Ou seja, estas experiências mostram que não há relação entre a carga elétrica de um corpo e seu peso, assim como não há relação entre a carga elétrica de um corpo e sua massa gravitacional.

6.3.3 Carga sendo Acelerada no Interior do Capacitor

Nesta Subseção discutimos uma situação que mostra não haver relação entre a carga elétrica de um corpo e sua massa inercial. Vamos agora considerar uma carga deslocando-se no vácuo entre as placas de um capacitor ideal. Vamos supor que a força elétrica atuando sobre a carga seja muito maior que seu peso, de tal forma que possamos desprezar a força gravitacional atuando sobre ela. Igualando as equações (1.4) e (6.32) obtém-se:

$$\vec{a} = \frac{q}{m_i}\vec{E} . \tag{6.45}$$

De acordo com a equação (6.33), a força por unidade de carga, $\vec{E}$, depende apenas da densidade superficial de carga sobre as placas do capacitor, sendo independente de q ou de m_i. Esta força por unidade de carga é análoga à força por unidade de massa gravitacional na superfície da Terra na situação de queda livre das Seções 6.1 e 6.2.

Porém, existe uma grande diferença entre a aceleração de queda livre em uma região de força gravitacional constante e a aceleração de uma carga em uma região de força elétrica constante (ou seja, na qual a força sobre um corpo não depende da posição em que este corpo se encontra). Já foi visto que no caso da queda livre todos os corpos caem com a mesma aceleração, não interessando seus pesos ou composições químicas. Já no caso de duas cargas sendo aceleradas em uma mesma região de força elétrica constante, podemos ter corpos que sofrem acelerações diferentes. Por exemplo, um próton (p) sendo acelerado no interior de um capacitor vai ter uma aceleração duas vezes maior do que a aceleração de uma partícula alfa (α) sendo acelerada no mesmo capacitor, figura 6.12. A partícula alfa é o núcleo do átomo de hélio, com dois prótons e dois nêutrons.

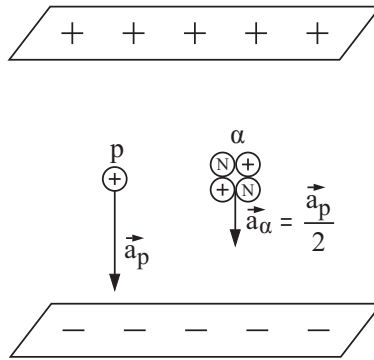



Figura 6.12: Duas partículas com acelerações diferentes dentro de um mesmo capacitor.

De acordo com a equação (6.45), a razão entre as acelerações do próton e da partícula alfa dentro de um mesmo capacitor ideal é dada por, com $a = |\vec{a}|$:

$$\frac{a_p}{a_\alpha} = \frac{q_p/m_{ip}}{q_\alpha/m_{i\alpha}} . \tag{6.46}$$

Utilizando que $q_\alpha = 2q_p$ e que $m_{i\alpha} = 4m_{ip}$ obtém-se:

$$\vec{a}_p = 2\vec{a}_\alpha . \tag{6.47}$$

Esta diferença entre as duas acelerações é devida ao fato de que a carga de uma partícula alfa é duas vezes a carga de um próton, já que a partícula alfa possui dois prótons, enquanto sua massa inercial é quatro vezes a massa inercial do próton em função dos dois nêutrons e dois prótons que possui.

Este efeito já não ocorre na queda livre, já que todos os corpos (não interessando seu peso, forma, composição química, carga elétrica, etc.) caem com a mesma aceleração no vácuo na superfície da Terra.

Isto é um fato extremamente importante. Comparando estes dois exemplos (ver as figuras 6.4 e 6.12), vemos que a massa inercial m_i de um corpo é proporcional ao seu peso P ou à sua massa gravitacional m_g, como indicado pela equação (6.19). Por outro lado, este último exemplo mostra que a massa inercial de um corpo não é proporcional à sua carga elétrica:

$$\frac{m_{i1}}{m_{i2}} \neq \frac{q_1}{q_2} \ . \tag{6.48}$$

Estes fatos sugerem que a inércia de um corpo está relacionada com seu peso ou com sua massa gravitacional, mas não com suas propriedades elétricas.

6.4 Corpo sendo Acelerado em Relação ao Solo enquanto está Preso em uma Mola

6.4.1 Distinção entre Velocidade e Aceleração a partir da Variação do Comprimento da Mola

Consideramos agora dois corpos com mesma massa inercial m_i apoiados sobre um vagão sem atrito. Os corpos estão presos a duas molas horizontais iguais de comprimento relaxado ℓ_o quando o vagão está em repouso no solo, figura 6.13 (a). Cada corpo está preso em uma única mola. As molas estão presas ao vagão. Vamos desprezar a massa inercial da mola em comparação com a massa inercial m_i do corpo preso a ela, $m_{i\ mola} \ll m_i$.

Aplica-se uma força sobre o vagão até deixá-lo deslocando-se em relação ao solo com uma velocidade constante v. Depois que esta situação foi estabilizada, tanto as molas quanto os corpos também vão deslocar-se em relação ao solo com uma velocidade constante v, já que estão presos ao vagão. observa-se que as duas molas continuam relaxadas mantendo o comprimento inicial ℓ_o, figura 6.13 (b). O cilindro representa um corpo externo ao vagão parado em relação ao solo.

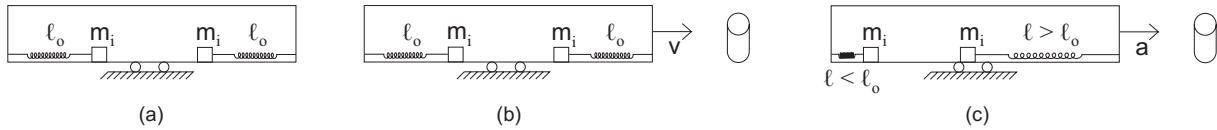



Figura 6.13: (a) Vagão parado no solo. (b) Vagão deslocando-se com velocidade constante em relação ao solo. (c) Vagão deslocando-se com aceleração constante em relação ao solo.

Porém, ao fornecer uma aceleração constante ao vagão em relação ao solo, observa-se que uma das molas fica comprimida e a outra mola fica esticada, figura 6.13 (c). Nesta figura o vagão está sendo acelerado em direção a um cilindro preso ao solo. Em particular, fica comprimida a mola da esquerda, cuja extremidade presa ao vagão está mais afastada do cilindro do que sua extremidade presa ao corpo de massa inercial m_i. Já a mola da direita, cuja extremidade presa ao vagão está mais próxima do cilindro do que sua extremidade presa ao corpo de massa inercial m_i, fica esticada.

Vamos considerar como positivo o sentido que aponta do vagão para o cilindro. Pode-se utilizar a segunda lei de Newton juntamente com a lei de Hooke, equações (1.4) e (2.6), para obter a compressão da mola da esquerda:

$$-k(\ell - \ell_o) = m_i a \ . \tag{6.49}$$

Com as mesmas equações (1.4) e (2.6) pode-se obter o esticamento da mola da direita, a saber:

$$k(\ell - \ell_o) = m_i a \ . \tag{6.50}$$

Ou seja, as duas molas sofrem a mesma variação de comprimento dada por:

$$|\ell - \ell_o| = \frac{m_i|a|}{k} \ . \tag{6.51}$$

Uma distinção importante que pode ser feita entre os três casos da figura 6.13 é que uma aceleração causa efeitos dinâmicos, como é o caso da variação do comprimento das duas molas da figura 6.13 (c) dada pela equação (6.51). Não ocorrem estas variações nos comprimentos das molas quando elas deslocam-se com uma velocidade constante em relação ao solo, como pode ser visto comparando as figuras 6.13 (a) e (b). Ou seja, podemos perceber se o vagão está ou não acelerado em relação ao solo sem olhar para fora. Para saber se o vagão está ou não acelerado em relação ao solo, basta perceber se as molas presas a ele estão ou não esticadas e comprimidas. Por outro lado, se estamos dentro do vagão sem olhar para fora não dá para perceber se estamos parados em relação ao solo ou se o vagão está deslocando-se em relação ao solo com uma velocidade constante, já que as molas ficam do mesmo jeito nestas duas situações, como pode ser visto nas figuras 6.13 (a) e (b).

6.4.2 Qual é a Origem da Força que está Esticando a Mola?

Na figura 2.4 vimos uma mola ser esticada por forças de natureza diferente, a saber, (a) gravitacional, (b) elétrica e (c) magnética. Uma mola não se estica sozinha. Para que isto ocorra, são necessárias duas forças iguais e opostas atuando sobre as extremidades da mola, sendo que a força que atua em cada extremidade está apontando no sentido que vai do centro da mola para esta extremidade, como visto na figura 2.3 (c) e na figura 2.5.

Uma pergunta interessante que pode ser feita é a seguinte: Qual é a origem da força que está esticando a mola da direita da figura 6.13 (c)? Ou seja, esta força é de origem gravitacional, elétrica, magnética ou nuclear?

Também pode ser perguntado qual é a origem da força que está comprimindo a mola da esquerda da figura 6.13 (c)? Uma mola não se comprime sozinha. Para que isto ocorra, são necessárias duas forças iguais e opostas atuando sobre as extremidades da mola, sendo que a força que atua em cada extremidade está apontando no sentido que vai desta extremidade da mola para seu centro.

A resposta a estas perguntas na mecânica clássica é que a mola da direita da figura 6.13 (c) não está sendo esticada por nenhuma força de interação, ao contrário do que acontece na figura 2.4. A explicação para o fato da mola da direita da figura 6.13 (c) estar esticada é atribuída à inércia do corpo preso a ela. No caso do corpo da direita na figura 6.13 (c), quando o vagão é forçado para a direita com uma aceleração a em relação à Terra, o corpo tende a permanecer em repouso no solo. Como ele está preso à mola, a mola começa a esticar. Ela então começa a exercer uma força elástica sobre o corpo fazendo com que ele comece a ser acelerado em relação ao solo. A mola vai sendo cada vez mais esticada até que o corpo atinge a mesma aceleração a do vagão. A partir deste instante a mola permanece esticada, enquanto que ela, o vagão e o corpo mantêm a mesma aceleração a em relação ao solo. Por ação e reação sabe-se que a força elástica $k(\ell - \ell_o)$ exercida pela mola sobre o corpo é contrabalançada por uma força igual e oposta exercida pelo corpo sobre a mola. Matematicamente pode-se dizer que a mola é esticada pela força inercial $-m_i a$ exercida pelo corpo sobre ela.

A diferença em relação aos casos da figura 2.4 é que esta força inercial não vem de nenhum tipo de interação física entre o corpo de massa inercial m_i e outros corpos do universo. Já na figura 2.4 (a) temos que a força peso exercida pela Terra sobre cada corpo dependurado na mola é transmitida à mola. Na figura 2.4 (b) a força elétrica exercida sobre cada corpo é transmitida à mola, enquanto que na figura 2.4 (c) é a força magnética atuando em cada corpo que é transmitida à mola, fazendo que ela se estique.

6.5 Corpo sendo Acelerado em Relação ao Solo enquanto está Dependurado em um Fio

Vamos supor que temos um fio ideal de comprimento constante ℓ com sua extremidade superior presa ao teto de um vagão fechado que pode se deslocar em relação ao solo. Na extremidade inferior do fio coloca-se um corpo de peso P, massa gravitacional m_g e massa inercial m_i. Aplica-se uma força horizontal ao vagão fazendo com que ele se desloque em relação ao solo com uma aceleração constante a. Observa-se que o fio fica inclinado de uma ângulo θ em relação à vertical, figura 6.14.

Existem duas forças atuando sobre o corpo, a saber, seu peso $\vec{P}$ apontando para baixo e a força de tensão $\vec{T}$ exercida pelo fio apontando ao longo de seu comprimento. Estamos supondo que o corpo está sendo

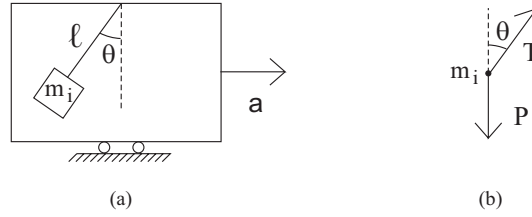



Figura 6.14: (a) Vagão acelerado em relação ao solo, com o fio inclinado de um ângulo θ em relação à vertical. (b) Forças atuando sobre o corpo.

acelerado no vácuo, ou que se possa desprezar a força de empuxo exercida pelo ar sobre ele. De acordo com a segunda lei de Newton, a equação de movimento fica dada por:

$$\vec{P} + \vec{T} = m_i \vec{a} \ . \tag{6.52}$$

Usando o ângulo θ da figura 6.14 e o fato de que a aceleração do corpo é apenas horizontal obtém-se:

$$T \operatorname{sen} \theta = m_i a \ , \tag{6.53}$$

e

$$T \cos \theta = P \ . \tag{6.54}$$

Dividindo a equação (6.53) pela equação (6.54) e usando que $P = m_g g$, obtém-se:

$$\tan \theta = \frac{m_i a}{P} = \frac{m_i}{m_g} \frac{a}{g} \ . \tag{6.55}$$

Ou seja, a tangente do ângulo θ de inclinação do fio é proporcional à aceleração do fio em relação ao solo. Como esta aceleração pode ser alterada mudando a força horizontal que se aplica ao vagão, é possível controlar o ângulo de inclinação do fio em relação à vertical.

Elevando ao quadrado as equações (6.53) e (6.54) obtém-se que a tensão no fio é dada por:

$$T = \sqrt{m_i^2 a^2 + P^2} = \sqrt{m_i^2 a^2 + m_g^2 g^2} \ . \tag{6.56}$$

Para medir esta tensão seria necessário utilizar um dinamômetro preso ao fio.

6.5.1 Proporcionalidade entre o Peso e a Massa Inercial a partir da Inclinação do Fio

Um fio de comprimento ℓ fica inclinado de um ângulo θ_1 em relação à vertical dado pela equação (6.55) quando sofre uma aceleração a_1 em relação ao solo enquanto sustenta um corpo 1 de peso P_1, massa gravitacional m_{g1} e massa inercial m_{i1}. Analogamente, um outro fio de comprimento ℓ fica inclinado de um ângulo θ_2 quando sofre uma aceleração a_2 em relação ao solo enquanto sustenta um corpo 2. Da equação (6.55) obtém-se que a razão entre as tangentes destes ângulos é dada por:

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{m_{i1} a_1}{m_{i2} a_2} \frac{P_2}{P_1} = \frac{m_{i1}/m_{g1}}{m_{i2}/m_{g2}} \frac{a_1}{a_2} \ . \tag{6.57}$$

Estes são os resultados obtidos a partir da mecânica newtoniana. É um dado experimental adicional que todos os corpos presos a fios ficam inclinados do mesmo ângulo θ em relação à vertical quando os vagões em que estão presos sofrem a mesma aceleração constante a em relação ao solo, não interessando suas formas, pesos, densidades de massa gravitacional ou suas composições químicas. Este fato experimental não pode ser deduzido das leis de Newton, sendo um dado empírico independente destas leis. Esta igualdade entre os ângulos está indicada na figura 6.15.

Ou seja, se $a_1 = a_2 =$ constante, observa-se experimentalmente que $\theta_1 = \theta_2$, quaisquer que sejam os valores de P_1, P_2, m_{i1}, m_{i2}, m_{g1} ou m_{g2}. Esta igualdade de ângulos também ocorre para corpos de composições químicas diferentes. Utilizando este resultado experimental na equação (6.57) conclui-se que:

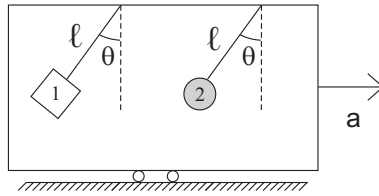



Figura 6.15: Dois fios suportando corpos 1 e 2 ficam inclinados do mesmo ângulo em relação à vertical quando sofrem a mesma aceleração constante em relação ao solo, não importando os pesos ou as composições químicas dos corpos presos a eles.

$$\frac{m_{i1}}{m_{i2}} = \frac{P_1}{P_2} = \frac{m_{g1}}{m_{g2}} , \tag{6.58}$$

quaisquer que sejam as composições químicas dos corpos 1 e 2.

Este resultado é análogo à equação (6.19). Só que agora este resultado foi obtido a partir de uma experiência conceitualmente diferente. Quando soltamos dois corpos no vácuo perto da superfície terrestre, observa-se que eles caem com uma aceleração constante em relação ao solo. O valor desta aceleração não pode ser controlado, já que depende apenas da Terra, não importando a composição química dos corpos que caem. Já na experiência que está sendo discutida nesta Seção, podemos variar à vontade a aceleração em relação ao solo que fornecemos ao vagão. Dada esta aceleração, então o ângulo de inclinação do fio em relação à vertical fica sendo dado pela natureza, não podendo ser controlado, já que tem o mesmo valor qualquer que seja a composição química dos corpos presos ao fio. Se aumentarmos ou diminuirmos a aceleração dada ao vagão, então alteramos o valor do ângulo de inclinação do fio.

Utilizando a equação (6.21) obtém-se que a equação (6.55) pode ser simplificada para:

$$\tan\theta = \frac{a}{g} . \tag{6.59}$$

6.5.2 Distinção entre Velocidade e Aceleração a partir da Inclinação do Fio

Nas Seções 4.2 e 5.2 vimos que o fio com um corpo em sua extremidade fica esticado na vertical quando está parado ou deslocando-se com velocidade horizontal constante em relação ao solo, figuras 4.5 e 5.5. Por outro lado, quando o vagão sofre uma aceleração constante de módulo a em relação ao solo, observa-se que o fio fica inclinado de um ângulo θ em relação à vertical. Este ângulo é dado pela equação (6.59), $\tan\theta = a/g$, como está ilustrado na figura 6.14. Na figura 6.16 comparamos estas três situações.

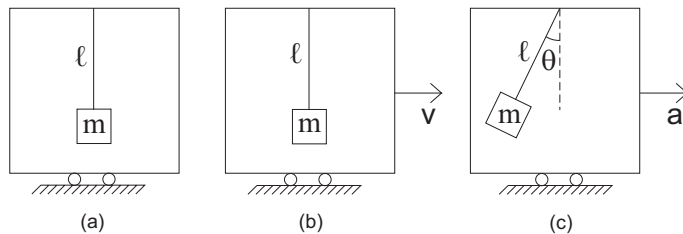



Figura 6.16: Movimento do vagão em relação solo. (a) Parado. (b) Com velocidade constante. (c) Com aceleração constante.

Uma distinção importante que se pode fazer entre estes três casos é que uma aceleração causa efeitos dinâmicos, como é o caso da inclinação do fio em relação à vertical. Estes efeitos não aparecem quando o corpo está parado em relação ao solo ou quando se desloca com uma simples velocidade constante em relação ao solo.

Um outro aspecto fundamental diz respeito a como percebemos o movimento. Em geral para saber se há um movimento entre dois corpos 1 e 2 temos de analisar a distância entre eles, comparando-a com alguma outra distância entre outros corpos que consideramos como padrão. Quando a distância entre 1 e 2 varia no tempo (comparada com nossa distância padrão), dizemos que há um movimento entre eles. Por exemplo, podemos dizer que um corpo se move em relação ao solo ao perceber que sua distância a diferentes objetos

presos ao solo muda com a passagem do tempo. O corpo pode estar, por exemplo, se aproximando de uma parede.

No caso da figura 6.16 uma pessoa no solo pode dizer se o vagão está parado ou deslocando-se ao comparar a distância entre o vagão e uma árvore. Uma pessoa dentro do vagão também pode saber se o vagão está parado ou deslocando-se em relação ao solo se puder olhar para fora do vagão e analisar a posição das árvores ao redor. Por outro lado, se o vagão for fechado e sem janelas, uma pessoa dentro do vagão não tem como saber se ele está parado ou deslocando-se com velocidade constante em relação ao solo. Objetos dentro do vagão também não dão nenhuma pista se há ou não este movimento. Um exemplo disto ocorre nas figuras 6.16 (a) e (b). Ou seja, o fio fica na vertical não apenas quando o vagão está parado, mas também quando desloca-se com velocidade constante em relação ao solo. Por outro lado, medindo a inclinação do fio em relação à vertical (com a vertical indicada pela parede lateral do vagão, por exemplo), uma pessoa dentro do vagão pode determinar sua aceleração em relação ao solo, mesmo que o vagão não tenha janelas nem vista para fora. Esta aceleração é dada pela equação (6.59), a saber:

$$a = g \tan \theta \ . \tag{6.60}$$

Além de saber o módulo ou magnitude da aceleração a partir do valor do ângulo, a pessoa também pode saber em que sentido o vagão está sendo acelerado. Para isto basta perceber para qual lado em relação à vertical o corpo preso ao fio se inclinou, sendo o sentido da aceleração do vagão ocorrendo para o lado oposto. Por exemplo, no caso da figura 6.16 (c), uma pessoa dentro do vagão perceberia o corpo inclinado para a esquerda (isto é, tendo se aproximado de uma certa parede do vagão). Isto indicaria que o vagão estaria acelerado para a direita (ou seja, no sentido da parede em relação à qual o corpo se afastou).

Na próxima Subseção vamos aprofundar esta discussão tentando entender o significado da aceleração que aparece na equação (6.60).

6.5.3 Distinção entre Aceleração Relativa e Aceleração Absoluta a partir da Inclinação do Fio

Ao perceber que há uma mudança na posição entre dois corpos, dizemos que há um movimento relativo entre eles. Em princípio este movimento pode ser atribuído a qualquer um dos corpos. Isto está ilustrado na figura 6.17 na qual temos um corpo de massa m preso a um fio dentro de um vagão que desloca-se em relação ao solo com velocidade constante v.

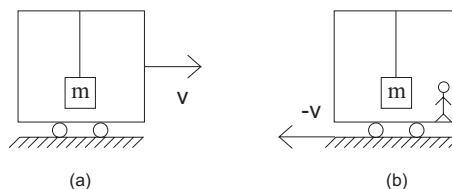



Figura 6.17: Velocidade relativa entre o vagão e o solo. (a) Situação vista por alguém no solo. (b) Situação vista por alguém que se desloca junto com o vagão em relação ao solo.

Na figura 6.17 (a) temos a situação vista por alguém parado no solo enquanto que o vagão, o fio e a massa m deslocam-se juntos para a direita com uma velocidade v. Na situação (b) temos a mesma situação vista por alguém que se desloca junto com o vagão em relação ao solo. Esta pessoa que está dentro do vagão observa que o vagão, o fio e a massa m estão parados em relação a ela, enquanto que a Terra desloca-se para a esquerda com velocidade $-v$. Existe a mesma velocidade relativa entre o solo e o fio nas duas situações. O movimento pode ser atribuído tanto ao fio quanto ao solo.

Já na figura 6.18 apresentamos a situação em que o vagão tem uma aceleração horizontal constante a em relação ao solo. Em (a) apresentamos a situação de alguém parado no solo vendo o vagão acelerado para a direita. Em (b) temos a mesma situação vista por alguém que está dentro do vagão. Esta pessoa que está dentro do vagão observa que o vagão, o fio e a massa m estão parados em relação a ela, enquanto que a Terra está deslocando-se para a esquerda com aceleração $-a$.

Em princípio as situações (a) e (b) da figura 6.18 são equivalentes. Poderia ser pensado que o ângulo θ de inclinação do fio em relação à vertical fosse devido à aceleração relativa entre o vagão e a Terra, não importando qual deles estivesse acelerado em relação ao espaço absoluto de Newton. Mas dentro da mecânica clássica não ocorre esta equivalência. Newton defendeu que os efeitos dinâmicos aparecem sobre os

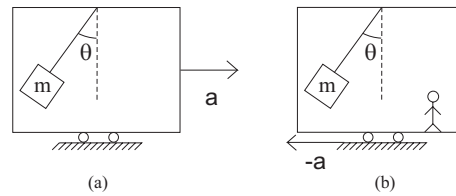



Figura 6.18: Vagão acelerado em relação ao solo, com o fio inclinado de um ângulo θ em relação à vertical. (a) Situação vista por alguém no solo. (b) Situação vista por alguém que se desloca junto com o vagão em relação ao solo.

corpos acelerados. Estes efeitos dinâmicos só surgiriam, de acordo com Newton, quando os próprios corpos estivessem acelerados em relação ao espaço absoluto. Estes efeitos não surgiriam se os corpos estivessem parados em relação ao espaço absoluto, mesmo que a Terra e os corpos astronômicos estivessem acelerados em relação ao espaço absoluto, tal que houvesse a mesma aceleração relativa entre os corpos de prova e a Terra. Newton ilustrou seus pontos de vista utilizando movimentos circulares. Apresentamos aqui seus argumentos utilizando movimentos acelerados ao longo de uma linha reta.

Quando o vagão está parado no solo, um fio preso ao teto do vagão com um corpo de massa m em sua extremidade inferior fica esticado na vertical. Na figura 6.18 (a) vimos que o fio fica inclinado para a esquerda de um ângulo θ em relação às paredes do vagão quando o vagão é deslocado para a direita em relação ao solo com uma aceleração constante a. Vamos imaginar agora uma situação hipotética (experiência de pensamento) na qual o vagão estivesse parado em relação ao espaço absoluto, mas na qual a Terra fosse deslocada para a esquerda com uma aceleração constante $-a$. Será que o fio também vai ficar inclinado de um ângulo θ em relação às paredes do vagão? De acordo com a mecânica newtoniana, o fio vai continuar na vertical, apesar de a aceleração relativa entre a Terra e o vagão ser a mesma que aquela representada na figura 6.18 (a). Na figura 6.19 apresentamos estas situações considerando o papel como estando parado em relação ao espaço absoluto. Na situação (a) temos o vagão acelerado para a direita com o fio inclinado em relação à vertical. Na situação (b) temos a situação hipotética na qual o vagão está parado em relação ao espaço absoluto, tendo sido fornecida à Terra uma aceleração para a esquerda.

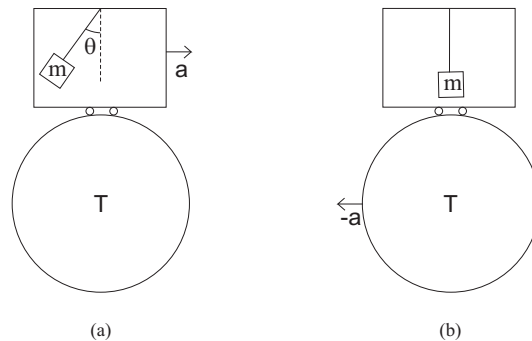



Figura 6.19: Papel parado em relação ao espaço absoluto. (a) Vagão acelerado para a direita, com o fio inclinado de um ângulo θ. (b) Vagão parado e Terra acelerada para a esquerda, com o fio na vertical.

Embora a aceleração relativa entre a Terra e o vagão seja a mesma nos dois casos, o fio só fica inclinado no caso (a) em que a massa m está acelerada em relação ao espaço absoluto. No caso (b) a mecânica newtoniana prevê que o fio continuará na vertical. É fácil de entender esta previsão com a mecânica clássica. A força exercida pela Terra sobre a massa m na figura 6.19 é o peso $P = mg$ apontando verticalmente para baixo. Como a lei de Newton da gravitação não depende da velocidade nem da aceleração, a Terra vai continuar puxando o peso para baixo quando está acelerada para a esquerda como na figura 6.19 (b), como visto na equação (1.20). Isto mostra que dentro da mecânica newtoniana o ângulo θ dado por $\tan\theta = a/g$ não é devido à aceleração entre o vagão e a Terra.

Uma segunda possibilidade seria pensar que este ângulo dependesse da aceleração relativa entre o vagão e o conjunto das estrelas fixas. Porém, dentro da mecânica newtoniana, as estrelas fixas não exercem influências sobre os corpos terrestres, como visto na Subseção 1.4.4. Para entender isto apresentamos na figura 6.20 uma nova situação hipotética, novamente supondo o papel como estando parado em relação ao espaço absoluto.

No caso (a) temos o vagão com uma aceleração a para a direita, enquanto que a Terra e as estrelas fixas estão paradas em relação ao espaço absoluto. No caso (b) temos o vagão parado em relação ao espaço absoluto, enquanto que a Terra e as estrelas deslocam-se com a aceleração $-a$ para a esquerda.

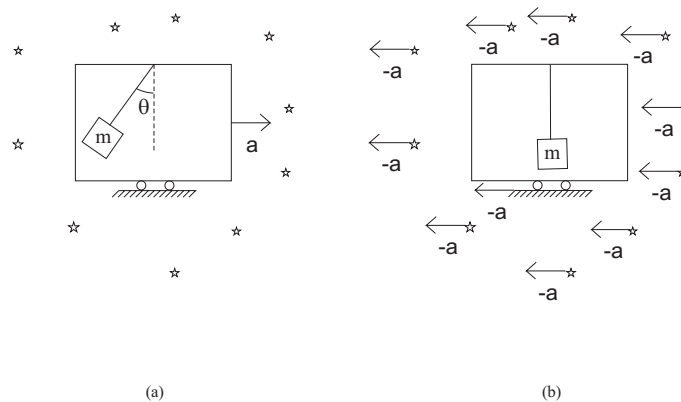



Figura 6.20: Papel parado em relação ao espaço absoluto. (a) Vagão acelerado para a direita, com o fio inclinado de um ângulo θ. (b) Vagão parado, com a Terra e as estrelas aceleradas para a esquerda.

Mais uma vez temos que as situações (a) e (b) são equivalentes no sentido de que existe a mesma aceleração relativa entre o vagão e a Terra, ou entre o vagão e o conjunto das estrelas. Porém, no que se refere à inclinação do fio, estas situações não são equivalentes, já que o fio está inclinado em (a) mas não em (b). Dentro da mecânica newtoniana a Terra acelerada para a esquerda continua a puxar o corpo de massa m verticalmente para baixo, enquanto que o conjunto de estrelas aceleradas para a esquerda não exerce força resultante sobre m, de acordo com a equação (1.20). Isto mostra que dentro da mecânica newtoniana o ângulo θ dado por $\tan\theta = a/g$ também não é devido à aceleração entre o vagão e o conjunto das estrelas.

Uma terceira possibilidade seria pensar que este ângulo dependesse da aceleração relativa entre o vagão e o conjunto das galáxias. Mas elas também não exercem uma força resultante sobre m, como visto na Subseção 1.4.4. Para entender isto apresentamos na figura 6.21 uma nova situação hipotética, novamente supondo o papel como estando parado em relação ao espaço absoluto. No caso (a) temos o vagão com aceleração a para a direita, enquanto que a Terra, as estrelas e as galáxias estão em repouso em relação ao espaço absoluto. No caso (b) temos o vagão parado em relação ao espaço absoluto, enquanto que a Terra, as estrelas e as galáxias têm aceleração $-a$ para a esquerda.

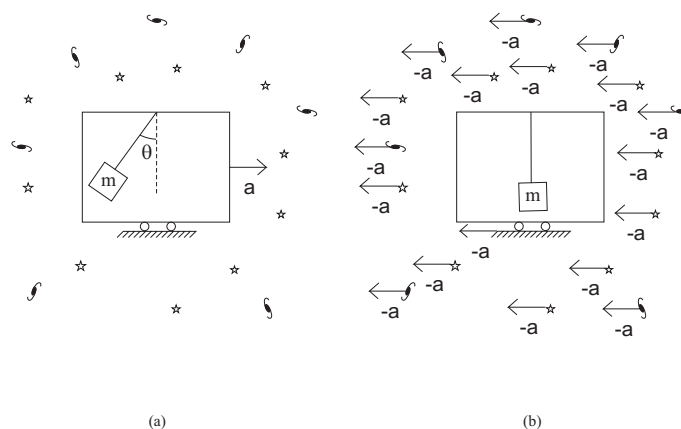



Figura 6.21: Papel parado em relação ao espaço absoluto. (a) Vagão acelerado para a direita, com o fio inclinado de um ângulo θ. (b) Vagão parado, com a Terra, as estrelas e as galáxias aceleradas para a esquerda.

Mais uma vez temos que as situações (a) e (b) são equivalentes no sentido de que existe a mesma aceleração relativa entre o vagão e a Terra, entre o vagão e o conjunto das estrelas, e entre o vagão e o conjunto das galáxias. Porém, no que se refere à inclinação do fio, estas situações não são equivalentes, já que o fio está inclinado em (a) mas não em (b). Dentro da mecânica newtoniana a Terra acelerada para a esquerda continua a puxar o corpo de massa m verticalmente para baixo, enquanto que o conjunto de estrelas

aceleradas para a esquerda não exerce força resultante sobre m, o mesmo acontecendo com o conjunto das galáxias, de acordo com a equação (1.20).

Tudo isto mostra que a aceleração que aparece na equação (6.60) não é a aceleração do corpo de massa m em relação à Terra, em relação ao conjunto das estrelas fixas, nem em relação ao conjunto das galáxias. Na mecânica newtoniana esta aceleração tem de ser interpretada como sendo a aceleração do corpo de massa m em relação ao espaço absoluto. Agora fica compreensível a afirmação de Newton de que o espaço absoluto, *sem relação com qualquer coisa externa*, permanece sempre similar e imóvel, como visto na Seção 1.2. Ou seja, o espaço absoluto não está relacionado com a Terra, com as estrelas fixas, nem com as galáxias.

Esta discussão implica no fato de que a aceleração que aparece na segunda lei de Newton na forma da equação (1.4) tem de ser interpretada como a aceleração da massa m em relação ao espaço absoluto de Newton, ou então em relação a qualquer referencial inercial que esteja deslocando-se com velocidade constante em relação ao espaço absoluto. Não há outra escapatória na mecânica newtoniana devido às consequências cosmológicas da Proposição 70, Teorema 30, do Livro I do *Principia* discutidas na Subseção 1.4.4.

6.5.4 Qual Seria a Inclinação do Fio se Todas as Estrelas e Galáxias ao Redor da Terra Fossem Aniquiladas?

Outra maneira de perceber a distinção entre uma aceleração relativa e uma aceleração absoluta é considerando outras experiências de pensamento. Vamos supor que em algum instante as estrelas e galáxias desaparecessem do universo, isto é, fossem literalmente aniquiladas. Ainda assim o fio continuaria inclinado de um ângulo θ quando sofresse uma aceleração a em relação ao espaço absoluto, como indicado na figura 6.19 (a), enquanto que continuaria na vertical quando a Terra sofresse uma aceleração $-a$ em relação ao espaço absoluto, como indicado na figura 6.19 (b). Também se dobrássemos a quantidade de estrelas e galáxias no universo em comparação com a quantidade real que vemos ao nosso redor, não haveria modificações nestas previsões, desde que as novas estrelas e galáxias também fossem distribuídas isotropicamente ao redor do sistema solar.

Vamos supor uma nova experiência de pensamento para ilustrar todos estes aspectos. Vamos supor que só existam no universo a Terra, o vagão, o fio e o corpo de massa m, tendo sido aniquiladas todas as estrelas e galáxias ao redor da Terra. Caso apenas o vagão seja acelerado para a direita, teríamos a situação da figura 6.19 (a). Caso apenas a Terra fosse acelerada para a esquerda, teríamos a situação da figura 6.19 (b). Estas situações são cinematicamente equivalentes, já que existe a mesma aceleração relativa entre o vagão e a Terra, mas não são dinamicamente equivalentes, já que não ocorre o mesmo ângulo de inclinação do fio.

Outra maneira de ver esta distinção ocorre quando a Terra e o vagão ficam em repouso em relação ao espaço absoluto, como na figura 6.22 (a). Por outro lado, quando o vagão e a Terra sofrem a mesma aceleração a em relação ao espaço absoluto, o fio fica inclinado de um ângulo θ em relação à vertical, como indicado na figura 6.22 (b).

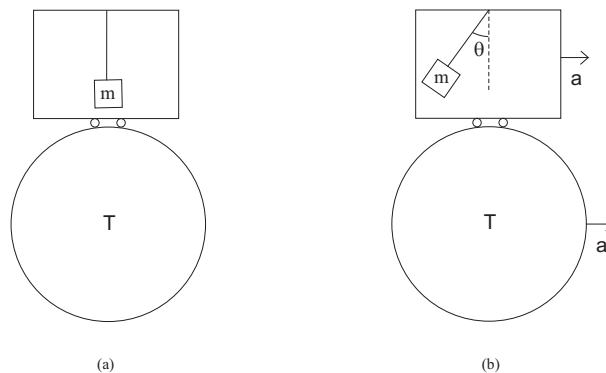



Figura 6.22: Papel parado em relação ao espaço absoluto. (a) Vagão e Terra parados, com o fio na vertical. (b) Vagão e Terra acelerados juntos para a direita, com o fio inclinado de um ângulo θ.

As situações das figuras 6.22 (a) e (b) são visualmente ou cinematicamente equivalentes, já que não há movimento entre o vagão e a Terra nos dois casos. Tanto no caso (a) quanto no caso (b) temos que a Terra, o vagão, o fio e o corpo de massa m estão parados entre si. Por outro lado, estas duas situações não são dinamicamente equivalentes, já que no primeiro caso o fio fica na vertical, enquanto que no segundo caso ele fica inclinado de um ângulo θ não nulo em relação às paredes do vagão.

Podemos acrescentar as estrelas e galáxias nesta experiência de pensamento que nada seria alterado. Estas estrelas e galáxias distribuídas uniformemente ao redor da Terra podem ser consideradas em repouso em relação à Terra, ou aceleradas junto com a Terra e o vagão. Tanto em um caso quanto no outro elas não vão alterar as inclinações dos fios nas figuras 6.22 (a) e (b).

6.5.5 Qual é a Origem da Força que está Inclinando o Fio?

O que foi visto nas Subseções 6.5.3 e 6.5.4 pode ser colocado de outra forma. Foi visto nas figuras 4.6 e 4.7 que enquanto um fio está sustentando um corpo, o fio pode ficar inclinado de um ângulo θ em relação à vertical quando uma força F horizontal passa a atuar sobre o corpo. Esta força pode ser de origem gravitacional, elástica, elétrica, magnética ou de alguma outra natureza.

Uma pergunta interessante que pode ser feita é a seguinte: Qual é a origem da força que está inclinando o fio da figura 6.14? Na mecânica clássica não se encontra uma origem física para esta força, ou seja, ela não é devida a uma interação entre o corpo preso ao fio e outros corpos do universo. A explicação desta inclinação está na inércia do corpo. Quando se força o vagão a deslocar-se com uma aceleração a em relação ao solo, o corpo tende a permanecer parado em relação à Terra devido à sua inércia. Como ele está preso ao fio, cuja extremidade superior está presa ao vagão, o fio começa a se inclinar e a ficar ainda mais tensionado. O corpo começa então a ter uma pequena aceleração em relação ao solo. A inclinação e a tensão no fio vão aumentando juntamente com a aceleração do corpo, até que o corpo passe a se deslocar juntamente com o fio e com o vagão com uma aceleração a em relação ao solo.

A força horizontal exercida sobre o corpo é dada pela componente horizontal da tensão no fio, $T \operatorname{sen} \theta$. Por ação e reação sabe-se que o corpo exerce uma força igual e oposta sobre o fio. Matematicamente pode-se escrever que esta força inercial exercida pelo corpo sobre o fio é dada por $-m_i a$. A analogia entre a força horizontal F das figuras 4.6 e 4.7 e a força inercial $-m_i a$ que atua no exemplo da figura 6.14 pode ser vista também ao comparar as equações (4.6) e (6.56) que fornecem as tensões nestes fios. Ou seja, a força inercial $-m_i a$ atua como uma força de interação F qualquer, já que ambas aumentam a tensão no fio. A única diferença é que não se encontra o agente responsável pela força inercial. Isto é, não se encontra qual é o outro corpo no universo com o qual o corpo de prova preso ao fio está interagindo. Também não se encontra a origem desta força inercial (ela não é gravitacional, elástica, elétrica, magnética, nuclear, nem de qualquer outra natureza).

6.6 Corpo sendo Acelerado em Relação ao Solo enquanto está Dependurado em uma Mola

Seja uma mola de constante elástica k que tem um comprimento ℓ_{oh} quando está relaxada na horizontal apoiada sobre uma mesa, sem ser comprimida ou esticada. Quando esta mola fica na vertical presa apenas por uma de suas extremidades, sem a colocação de qualquer corpo em sua outra extremidade, observa-se que ela passa a ter um novo comprimento ℓ_{ov}. Esta variação no comprimento da mola, $\ell_{ov} - \ell_{oh}$, é devida ao seu próprio peso P_m. Quando colocamos um corpo de peso P na extremidade inferior da mola vertical e a soltamos, ela começa a oscilar verticalmente. Como existe atrito entre o corpo e o ar, as amplitudes de oscilação da mola vão diminuindo até que ela fique parada em relação ao solo tendo um comprimento final ℓ_v. De acordo com a equação (2.6), nesta situação de equilíbrio a força elástica sobre o corpo é equilibrada pelo peso do corpo de tal forma que $k(\ell_v - \ell_{vo}) = P$. Nesta Seção vamos considerar a situação na qual o peso do corpo é muito maior do que o peso da mola, $P \gg P_m$, de tal forma que $\ell_v - \ell_{ov} \gg \ell_{ov} - \ell_{oh}$. Isto significa que podemos desprezar a variação no comprimento da mola devida ao seu próprio peso quando ela passa da posição horizontal para a vertical, quando comparada com a variação no comprimento da mola quando se coloca o corpo de peso P em sua extremidade inferior. Vamos então supor que o comprimento inicial da mola na vertical quando não é colocado o peso P é então dado por $\ell_{ov} \approx \ell_{oh} \equiv \ell_o$.

Vamos discutir agora o caso em que este corpo de peso P, massa inercial m_i e massa gravitacional m_g está dependurado nesta mola vertical. Uma força horizontal é então aplicada ao suporte da mola fazendo com que este suporte passe a se deslocar com uma aceleração constante a em relação ao solo. Depois que a situação se estabiliza com esta aceleração constante, o que se observa é que a mola fica inclinada de um ângulo θ em relação à vertical, figura 6.23 (a).

Analisamos aqui a situação de equilíbrio na qual o corpo está com a mesma aceleração do suporte da mola em relação ao solo, de tal forma que o corpo fique em repouso em relação ao suporte da mola. Ou seja, a mola não está oscilando e permanece inclinada de um ângulo θ constante em relação à vertical. Há

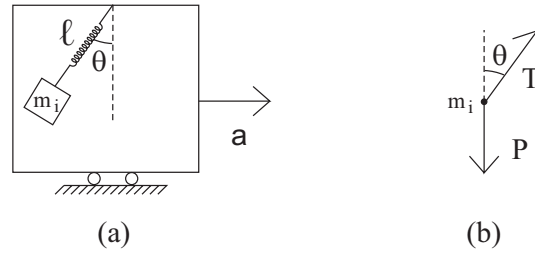



Figura 6.23: (a) Mola acelerada em relação ao solo, inclinada de um ângulo θ em relação à vertical. (b) Força peso e de tensão atuando sobre o corpo.

duas forças agindo no corpo: a força gravitacional da Terra (o peso $\vec{P} = m_g\vec{g}$) apontando verticalmente para baixo, atuando no centro do corpo, e a força exercida pela mola devido a ela estar esticada. Esta força pode ser indicada pela tensão $\vec{T}$ na mola, atuando ao longo de seu comprimento, apontando para o ponto de apoio da mola no suporte, figura 6.23 (b). Esta força atua no ponto de contato do corpo com a mola. A equação de movimento para o corpo é dada por:

$$\vec{P} + \vec{T} = m_i\vec{a} \ . \tag{6.61}$$

Usando o ângulo θ da figura 6.23 vem:

$$T \operatorname{sen} \theta = m_i a \ , \tag{6.62}$$

e

$$T \cos \theta = P \ . \tag{6.63}$$

Dividindo a equação (6.62) pela equação (6.63) e usando que $P = m_g g$, obtém-se:

$$\tan \theta = \frac{m_i a}{P} = \frac{m_i}{m_g}\frac{a}{g} \ . \tag{6.64}$$

Do fato experimental de que θ é o mesmo para todos os corpos que estão com a mesma aceleração em relação ao solo, independente de seus pesos, formas ou composições químicas, obtemos mais uma vez que a massa inercial do corpo é proporcional ao seu peso, ou que a massa inercial do corpo é proporcional à sua massa gravitacional.

A tensão na mola é dada pela equação (2.5), ou seja:

$$T = k(\ell - \ell_o) \ , \tag{6.65}$$

sendo ℓ_o seu comprimento inicial e ℓ seu comprimento quando o corpo de peso P está dependurado na mola, estando ambos com a mesma aceleração a em relação ao solo.

Combinando as equações (6.62), (6.63) e (6.65) obtém-se:

$$T = k(\ell - \ell_o) = \sqrt{m_i^2 a^2 + P^2} = \sqrt{m_i^2 a^2 + m_g^2 g^2} \ . \tag{6.66}$$

Isto significa que quanto maior for a aceleração do suporte, maior será a tensão sofrida pela mola. Esta tensão pode ser medida ou visualizada a partir da variação do comprimento da mola, $\ell - \ell_o$.

Todo fio real sempre se deforma um pouco quando é tensionado, funcionando como uma mola ao ser esticada. A diferença de um fio real para uma mola de mesmo comprimento é que a variação de comprimento do fio é muito menor do que a variação de comprimento da mola, supondo que o fio e a mola tenham o mesmo comprimento quando não estão esticados. No caso de um fio real isto significa que $\ell - \ell_o \ll \ell_o$, de tal forma que quase não se percebe sua variação de comprimento quando o fio está esticado ou tensionado. O interessante de se utilizar uma mola em vez de um fio é que a tensão sofrida pela mola é indicada visualmente por sua variação de comprimento, o mesmo já não ocorrendo com um fio ideal de comprimento fixo. Para medir a tensão no fio seria necessário utilizar um dinamômetro preso a ele.

A discussão apresentada na Seção 6.5 também se aplica quando utilizamos uma mola no lugar do fio. Em particular, as estrelas e galáxias não têm nenhuma participação na tensão ou no esticamento da mola. Podemos desaparecer com as estrelas e galáxias que a mola vai ficar esticada do mesmo jeito sempre que o

corpo preso a ela estiver acelerado em relação ao espaço absoluto. A aceleração a que aparece na equação (6.66) é a aceleração do corpo de massa m em relação ao espaço absoluto de Newton, ou em relação a um referencial inercial, não estando relacionada com a aceleração do corpo em relação ao solo, em relação às estrelas fixas, nem em relação às galáxias distantes.

6.7 Recipiente Acelerado sobre o Solo, com um Fluido em seu Interior

6.7.1 Formato da Superfície Livre do Fluido e a Pressão em Seu Interior

Vamos agora supor que temos um recipiente com um fluido sobre a mesa, sendo o recipiente acelerado por uma força externa de tal forma que ele sofra uma aceleração constante em relação ao solo, representada por $\vec{a}$. Quando o nível do fluido se estabiliza, observa-se que sua superfície livre forma um plano inclinado de um certo ângulo α em relação ao plano horizontal. A tangente deste ângulo é dada por $\tan\alpha = h/\ell$ sendo h o desnível entre a parte mais alta e mais baixa do fluido, enquanto que ℓ é a largura do recipiente, figura 6.24.

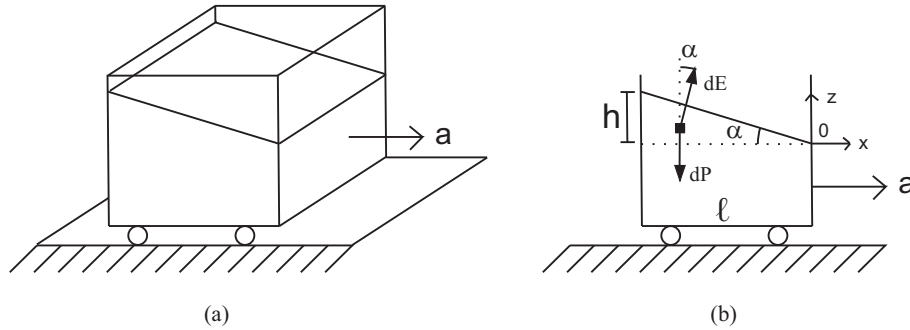



Figura 6.24: Recipiente com uma aceleração linear constante em relação ao solo, com um fluido em seu interior. (a) Visão em perspectiva. (b) Visão lateral.

Este problema vai ser tratado com a mecânica newtoniana supondo novamente um fluido ideal incompressível.[16] Vamos considerar um sistema de referência parado em relação ao solo, com x sendo a direção horizontal apontando ao longo da aceleração e z sendo a direção vertical apontando para cima. Vamos supor que em um certo instante o recipiente está passando por este sistema de referência como indicado na figura 6.24, ou seja, com a origem do sistema de coordenadas no ponto mais baixo da superfície livre do fluido e com sua parede frontal ao longo do eixo z. Vamos considerar ainda um elemento de volume dV com massa inercial dm_i e massa gravitacional dm_g situado logo abaixo da superfície do fluido, em um ponto qualquer desta superfície livre. As forças que atuam sobre ele são seu peso $d\vec{P}$ e as forças devidas ao gradiente de pressão exercidas pelo restante do fluido ao seu redor, assim como pelo ar no exterior do fluido. Esta força será representada por $d\vec{E}$, sendo o empuxo exercido sobre este elemento de volume. Esta força é normal à superfície livre do líquido, fazendo um ângulo α com a vertical ao longo do peso, figura 6.24. Pela equação (1.4) obtém-se:

$$d\vec{P} + d\vec{E} = dm_i\vec{a} \; . \tag{6.67}$$

Ou seja, com $dP = |d\vec{P}|$, $dE = |d\vec{E}|$, $a = |\vec{a}|$ e de acordo com a figura 6.24:

$$dE \operatorname{sen}\alpha\hat{x} + dE\cos\alpha\hat{z} - dP\hat{z} = dm_i a\hat{x} \; . \tag{6.68}$$

Como $dP = dm_g g$, obtém-se:

$$dE \operatorname{sen}\alpha = dm_i a \; , \tag{6.69}$$

$$dE\cos\alpha = dm_g g \; . \tag{6.70}$$

Dividindo a equação (6.69) pela equação (6.70) obtém-se, utilizando a figura 6.24:

[16][Luc80, págs. 418-421].

$$\tan\alpha = \frac{dm_i}{dm_g}\frac{a}{g} = \frac{\rho_i}{\rho_g}\frac{a}{g} = \frac{h}{\ell} \ , \tag{6.71}$$

onde $\rho_i = dm_i/dV$ é a densidade de massa inercial do fluido e $\rho_g = dm_g/dV$ é a densidade de massa gravitacional do fluido.

Ou seja, a partir das leis de Newton observa-se que o fluido fica inclinado de um ângulo α em relação à horizontal, com este ângulo dado pela equação (6.71).

Também é simples obter a pressão em um ponto qualquer do fluido. Com as equações (1.17) e (2.3) aplicadas em (6.67) obtém-se, com $d\vec{P} = dm_g\vec{g} = -dm_g g\hat{z}$ e $\vec{a} = a\hat{x}$:

$$-dm_g g\hat{z} - \frac{\partial p}{\partial x}dV\hat{x} - \frac{\partial p}{\partial y}dV\hat{y} - \frac{\partial p}{\partial z}dV\hat{z} = dm_i a\hat{x} \ . \tag{6.72}$$

Ou seja:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_i a \ , \tag{6.73}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \ , \tag{6.74}$$

e

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_g g \ . \tag{6.75}$$

A integração das equações (6.73) até (6.75) fornece:

$$p(x,\ y,\ z) = -\rho_i a x + f_1(y,\ z) \ , \tag{6.76}$$

$$p(x,\ y,\ z) = f_2(x,\ z) \ , \tag{6.77}$$

e

$$p(x,\ y,\ z) = -\rho_g g z + f_3(x,\ y) \ , \tag{6.78}$$

sendo $f_1(y,\ z)$, $f_2(x,\ z)$ e $f_3(x,\ y)$ funções arbitrárias de y e z; x e z; e de x e y, respectivamente. Combinando estas três equações obtém-se

$$p(x,\ y,\ z) = -\rho_i a x - \rho_g g z + k_1 \ , \tag{6.79}$$

sendo k_1 uma constante. Usando que no ponto mais baixo, $(x,\ y,\ z) = (0,\ 0,\ 0)$, estamos sobre a superfície livre do fluido na qual esta pressão é a pressão atmosférica p_o, obtém-se $k_1 = p_o$. Logo a pressão em um ponto qualquer é dada por:

$$p(x,\ y,\ z) = -\rho_i a x - \rho_g g z + p_o \ . \tag{6.80}$$

Usando na equação (6.80) que em todos os pontos da superfície livre do fluido a pressão é igual à atmosférica, $p(x,\ y,\ z) = p_o$, a equação desta superfície livre fica dada por (usando ainda a equação (6.71)):

$$z = -\frac{\rho_i}{\rho_g}\frac{a}{g}x = -(\tan\alpha)x = -\frac{h}{\ell}x \ , \tag{6.81}$$

de tal forma que quando $x = -\ell$ obtém-se $z = h$. Este último resultado está compatível com a figura 6.24 e com a equação (6.71).

A equação satisfeita pelas superfícies isobáricas pode ser obtida colocando $p(x,\ y,\ z) = p_1 =$ constante na equação (6.80), ou seja:

$$z = -\frac{\rho_i}{\rho_g}\frac{a}{g}x + \frac{p_o - p_1}{\rho_g g} = -(\tan\alpha)x + k_2 \ , \tag{6.82}$$

onde $k_2 \equiv (p_o - p_1)/\rho_g g =$ constante. Ou seja, estas superfícies isobáricas são planos paralelos ao plano da superfície livre do fluido dado por $z = -(\tan\alpha)x$.

Isto completa a solução deste problema de acordo com a mecânica newtoniana. O ponto importante a ser observado é que a superfície livre do líquido só fica inclinada em relação à horizontal quando o recipiente está acelerado em relação ao solo. Pela equação (6.71), a tangente deste ângulo de inclinação em relação à horizontal é proporcional à aceleração do fluido em relação à Terra.

6.7.2 A Proporcionalidade entre a Massa Inercial e a Massa Gravitacional a partir das Experiências com Fluidos Acelerados

Vamos supor que temos dois recipientes com dois fluidos de composições químicas diferentes, com estes recipientes estando lado a lado. Por exemplo, o fluido 1 pode ser água e o fluido 2 pode ser óleo. Aplicam-se externamente forças horizontais a estes dois recipientes de tal forma que eles sofram a mesma aceleração a em relação ao solo. Seja α_1 o ângulo de inclinação do fluido 1 em relação à horizontal e α_2 a inclinação do fluido 2. Da equação (6.71) obtém-se que:

$$\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{\rho_{i1}/\rho_{g1}}{\rho_{i2}/\rho_{g2}} \ . \tag{6.83}$$

Este é o resultado obtido a partir da segunda lei do movimento de Newton, juntamente com sua lei da gravitação universal.

É um dado observacional que todos os fluidos incompressíveis ficam inclinados de um mesmo ângulo α em relação à horizontal quando sofrem a mesma aceleração a em relação ao solo, não importando suas composições químicas:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \text{constante para todos os fluidos} \ . \tag{6.84}$$

Isto é, a água, o óleo, o mel, o mercúrio líquido e outros fluidos ficam inclinados do mesmo jeito quando sofrem a mesma aceleração, figura 6.25.

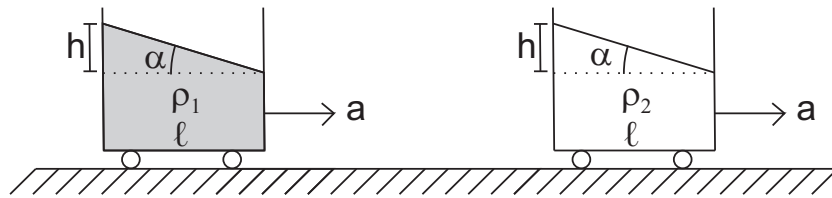



Figura 6.25: Dois fluidos incompressíveis quaisquer 1 e 2 ficam com a mesma inclinação α em relação à horizontal quando os recipientes em que estão localizados sofrem a mesma aceleração a em relação ao solo, não importando suas densidades ou composições químicas.

Ou seja, mesmo que os fluidos sejam de densidades gravitacionais diferentes, $\rho_{g1} \neq \rho_{g2}$, observa-se que $\alpha_1 = \alpha_2$, desde que $a_1 = a_2$. Aplicando o resultado experimental (6.84) na equação (6.83), obtém-se:

$$\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{\rho_{i1}/\rho_{g1}}{\rho_{i2}/\rho_{g2}} = 1 \ , \tag{6.85}$$

ou seja

$$\frac{\rho_{i1}}{\rho_{g1}} = \frac{\rho_{i2}}{\rho_{g2}} \equiv \frac{\rho_i}{\rho_g} \ . \tag{6.86}$$

Este resultado é análogo à equação (6.17) obtida a partir da igualdade da aceleração de queda livre de todos os corpos. Só que agora ele está sendo obtido a partir de uma nova situação experimental. Na experiência de queda livre soltam-se do repouso, a partir da mesma altura e no mesmo instante, uma moeda de chumbo e uma pena. Observa-se que os dois caem em direção ao solo com a mesma aceleração constante, sendo que esta aceleração de queda livre, na superfície da Terra, é encontrada como tendo o valor de $9,8\ m/s^2$. O valor desta aceleração na superfície da Terra não pode ser controlada externamente, já que depende apenas da massa gravitacional da Terra e de seu raio.

Já o resultado experimental de que $\tan\alpha_1 = \tan\alpha_2$ para os dois fluidos, não importando suas composições químicas nem suas densidades gravitacionais, é obtido para todos os valores da aceleração comum a que se fornece a estes dois recipientes. O valor desta aceleração é definido por quem aplica a força sobre o recipiente,

podendo ser escolhido arbitrariamente. O valor do ângulo α depende desta aceleração a de acordo com a equação (6.71). Logo, aumentando o valor da aceleração a, aumenta-se também o valor do ângulo α. Por outro lado, qualquer que seja o valor desta aceleração comum a fornecida aos dois recipientes, observa-se que $\tan\alpha_1 = \tan\alpha_2$, de acordo com a equação (6.84).

Utilizando então as equações (6.20) e (6.21), válidas no Sistema Internacional de Unidades, juntamente com a equação (6.71), obtém-se então para qualquer fluido incompressível acelerado em relação ao solo:

$$\tan\alpha = \frac{a}{g} = \frac{h}{\ell} \ . \tag{6.87}$$

De acordo com as equações (6.20) e (6.21), podemos representar a densidade de massa inercial ρ_i e a densidade de massa gravitacional ρ_g por um mesmo símbolo, ρ:

$$\rho_i = \rho_g \equiv \rho \ . \tag{6.88}$$

Utilizando esta relação na equação (6.80), obtém-se que a pressão em um ponto qualquer do fluido fica dada por:

$$p(x,\ y,\ z) = -\rho a x - \rho g z + p_o \ . \tag{6.89}$$

Analogamente, a equação (6.82) para as superfícies isobáricas nas quais a pressão é p_1 fica dada por:

$$z = -\frac{a}{g}x + \frac{p_o - p_1}{\rho g} = -(\tan\alpha)x + k_2 \ , \tag{6.90}$$

onde $k_2 \equiv (p_o - p_1)/\rho_g g =$ constante. Ou seja, estas superfícies isobáricas são planos paralelos ao plano da superfície livre do fluido dado por $z = -(\tan\alpha)x$.

6.7.3 Distinção entre Velocidade e Aceleração a partir da Inclinação do Fluido

É possível distinguir entre velocidade e aceleração utilizando esta experiência de um recipiente acelerado, assim como foi feito na Subseção 6.5.2 com um corpo dependurado em um fio acelerado. Na figura 6.26 é apresentado um recipiente com um fluido sobre a Terra em três situações: (a) Parado em relação ao solo, (b) deslocando-se com velocidade constante, e (c) deslocando-se com aceleração constante.

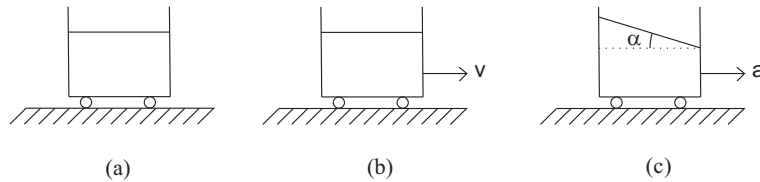



Figura 6.26: (a) Recipiente parado no solo, (b) recipiente com velocidade constante em relação ao solo, e (c) recipiente com aceleração constante em relação ao solo.

Uma pessoa dentro de um vagão de trem ou de um avião pode saber sua velocidade e aceleração olhando para os corpos do lado de fora. Mas se ela não tem vista para o lado de fora, não consegue saber se o vagão ou avião estão parados ou com uma velocidade constante em relação ao solo ao observar o nível de água de um copo de água ou de um recipiente ao seu lado. Por exemplo, enquanto uma pessoa está voando do Brasil à Europa a 700 km/h, ela pode deixar um copo com água na sua mesa que ela vai continuar plana, assim como na situação em que o avião está parado no solo. Apenas durante as trepidações, turbulências, decolagem e pouso é que o nível da água se altera, ou seja, quando a aeronave está acelerada em relação ao solo.

Por outro lado, a pessoa pode saber sua aceleração em relação ao solo sem olhar para fora, bastando analisar o nível da água. Quando ela está inclinada de um ângulo α, ela sabe que o vagão ou avião está deslocando-se com uma aceleração dada por

$$a = g\tan\alpha \ . \tag{6.91}$$

A pessoa também sabe em que sentido o vagão está acelerado, a saber, do lado mais alto para o lado mais baixo da água.

6.7.4 Distinção entre Aceleração Relativa e Aceleração Absoluta a partir da Inclinação do Fluido

É possível distinguir entre acelerações relativas e absolutas utilizando esta experiência do recipiente acelerado, assim como foi feito na Subseção 6.5.3 com um corpo dependurado em um fio acelerado.

Vamos agora discutir o significado desta aceleração. Na mecânica newtoniana esta é a aceleração do fluido em relação ao espaço absoluto, ou em relação a qualquer referencial inercial que se desloca com velocidade constante em relação ao espaço absoluto. Esta não é a aceleração do fluido em relação ao recipiente, em relação à Terra, em relação ao conjunto de estrelas, nem em relação ao conjunto de galáxias. Isto pode ser ilustrado com algumas experiências de pensamento. O comportamento do fluido nestas experiências de pensamento será previsto com a mecânica newtoniana.

Vamos considerar o referencial do papel como sendo o espaço absoluto. Na figura 6.27 (a) temos o recipiente deslocando-se com uma aceleração a, enquanto que a Terra, as estrelas e as galáxias estão paradas em relação ao espaço absoluto. A Terra só puxa o fluido para baixo, enquanto que as estrelas e galáxias não fazem forças resultantes sobre o fluido, pela equação (1.15). Sua superfície fica inclinada de um ângulo α. Na figura 6.27 (b) temos o recipiente parado em relação ao espaço absoluto, enquanto que a Terra, estrelas e galáxias deslocam-se conjuntamente com uma aceleração $-a$. A Terra só puxa para baixo, enquanto que as estrelas e galáxias não fazem forças resultantes sobre o fluido, pela equação (1.20). Sua superfície fica plana.

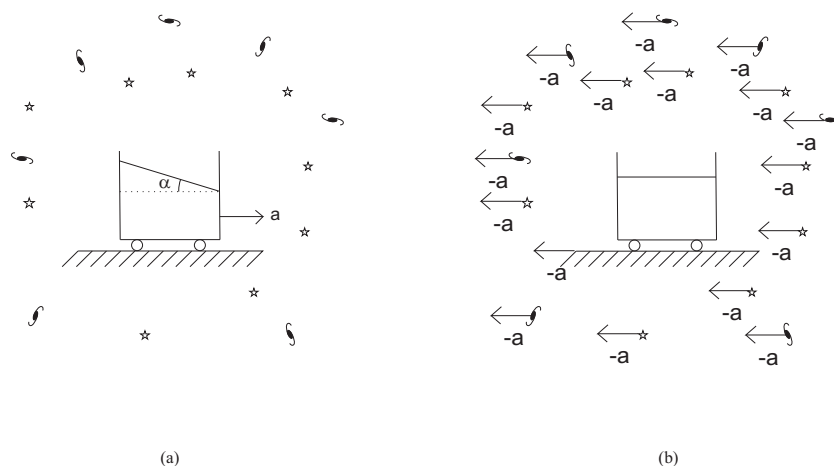



Figura 6.27: O papel está parado no espaço absoluto. (a) Fluido inclinado. (b) Fluido plano.

As situações (a) e (b) são visualmente ou cinematicamente equivalentes, já que existe a mesma aceleração relativa nos dois casos entre o fluido e a Terra, entre o fluido e as estrelas, assim como entre o fluido e as galáxias. Mas estas duas situações não são dinamicamente equivalentes. Em (a) a superfície do fluido está inclinada, com o fluido podendo entornar do recipiente se a aceleração for muito grande. Em (b) a superfície do fluido está plana.

Outra maneira de ver esta distinção entre uma aceleração relativa e uma aceleração absoluta está ilustrada na figura 6.28. Novamente o referencial do papel está sendo considerado parado em relação ao espaço absoluto. Em (a) o recipiente, o fluido, a Terra, as estrelas e galáxias estão parados, com o fluido plano. Em (b) o recipiente, o fluido, a Terra, as estrelas e as galáxias estão deslocando-se conjuntamente em relação ao espaço absoluto com uma aceleração constante a. A superfície do fluido fica inclinada de um ângulo α. A Terra puxa o fluido para baixo nos dois casos, enquanto que o conjunto de estrelas e galáxias não exercem força resultante sobre o fluido nos dois casos, de acordo com as equações (1.15) e (1.20).

As situações (a) e (b) da figura 6.28 são visualmente ou cinematicamente equivalentes, já que o recipiente com fluido está parado em relação à Terra, em relação às estrelas e em relação às galáxias nos dois casos. Mas estas duas situações não são dinamicamente equivalentes. Em (a) a superfície do fluido está plana. Em (b) a superfície do fluido está inclinada, com o fluido podendo entornar do recipiente se a aceleração for muito grande.

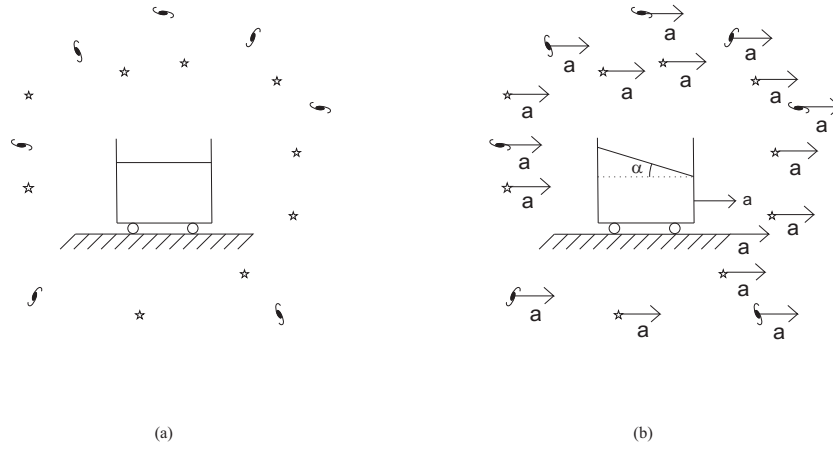



Figura 6.28: O papel está parado no espaço absoluto. (a) Fluido plano. (b) Fluido inclinado.

6.7.5 Qual Seria a Inclinação do Fluido se Todas as Estrelas e Galáxias ao Redor da Terra Fossem Aniquiladas?

Existe outra maneira de perceber que as estrelas e galáxias não influenciam no ângulo α da superfície do fluido dado pela equação (6.91). Para isto basta observar que se todas as estrelas e galáxias fossem aniquiladas do universo, sobrando apenas o recipiente, o fluido e a Terra, nenhuma alteração seria observada neste ângulo, desde que o recipiente continuasse com a mesma aceleração a em relação ao espaço absoluto, como indicado na figura 6.29. No caso (a) temos o recipiente, o fluido e a Terra parados em relação ao espaço absoluto (que está sendo identificado com o papel nesta figura), com a superfície do fluido ficando plana na horizontal. No caso (b) temos o recipiente, o fluido e a Terra deslocando-se com uma aceleração constante $\vec{a}$ em relação ao espaço absoluto. Neste caso a mecânica newtoniana prevê que a superfície do fluido ficará inclinada de um ângulo α em relação à horizontal, com este ângulo dado pela equação (6.91).

Figura 6.29: O papel está parado no espaço absoluto. (a) Fluido plano. (b) Fluido inclinado.

Todas estas conclusões se devem às equações (1.15) e (1.20) mostrando que cascas esféricas não exercem forças resultantes sobre corpos internos a elas, não interessando as acelerações destes corpos ou destas cascas. Ou seja, podemos acrescentar ou eliminar cascas materiais ao redor do recipiente, sem afetar o comportamento do fluido.

Capítulo 7

Movimentos Oscilatórios

Neste Capítulo lidamos com forças que dependem da posição e que geram movimentos oscilatórios.

7.1 Mola

7.1.1 Período e Frequência Angular de Oscilação de uma Mola

O primeiro exemplo a ser discutido aqui é o de um corpo com massa inercial m_i preso a uma mola horizontal que está conectada à Terra, figura 7.1. A mola tem uma constante elástica k e um comprimento relaxado ℓ_o. Seja ℓ seu comprimento quando está esticada ($\ell > \ell_o$) ou comprimida ($\ell < \ell_o$). O peso do corpo de teste é equilibrado pela força normal exercida por uma mesa sem atrito. A única força remanescente atuando sobre o corpo é a força horizontal exercida pela mola.

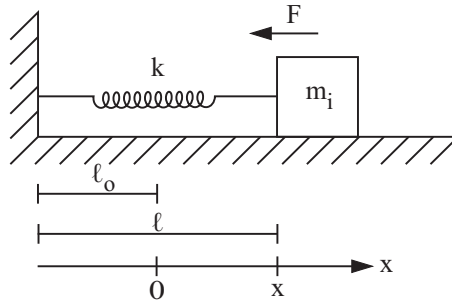



Figura 7.1: Corpo preso a uma mola horizontal que tem a outra extremidade fixa em relação ao solo.

A força exercida pela mola no corpo é dada por

$$\vec{F} = -kx\hat{x} \ , \tag{7.1}$$

onde x é o eixo horizontal. O valor de x é o deslocamento do corpo da posição de equilíbrio, $x \equiv \ell - \ell_o$, com $\hat{x}$ sendo o vetor unitário ao longo do comprimento da mola. Igualando esta relação com a equação (1.4) e usando $\vec{a} = (d^2x/dt^2)\hat{x} = \ddot{x}\hat{x}$ obtemos a equação de movimento unidimensional dada por:

$$m_i\ddot{x} + kx = 0 \ . \tag{7.2}$$

Esta equação pode ser resolvida facilmente. Sua solução é dada por:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta_o) \ , \tag{7.3}$$

onde

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_i}} = \frac{2\pi}{T} \ . \tag{7.4}$$

A constante A é a amplitude de oscilação, θ_o é a fase inicial, ω a frequência angular de oscilação e T o período para uma ida e volta completa. Este período pode ser escrito como:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_i}{k}} = \frac{2\pi}{\omega} \ . \tag{7.5}$$

As constantes A e θ_o podem ser relacionadas com a energia total E do corpo e com a posição inicial x_o por:

$$E = \frac{m_i \dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \ , \tag{7.6}$$

e

$$x_o = A\cos\theta_o \ . \tag{7.7}$$

7.1.2 A Razão entre os Períodos de Oscilação de Dois Corpos Presos a uma Mesma Mola Depende da Razão entre Suas Massas Inerciais

A partir das equações (7.4) e (7.5) obtém-se que a razão entre os períodos T_1 e T_2 de oscilação de dois corpos com massas inerciais m_{i1} e m_{i2} presos à mesma mola, assim como a razão entre os inversos de suas frequências angulares de oscilação ω_1 e ω_2, é dada por:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{\frac{m_{i1}}{m_{i2}}} \ . \tag{7.8}$$

Pelas equações (7.4) e (7.8) observa-se que o período e a frequência angular de oscilação da mola depende do valor da massa inercial do corpo que está preso nela, já que a constante elástica k é uma característica própria da mola que não depende do corpo preso a ela. Vamos supor um corpo de massa inercial $m_1 = m_i$ preso à mola oscila com uma frequência angular $\omega_1 = \sqrt{k/m_1} = \sqrt{k/m_i}$, figura 7.2 (a). Um corpo com o dobro de massa inercial, $m_2 = 2m_i$, oscilará com uma frequência angular dada por $\omega_2 = \sqrt{k/m_2} = \sqrt{k/2m_i} = \omega_1/\sqrt{2}$, figura 7.2 (b).

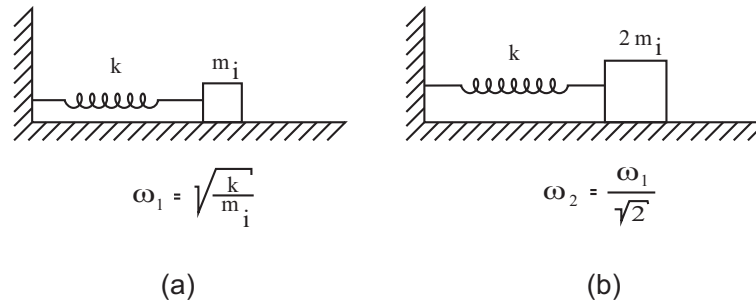



Figura 7.2: Duas massas diferentes, $m_1 = m_i$ e $m_2 = 2m_i$, ligadas na mesma mola.

Ou seja, pode-se alterar o período e a frequência angular de oscilação da mola alterando-se o valor da massa inercial que está presa a ela.

7.2 As Experiências com Pêndulo de Galileu

Galileu também foi o primeiro a estudar sistematicamente o movimento oscilatório de pêndulos. Sua motivação para este estudo foi obter algo análogo à queda livre dos corpos:[1]

> A experiência efetuada com dois móveis de pesos tão diferentes quanto possível e que se faz cair de uma altura qualquer para observar se suas velocidades são iguais apresenta algumas dificuldades; pois, se a altura é grande, o meio que deve ser aberto e lateralmente afastado pelo ímpeto do corpo em queda prejudicará muito mais o pequeno movimento do móvel mais leve que a força do mais pesado, motivo pelo qual numa longa distância o móvel leve ficará para trás; e numa pequena altura poder-se-ia duvidar de que realmente existe alguma diferença e, caso exista,

[1] [Gal85, pág. 71].

> ela é inobservável. Pensei, portanto, em repetir muitas vezes as quedas de pequenas alturas, acumulando tantas daquelas mínimas diferenças de tempo, que se intercalam entre as chegadas ao solo do corpo pesado e do corpo leve, de modo que unidas constituíssem um tempo não apenas observável, mas facilmente observável. Além disso, para dispor de movimentos, os mais lentos possíveis, nos quais a resistência do meio altera muito menos o efeito que depende da simples gravidade, pensei fazer descer os móveis num plano inclinado, não muito elevado com referência à horizontal, posto que sobre tal plano, não menos que na perpendicular, poder-se-ia perceber o comportamento dos corpos com pesos diferentes; e, indo além disso, quis também eliminar os obstáculos que pudessem nascer do contato desses móveis com o plano inclinado.

Desta forma Galileu chegou então ao estudo do pêndulo simples.

7.2.1 Relação entre o Período de Oscilação e o Comprimento do Pêndulo

Após estudar os períodos de oscilação de pêndulos com diferentes comprimentos, Galileu chegou à seguinte lei:[2]

> Quanto à proporção entre os tempos de oscilação de móveis suspensos por fios de diferentes comprimentos, esses tempos estão entre si na mesma proporção que as raízes quadradas dos comprimentos dos fios, o que quer dizer que os comprimentos estão entre si como os quadrados dos tempos, de modo tal que se queremos, por exemplo, que o tempo de oscilação de um pêndulo seja o dobro do tempo de oscilação de outro, é necessário que o comprimento do fio do primeiro seja o quádruplo do comprimento do fio do segundo. E assim, para que no tempo de uma oscilação de um pêndulo outro faça três, o fio do primeiro deve ser nove vezes mais comprido que o fio do segundo; do que se segue que os comprimentos dos fios estão entre si na proporção inversa dos quadrados dos números de oscilações realizadas no mesmo tempo.

Sejam dois pêndulos simples de comprimentos ℓ_1 e ℓ_2, figura 7.3.

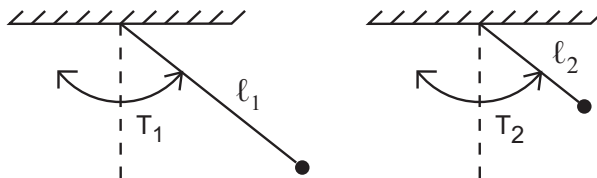



Figura 7.3: Dois pêndulos simples com comprimentos ℓ_1 e ℓ_2, sendo seus períodos de oscilação T_1 e T_2, respectivamente.

Sejam T_1 e T_2 os períodos destes pêndulos, respectivamente, ou seja, os tempos para uma oscilação completa de ida e volta para cada um deles. O resultado experimental de Galileu pode ser expresso matematicamente da seguinte maneira:

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_2}} \; . \tag{7.9}$$

7.2.2 O Período de Oscilação de um Pêndulo Não Depende de Seu Peso nem de Sua Composição Química

Em princípio estes períodos de oscilação de um pêndulo simples poderiam depender de vários outros fatores, tais como o peso dos corpos, suas composições químicas ou suas amplitudes de oscilação.

Vamos citar aqui algumas outras conclusões experimentais de Galileu:[3]

> Finalmente, tomei duas bolas, uma de chumbo e outra de cortiça, sendo aquela cem vezes mais pesada que esta, suspendendo cada uma delas por dois finíssimos fios iguais de quatro ou cinco braças de comprimento. Afastando a seguir as duas bolas da posição perpendicular, soltei-as ao mesmo tempo, e elas, seguindo as circunferências dos círculos, que têm os fios iguais como raios,

[2] [Gal85, pág. 79].
[3] [Gal85, pág. 71].

> ultrapassaram a perpendicular, retornando depois pelo mesmo caminho; ao repetir por si mesmas mais de cem vezes essas idas e voltas, mostraram claramente que a bola mais pesada acompanha o período da mais leve, de tal forma que nem em cem vibrações, nem em mil, antecipa o tempo em um mínimo momento, mas que ambas mantém o mesmo passo. Observa-se também a ação do meio o qual, aportando algum obstáculo ao movimento, diminui muito mais as vibrações da cortiça que aquelas do chumbo, sem alterar contudo suas frequências; mesmo se os arcos descritos pela cortiça não tivessem mais que cinco ou seis graus, e os arcos do chumbo cinquenta ou sessenta, eles seriam percorridos em tempos iguais.

A conclusão que Galileu tirou de experiências como estas é que o período de oscilação de um pêndulo:

- Não depende da amplitude inicial (ou seja, do ângulo inicial θ_o de inclinação do fio em relação à vertical), já que o período é o mesmo para arcos de sessenta ou de cinco graus;
- Não depende do peso do corpo, já que é o mesmo para os dois corpos embora um deles seja cem vezes mais pesado do que o outro;
- Não depende da densidade de massa gravitacional nem da composição química do corpo, já que tem o mesmo valor para o chumbo e para a cortiça.

Experiências posteriores de outros cientistas mostraram que a primeira destas conclusões era válida apenas para pequenas oscilações, ou seja, quando $\theta \ll 1\ rad$. Quando é válida esta aproximação, então de fato o período de pequenas oscilações não depende da amplitude.

Já as outras duas conclusões de Galileu mostraram-se verdadeiras em todas as situações. Seja T o período de oscilação completa de um pêndulo simples vibrando no vácuo. A partir de experiências com pêndulos observa-se que vale a seguinte relação:

$$T = \text{constante qualquer que seja o peso, a densidade ou a natureza do corpo} . \tag{7.10}$$

O aspecto mais importante e não intuitivo é que o período de oscilação não depende do peso nem da composição química do corpo.

7.2.3 Relação entre o Período de Oscilação de um Pêndulo, Seu Comprimento e a Aceleração de Queda Livre

Como foi visto na Subseção 7.2.1, Galileu obteve que o período T de oscilação de um pêndulo simples é proporcional à raiz quadrada de seu comprimento ℓ. Ele também mostrou que este período não depende do peso nem da composição química do corpo. Mas ele não chegou a relacionar este período com a aceleração g de queda livre. O primeiro a obter esta relação foi Huygens, em 1659, publicando seu resultado em 1673 no livro *O Relógio de Pêndulo*.[4] Em termos algébricos modernos, a expressão obtida por Huygens para as pequenas oscilações de um pêndulo simples pode ser colocada na seguinte forma:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} . \tag{7.11}$$

Invertendo esta relação, a aceleração de queda livre fica dada por:

$$g = 4\pi^2 \frac{\ell}{T^2} . \tag{7.12}$$

Na Seção 7.3 será visto como obter estes resultados a partir da mecânica newtoniana. Duas coisas devem ser ressaltadas aqui. A primeira é que Huygens obteve este resultado antes de Newton. O segundo aspecto é que foi a partir desta relação, juntamente com medidas do comprimento e do período de oscilação de um pêndulo simples, que ele conseguiu obter um valor preciso para a aceleração de queda livre. No Sistema Internacional de Unidades pode-se expressar o valor de g obtido por Huygens[5] como sendo dado por $9,81\ m/s^2$.

[4] [Huy13, págs. 180-186], [Huy34, págs. 348-359], [Huy86, págs. xiii-xiv, xviii-xix e 167-172] e [Bar89, págs. 454 e 528-530].

[5] [Huy13, págs. 180-186 e 264 Nota 175], [Huy34, págs. 348-359], [Huy86, págs. xiii-xiv, xviii-xix e 167-172] e [Bar89, págs. 454 e 528-530].

7.3 Pêndulo Simples na Mecânica Newtoniana

7.3.1 Período e Frequência Angular de Oscilação

Nesta Seção é analisado o movimento de um pêndulo simples de acordo com a formulação de Newton. Vamos supor que estamos no equador terrestre, sendo este um bom referencial inercial para este problema. Um corpo pequeno de dimensão típica d (tamanho, raio ou diâmetro máximo) oscila em um plano vertical preso a um fio de comprimento fixo ℓ, de tal forma que $d \ll \ell$. O corpo tem uma massa inercial m_i e uma massa gravitacional m_g. O ângulo de inclinação do pêndulo em relação à vertical será representado por θ, figura 7.4.

Todas as contas neste livro relativas a pêndulos referem-se a pêndulos simples. Ou seja, vamos desprezar os tamanhos dos corpos que estão oscilando em comparação com os comprimentos dos fios aos quais estão presos. Os corpos serão considerados como partículas pontuais.

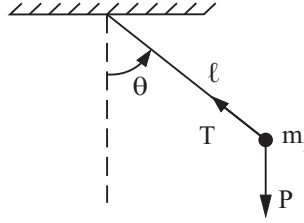



Figura 7.4: Pêndulo simples.

Desprezando a resistência do ar, existem duas forças agindo no corpo: seu peso $\vec{P} = m_g\vec{g} = -m_g g\hat{z}$ atuando verticalmente para baixo, e a tensão no fio $\vec{T}$. Esta força de tensão atua ao longo da direção do fio, apontando para seu ponto de fixação no suporte. A equação de movimento é simplesmente

$$\vec{P} + \vec{T} = m_i\vec{a} \ . \tag{7.13}$$

Vamos utilizar o ângulo θ representado na figura 7.4, o fato de que o comprimento ℓ do fio é constante e um sistema de coordenadas polares com origem no ponto de fixação do fio ao teto. O comprimento do arco descrito pelo ângulo θ é dado por $s = \ell\theta$, sua velocidade tangencial é dada por $v_\theta = \ell\dot{\theta}$, sua aceleração tangencial é dada por $a_\theta = \ell\ddot{\theta}$, enquanto que sua aceleração centrípeta é dada por $a_c = \ell\dot{\theta}^2$ (usando a equação (8.5) que será apresentada na Seção 8.1). As componentes tangenciais e radiais da equação (7.13) ficam então, respectivamente, nos seguintes formatos:

$$-P \operatorname{sen}\theta = m_i a_\theta = m_i\ell\ddot{\theta} \ , \tag{7.14}$$

e

$$T - P\cos\theta = ma_c = m\ell\dot{\theta}^2 \ . \tag{7.15}$$

Se considerarmos apenas pequenas oscilações do pêndulo ($\theta \ll 1 \ rad$) então $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$ e a equação (7.14) pode ser simplificada, ficando na forma:

$$m_i\ddot{\theta} + \frac{P}{\ell}\theta = m_i\ddot{\theta} + m_g\frac{g}{\ell}\theta = 0 \ . \tag{7.16}$$

Esta equação tem a mesma forma que a equação (7.2). Sua solução é dada por:

$$\theta(t) = A\cos(\omega t + \alpha) \ , \tag{7.17}$$

com

$$\omega = \sqrt{\frac{P}{m_i\ell}} = \sqrt{\frac{m_g}{m_i}\frac{g}{\ell}} = \frac{2\pi}{T} \ . \tag{7.18}$$

A constante A é a amplitude de oscilação para o ângulo, α é a fase inicial, ω é a frequência angular de oscilação e T o período para uma oscilação completa de ida e volta do pêndulo. Embora estejamos utilizando o mesmo símbolo T para representar tanto a tensão no fio quanto o período de oscilação, deve ser enfatizado que estes são conceitos distintos, tendo unidades de medida diferentes.

Invertendo a equação (7.18), o período de oscilação do pêndulo pode ser escrito como:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m_i \ell}{P}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_i}{m_g}\frac{\ell}{g}} \ . \tag{7.19}$$

Ou seja, com a mecânica newtoniana deduz-se corretamente que o período de oscilação de um pêndulo é proporcional à raiz quadrada de seu comprimento, de acordo com o resultado experimental obtido anteriormente por Galileu, equação (7.9).

As equações (7.18) e (7.19) podem ser utilizadas para expressar a massa inercial em função do peso do corpo, do período de oscilação de um pêndulo simples, assim como do comprimento deste pêndulo:

$$m_i = \frac{PT^2}{4\pi^2 \ell} \ . \tag{7.20}$$

Vamos supor que um corpo de massa inercial m_{i1} e peso P_1 tem um período T_1 ao oscilar em um pêndulo de comprimento ℓ, enquanto que um corpo de massa inercial m_{i2} e peso P_2 tem um período T_2 ao oscilar no mesmo pêndulo. A razão entre suas massas inerciais é então dada por:

$$\frac{m_{i1}}{m_{i2}} = \frac{P_1}{P_2}\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 \ . \tag{7.21}$$

7.3.2 A Proporcionalidade entre o Peso e a Massa Inercial a partir das Experiências com Pêndulos

Vamos agora supor que uma esfera de chumbo, c, está oscilando em um pêndulo de comprimento ℓ. O peso, massa inercial e massa gravitacional deste corpo vão ser representadas por P_c, m_{ic} e m_{gc}, respectivamente. De acordo com a equação (7.18), sua frequência angular e período de oscilação, representados por ω_c e T_c, respectivamente, são dados por:

$$\omega_c = \sqrt{\frac{P_c}{m_{ic}\ell}} = \sqrt{\frac{m_{gc}}{m_{ic}}\frac{g}{\ell}} = \frac{2\pi}{T_c} \ . \tag{7.22}$$

Se tivermos uma rolha oscilando neste mesmo pêndulo, no mesmo local da Terra, sua frequência angular e seu período de oscilação serão dados por (usando o subíndice r para as grandezas equivalentes relacionadas com a rolha, em vez do subíndice c utilizado para o chumbo):

$$\omega_r = \sqrt{\frac{P_r}{m_{ir}\ell}} = \sqrt{\frac{m_{gr}}{m_{ir}}\frac{g}{\ell}} = \frac{2\pi}{T_r} \ . \tag{7.23}$$

Isto significa que a razão entre as frequências angulares de oscilação do chumbo e da rolha (ou o inverso da razão entre seus períodos de oscilação), oscilando no mesmo pêndulo, é dada por:

$$\frac{\omega_c}{\omega_r} = \sqrt{\frac{P_c/m_{ic}}{P_r/m_{ir}}} = \sqrt{\frac{m_{gc}/m_{ic}}{m_{gr}/m_{ir}}} = \frac{T_r}{T_c} \ . \tag{7.24}$$

Utilizando apenas a mecânica newtoniana, não se pode prever o valor desta razão entre as frequências angulares de oscilação de um pêndulo com uma esfera de chumbo e de um outro pêndulo de mesmo comprimento mas com uma esfera de rolha em sua extremidade.

Vamos agora utilizar o resultado de Galileu de que todos os pêndulos de mesmo comprimento têm o mesmo período de oscilação, não importando o peso ou a composição química dos corpos que estão oscilando, equação (7.10). Este resultado, combinado com a equação (7.24), significa que:

$$\frac{\omega_c}{\omega_r} = \sqrt{\frac{P_c/m_{ic}}{P_r/m_{ir}}} = \sqrt{\frac{m_{gc}/m_{ic}}{m_{gr}/m_{ir}}} = \frac{T_r}{T_c} = 1 \ . \tag{7.25}$$

Esta equação é válida não apenas para o chumbo e a rolha, mas para qualquer outro corpo de peso P, massa gravitacional m_g e massa inercial m_i oscilando no mesmo pêndulo. Ela pode ser colocada de duas formas equivalentes, a saber:

$$\frac{P_c}{m_{ic}} = \frac{P_r}{m_{ir}} = \frac{P}{m_i} \ , \tag{7.26}$$

e

$$\frac{m_{gc}}{m_{ic}} = \frac{m_{gr}}{m_{ir}} = \frac{m_g}{m_i} \ . \tag{7.27}$$

Estas equações também podem ser escritas como a equação (6.19).

Comparamos agora as frequências angulares de oscilação ω para a mola e para o pêndulo simples, equações (7.4) e (7.18). A diferença mais marcante é que a frequência angular de oscilação da mola depende apenas de m_i, mas não depende do peso do corpo nem de sua massa gravitacional. Já no pêndulo a frequência angular de oscilação depende da razão P/m_i ou, equivalentemente, da razão m_g/m_i. Suponha agora que temos um corpo de prova com uma massa inercial m_i e uma massa gravitacional m_g. Se ele oscila horizontalmente preso a uma mola com constante elástica k sua frequência angular de oscilação é dada por $\omega_1 = \sqrt{k/m_i}$. Se ligamos dois destes corpos à mesma mola, a nova frequência angular de oscilação é dada por $\omega_2 = \sqrt{k/2m_i} = \omega_1/\sqrt{2}$, figura 7.2.

Por outro lado, se o primeiro corpo estivesse ligado a um fio de comprimento ℓ e sofresse pequenas oscilações em um plano vertical como o pêndulo que está sendo descrito nesta Seção, sua frequência angular de oscilação seria dada por: $\omega_1 = \sqrt{m_g g/m_i \ell}$. Ligando dois destes corpos ao mesmo fio, a nova frequência angular de oscilação do pêndulo é dada por $\omega_2 = \sqrt{2m_g g/2m_i \ell} = \omega_1$, figura 7.5.

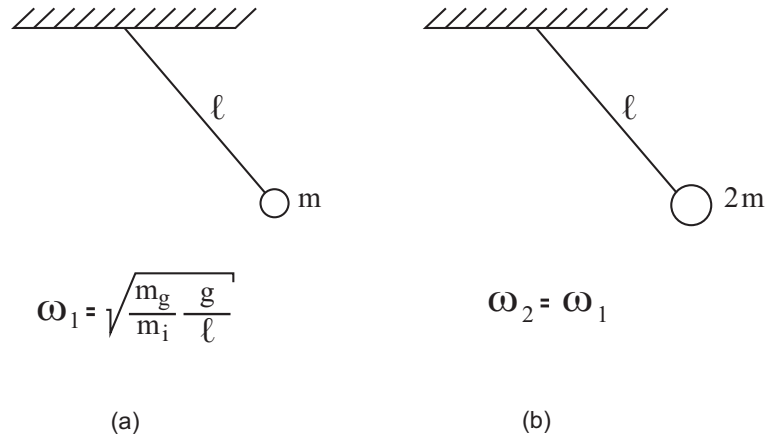



Figura 7.5: Duas massas diferentes, m e $2m$, ligadas no mesmo pêndulo.

O mesmo vai acontecer qualquer que seja a composição química do corpo. Isto é, em pêndulos de mesmo comprimento ℓ e na mesma localização sobre a Terra (mesmo g), todos os corpos oscilam com a mesma frequência no vácuo, não importando seus pesos, suas densidades, suas composições químicas etc. Este resultado é um fato experimental que não pode ser deduzido das leis do movimento de Newton já que delas não se tira a proporcionalidade entre o peso e a massa inercial, assim como não se obtém a partir delas a proporcionalidade entre a massa gravitacional e a massa inercial de um corpo. Apenas a experiência pode nos dizer que a frequência angular de oscilação de um pêndulo no vácuo não depende do peso ou da composição química do corpo preso a ele, enquanto que a frequência angular de oscilação de uma mola na horizontal é inversamente proporcional à raiz quadrada da massa inercial do corpo preso à mola.

Como visto na Subseção 6.2.2, no Sistema Internacional de Unidades a razão entre as massas inerciais e gravitacionais é definida como tendo valor unitário adimensional, equações (6.20) e (6.21). Isto significa que podemos cancelar as massas nas equações (7.18) e (7.19) e com isto escrever a frequência angular de oscilação ω do pêndulo e seu período T da seguinte maneira:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} = \frac{2\pi}{T} \ , \tag{7.28}$$

e

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \ . \tag{7.29}$$

Este resultado é equivalente à equação (7.11) obtida por Huygens e publicada em 1673. Huygens foi o primeiro cientista a relacionar o período de um pêndulo simples com seu comprimento e com a aceleração de

queda livre. Embora ele não tenha escrito esta relação na forma da equação (7.29), o resultado que obteve é equivalente a esta expressão.

7.3.3 Experiências de Newton com Pêndulos Mostrando a Proporcionalidade entre o Peso e a Massa Inercial

Apresenta-se aqui as experiências precisas de Newton com pêndulos para chegar na proporcionalidade entre a massa inercial (ou quantidade de matéria, como Newton a chamava) e o peso. Também pode-se expressar este resultado dizendo que a massa gravitacional de um corpo é proporcional à sua massa inercial. Na primeira definição do *Principia*, aquela de quantidade de matéria, equação (1.1), Newton disse:[6]

> É essa quantidade que doravante sempre denominarei pelo nome de corpo ou massa. A qual é conhecida através do peso de cada corpo, pois é proporcional ao peso, como encontrei em experimentos com pêndulos, realizados muito rigorosamente, os quais serão mostrados mais adiante.

Antes de apresentar estas experiências, citamos aqui a Proposição 24, Teorema 19 do Livro II do *Principia*, juntamente com seus Corolários 1, 6 e 7. A expressão matemática desta Proposição é a equação (7.21). Proposição 24, nas palavras de Newton:[7]

> Proposição 24. Teorema 19
>
> *As quantidades de matéria nos corpos pendulares, cujos centros de oscilação estão igualmente distantes do centro de suspensão, estão numa razão composta da razão dos pesos e da razão quadrada dos tempos de oscilação no vácuo.*
>
> [...]
>
> Corolário 1 - Portanto, se os tempos são iguais, as quantidades de matéria em cada um dos corpos são como os pesos.
>
> [...]
>
> Corolário 6 - Mas, num meio sem resistência, a quantidade de matéria no corpo pendular é diretamente como o peso comparativo e o quadrado do tempo, e inversamente como o comprimento do pêndulo. Pois o peso comparativo é a força motriz do corpo em qualquer meio pesado, como foi mostrado acima e, portanto, faz em tal meio sem resistência o mesmo que faz o peso absoluto no vácuo.
>
> Corolário 7 - E daqui surge um método de comparar corpos um com o outro em relação à quantidade de matéria em cada um; e de comparar os pesos do mesmo corpo em diferentes lugares e assim conhecer a variação de sua gravidade. E através de experiências realizadas com a maior precisão, sempre descobri que a quantidade de matéria nos corpos é proporcional a seus pesos.

Estas experiências com pêndulos estão contidas na Proposição 6, Teorema 6 do Livro III do *Principia*, já mencionada anteriormente:[8]

> Proposição 6. Teorema 6
>
> *Que todos os corpos gravitam em direção a todos os planetas e que os pesos dos corpos em direção a qualquer um dos planetas, a distâncias iguais do centro do planeta, são proporcionais às quantidades de matéria que eles contêm.*
>
> Tem sido observado por outros por um longo tempo que todos os tipos de corpos pesados (levando em conta as desigualdades de retardação que eles sofrem devido a um pequeno poder de resistência no ar) descem para a Terra *de alturas iguais* em tempos iguais. E podemos determinar esta igualdade dos tempos com grande precisão com a ajuda de pêndulos. Fiz experiências com ouro, prata, chumbo, vidro, areia, sal comum, madeira, água e trigo. Fiz duas caixas de madeira, redondas e iguais: enchi uma com madeira, e suspendi um peso igual de ouro (tão exatamente quanto pude) no centro de oscilação da outra. As caixas, penduradas por fios iguais de 11 pés,

[6] [New90, pág. 1].
[7] [New08b, págs. 85-86].
[8] [New08b, págs. 200-201].

> formavam um par de pêndulos perfeitamente iguais em peso e forma, recebendo igualmente a resistência do ar. E colocando uma ao lado da outra observei-as oscilar juntas para a frente e para trás por um longo tempo, com vibrações iguais. E, portanto, a quantidade de matéria no ouro (pelos Corolários 1 e 6, Proposição 24, Livro II) estava para a quantidade de matéria na madeira assim como a ação da força motriz (ou *vis motrix*) sobre todo o ouro estava para a ação da mesma sobre toda a madeira, isto é, como o peso de um estava para o peso do outro, o mesmo acontecendo com os outros corpos. Por estas experiências, em corpos do mesmo peso, podia manifestamente ter descoberto uma diferença de matéria menor do que a milésima parte do todo, tivesse havido qualquer diferença. [...]

A força motriz (ou *vis motrix*) a que Newton se refere aqui nada mais é do que o peso do corpo, ou seja, a força gravitacional exercida pela Terra sobre o corpo. Logo sua afirmação de que a quantidade de matéria no ouro estava para a quantidade de matéria na madeira assim como a ação da força motriz sobre todo o ouro estava para a ação da força motriz sobre toda a madeira pode ser escrita matematicamente como a equação (6.19), ou seja:

$$\frac{m_{i \text{ ouro}}}{m_{i \text{ madeira}}} = \frac{P_{\text{ouro}}}{P_{\text{madeira}}} . \tag{7.30}$$

Da equação (6.19) observa-se que a razão entre as massas inerciais de dois corpos é igual à razão entre seus pesos. No caso destas experiências de Newton todos os corpos tinham o mesmo peso. Sua conclusão a partir de suas experiências citadas nesta Proposição 6, Teorema 6 do Livro III do *Principia*, pode então ser expressa algebricamente da seguinte maneira:

$$m_{i \text{ ouro}} = m_{i \text{ prata}} = m_{i \text{ chumbo}} = m_{i \text{ vidro}} = m_{i \text{ areia}}$$

$$= m_{i \text{ sal comum}} = m_{i \text{ madeira}} = m_{i \; água} = m_{i \text{ trigo}} . \tag{7.31}$$

De acordo com suas estimativas, esta igualdade tinha a precisão de pelo menos uma parte em mil. Como trabalhou com corpos de mesmo peso, a precisão de suas medidas pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\left| \frac{m_{i \text{ madeira}} - m_{i \text{ ouro}}}{m_{i \text{ madeira}}} \right| \leq 10^{-3} . \tag{7.32}$$

Newton encontrou a mesma precisão para os outros corpos.

Às vezes se escreve esta precisão da seguinte maneira:

$$\frac{m_g}{m_i} = 1 \pm 10^{-3} . \tag{7.33}$$

Esta relação seria válida para todos os materiais (ouro, madeira, ...).

Com as experiências de Eötvos (1848-1919) no começo do século XX, a precisão desta relação foi melhorada para uma parte em 10^8, sendo que hoje em dia[9] a precisão é de uma parte em 10^{12}. Sejam a e b duas substâncias quaisquer (tais como ouro e madeira). A precisão experimental conhecida hoje em dia para a proporcionalidade entre a massa inercial e o peso pode ser expressa matematicamente da seguinte maneira:

$$\frac{m_{ia}}{m_{ib}} = \frac{P_a}{P_b} = \frac{m_{ga}}{m_{gb}} = 1 \pm 10^{-12} . \tag{7.34}$$

Vamos supor dois corpos a e b que possuem exatamente o mesmo peso, embora tenham composições químicas diferentes (tais como ouro e madeira). Hoje em dia podemos dizer que experimentalmente eles possuem a mesma massa inercial com uma precisão de uma parte em 10^{12}, a saber:

$$\left| \frac{m_{ia} - m_{ib}}{m_{ia}} \right| \leq 10^{-12} \quad \text{se} \quad P_a = P_b . \tag{7.35}$$

Discussões didáticas sobre a proporcionalidade entre a massa inercial e gravitacional podem ser encontradas em diversos trabalhos.[10]

---

[9] [WE82].

[10] [Gol68, págs. 162-172], [Luc79, págs. 103-108 e 516-525] e [Nus81, págs. 497-504].

7.4 Pêndulo Eletrizado Oscilando sobre um Ímã

Vamos discutir agora o movimento de um pêndulo simples de comprimento ℓ, massa gravitacional m_g e massa inercial m_i sofrendo pequenas oscilações devidas à atração gravitacional da Terra. Vamos supor que o pêndulo está no equador terrestre e vamos considerar a Terra como sendo um bom referencial inercial. A diferença em relação ao caso estudado na Seção 7.3 é que vamos supor que o pêndulo tem uma carga elétrica q e está oscilando nas proximidades de um grande ímã permanente,[11] como indicado na figura 7.6. Este ímã está parado em relação à Terra. Vamos supor ainda que este ímã seja um isolante ideal, tal que possamos desprezar as cargas e correntes elétricas induzidas sobre ele pela carga q. Neste problema vamos desprezar a força magnética exercida pela Terra sobre o corpo eletrizado em comparação com a força magnética exercida pelo ímã sobre o corpo eletrizado. Se estivermos nos expressando em termos do conceito de campo magnético, podemos dizer que vamos desprezar o campo magnético terrestre, supondo que ele tem uma intensidade muito menor do que o campo magnético do ímã.

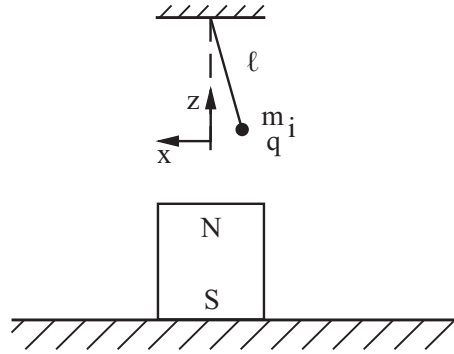



Figura 7.6: Pêndulo simples carregado oscilando sobre um grande ímã.

Neste caso, o pêndulo vai sofrer não apenas a força gravitacional terrestre (o peso P) e a tração T do fio, mas também uma força magnética devida ao ímã. Veremos que esta força magnética fará com que o plano de oscilação do pêndulo precesse, ou seja, vá girando em relação ao solo. Inicialmente vamos tratar deste problema na mecânica newtoniana utilizando as equações de Maxwell e a força eletromagnética dada pela equação (2.43). Depois analisamos o mesmo problema na mecânica newtoniana utilizando a força de Weber.

7.4.1 Precessão do Plano de Oscilação com o Eletromagnetismo Clássico

Como visto na Seção 2.9, no eletromagnetismo clássico a força magnética atuando sobre a carga é representada por

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} \ , \tag{7.36}$$

onde $\vec{v}$ é a velocidade da carga q em relação a um referencial inercial (Terra ou laboratório neste caso), sendo $\vec{B}$ o campo magnético gerado pelo ímã. Vamos supor aqui que o ímã seja grande o suficiente de tal forma que o campo magnético possa ser considerado como tendo o mesmo valor em módulo e direção, não interessando a posição da carga elétrica durante suas oscilações. De acordo com a figura 7.6, este campo magnético uniforme será considerado como apontando verticalmente para cima, $\vec{B} = B\hat{z}$. A força magnética aplicada a uma carga q que se desloca em uma região de campo magnético constante $\vec{B} = B\hat{z}$ com velocidade $\vec{v} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z}$ em relação a um referencial inercial é então dada por:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = q(v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z}) \times (B\hat{z}) = qB(v_y\hat{x} - v_x\hat{y}) \ . \tag{7.37}$$

Temos então três forças atuando sobre o pêndulo eletrizado. A primeira força é a força gravitacional exercida pela Terra, apontando para baixo e dada por $\vec{P} = m_g\vec{g} = -m_g g\hat{z}$. A segunda é a tração no fio que exerce uma força $\vec{T}$ sobre o corpo, apontando ao longo da direção do fio. E por último a força magnética exercida pelo ímã sobre a carga elétrica oscilando sobre ele, equações (7.36) e (7.37). A equação de movimento (1.4) fica então na seguinte forma:

[11][Ass98, Seção 2.5: Pêndulo carregado eletricamente], [Ass99a, Subseção 2.3.3: Electrically charged pendulum], [FA03] e [Gar10].

$$\vec{P} + \vec{T} + q\vec{v} \times \vec{B} = m_i\vec{a} \ . \tag{7.38}$$

A situação a ser analisada está representada na figura 7.7, com a origem do sistema de coordenadas no ponto mais baixo do pêndulo e com o eixo z apontando verticalmente para cima.

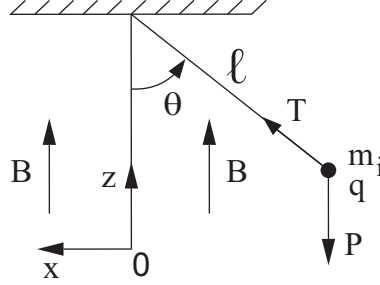



Figura 7.7: Pêndulo eletrizado oscilando em uma região de campo magnético uniforme.

Vamos supor pequenas oscilações ($\theta \ll 1 \ rad$) e que o pêndulo seja solto do ângulo inicial θ_o em repouso, isto é, com $\dot{\theta}_o = 0$. Com estas condições vem da equação (7.17) que, na ausência de força magnética, o ângulo de inclinação do fio do pêndulo em relação à vertical é dado por:

$$\theta(t) = \theta_o \cos(\omega t) \ , \tag{7.39}$$

com

$$\omega = \sqrt{\frac{P}{m_i \ell}} = \sqrt{\frac{m_g}{m_i}\frac{g}{\ell}} = \frac{2\pi}{T} \ . \tag{7.40}$$

Aqui ω é a frequência angular de oscilação e T o período para uma oscilação completa de ida e volta do pêndulo.

Com a suposição de pequenas oscilações, obtém-se que a posição horizontal $x(t)$ do pêndulo indicada na figura 7.7, na ausência de força magnética, é dada aproximadamente por:

$$x(t) = -\ell \operatorname{sen}\theta \approx -\ell\theta = -\ell\theta_o \cos(\omega t) \ . \tag{7.41}$$

Já a velocidade horizontal ao longo do eixo x é dada por:

$$v_x(t) \approx \ell\theta_o\omega \operatorname{sen}(\omega t) \ . \tag{7.42}$$

Não havendo uma força magnética, o pêndulo permaneceria sempre oscilando ao longo do plano xz do referencial inercial.

Vamos agora supor a presença do ímã, como na figura 7.6. Neste caso o pêndulo vai deixar de oscilar ao longo do mesmo plano. Sendo a velocidade inicial ao longo do eixo x, a força magnética vai ter uma componente ao longo do eixo y dada por:

$$q\vec{v} \times \vec{B} = qv_x\hat{x} \times B\hat{z} = -qv_xB\hat{y} \ . \tag{7.43}$$

Esta força vai modificar o movimento do pêndulo como indicado na figura 7.8. Nesta figura estamos vendo o pêndulo olhando de cima para baixo, como se estivéssemos em cima dele.

Ou seja, supondo um movimento inicial na direção positiva do eixo x, $v_x > 0$, e uma carga positiva, $q > 0$, a força magnética vai fazer com que o pêndulo se desvie para a direita, em direção a $y < 0$. Por outro lado, quando $q > 0$ e o pêndulo está voltando ($v_x < 0$) na presença da força magnética, ele passa a ser desviado para a esquerda, em direção a $y > 0$. Isto faz com que o plano de oscilação do pêndulo gire no sentido horário com uma velocidade angular Ω_p (olhando-o de cima para baixo, supondo $q > 0$).

Vamos calcular Ω_p supondo uma pequena força magnética, isto é:

$$\frac{qB}{m_i\omega} \ll 1 \ . \tag{7.44}$$

Esta suposição é análoga a termos uma velocidade máxima na direção x muito maior do que a velocidade máxima na direção y, ou a dizer que a velocidade na direção x quase não é afetada pelo ímã.

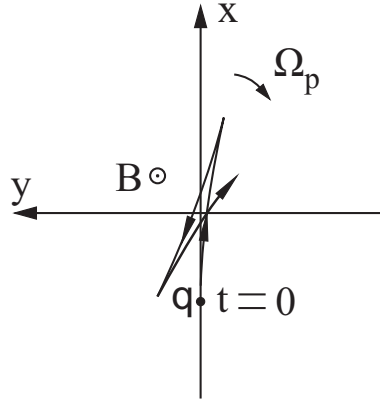



Figura 7.8: Desvio do movimento do pêndulo carregado na presença de um ímã.

Das equações (7.38), (7.42) e (7.43), obtém-se que a equação de movimento na direção y é então dada por (observando que $\vec{P} = -m_g g\hat{z}$ e que a tração $\vec{T}$ está no plano xz):

$$-qv_x B = -q\theta_o \ell\omega B \operatorname{sen}(\omega t) = m_i a_y \ . \tag{7.45}$$

Esta equação pode ser facilmente integrada duas vezes usando $v_y(t=0) = 0$ e $y(t=0) = 0$ gerando:

$$y = \frac{qB\theta_o\ell}{m_i}\left[\frac{\operatorname{sen}(\omega t)}{\omega} - t\right] \ . \tag{7.46}$$

O valor de Ω_p pode ser calculado com o auxílio da figura 7.9.

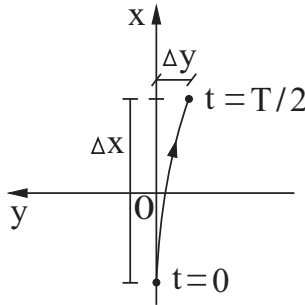



Figura 7.9: Geometria para o cálculo da precessão do plano de oscilação de um pêndulo carregado.

Em meio período, $\Delta t = T/2 = \pi/\omega$, o pêndulo moveu-se de $x_o = -\theta_o\ell$ até $x = \theta_o\ell$, de tal forma que $\Delta x = 2\theta_o\ell$. Por outro lado ele foi de $y_o = 0$ até $y = y(T/2) = -qB\theta_o\ell\pi/m_i\omega$, de tal forma que $\Delta y = -qB\theta_o\ell\pi/m_i\omega$. O valor de Ω_p é então dado por:

$$\Omega_p = \frac{\Delta y/\Delta x}{\Delta t} = -\frac{qB}{2m_i} \ . \tag{7.47}$$

O valor negativo de Ω_p indica um giro no sentido horário quando visto de cima para baixo. Para chegar neste resultado desprezamos os atritos e fizemos a suposição de que $qB/m_i\omega \ll 1$.

Vemos então que o ímã causa uma precessão do plano de oscilação de um pêndulo carregado oscilando em um referencial inercial sob a ação de uma força gravitacional uniforme. Se não houvesse o ímã, o plano de oscilação do pêndulo carregado permaneceria fixo neste referencial inercial.

7.4.2 Situações nas quais Obtém-se um Campo Magnético Uniforme

Existem três situações principais nas quais se consegue um campo magnético uniforme no eletromagnetismo clássico:

- A primeira situação está representada na figura 7.10 (a), ou seja, nas proximidades do centro de um dos polos magnéticos de um grande ímã cilíndrico, ou seja, próximo da parte central das extremidades deste ímã. Uma configuração análoga é a região entre os polos de um grande ímã de ferradura, com o formato da letra U.

- A segunda situação é a região interna de uma casca cilíndrica de comprimento infinito na qual circula uma corrente elétrica constante azimutal. Esta corrente constante pode ser obtida no interior de um longo solenoide. Também é possível obter esta corrente elétrica azimutal constante supondo a superposição de duas cascas cilíndricas uniformemente carregadas, uma delas parada e eletrizada uniformemente com carga positiva, enquanto que a outra casca cilíndrica está uniformemente eletrizada com uma carga negativa com intensidade oposta à casca positiva, sendo que esta casca negativa gira com uma velocidade angular constante em relação ao laboratório, figura 7.10 (b).

- A terceira situação está representada na figura 7.10 (c), ou seja, no interior de uma casca esférica uniformemente carregada girando com uma velocidade angular constante em relação a um referencial inercial.

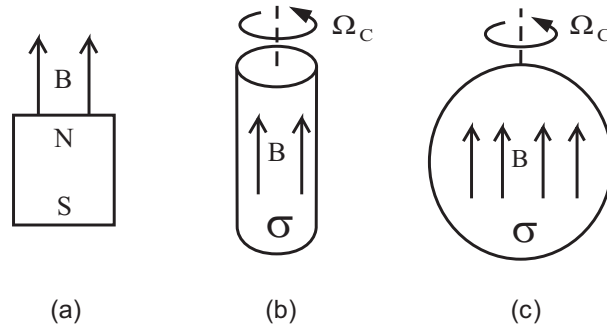



Figura 7.10: Situações de campo magnético $\vec{B}$ constante. (a) Próximo do centro da extremidade de um grande ímã cilíndrico, (b) no interior de uma casca cilíndrica na qual circular uma corrente elétrica constante azimutal, e (c) no interior de uma casca esférica uniformemente carregada girando com uma velocidade angular constante.

O campo magnético perto do centro de uma bobina de Helmholtz (1821-1894) também é aproximadamente uniforme.[12] Esta bobina contém duas bobinas circulares de mesmo raio a, com um eixo comum, separadas por uma distância $2b$ escolhida de tal forma que $2b = a$. Quando circula uma mesma corrente constante nas duas bobinas, obtém-se que o campo magnético é aproximadamente uniforme na pequena região central a meia distância entre as bobinas. Com esta escolha de que $2b = a$ obtém-se que a primeira e segunda derivadas espaciais do campo magnético ao longo do eixo das bobinas vai se anular no ponto médio entre elas.

É possível simular esta situação de um campo magnético uniforme considerando uma casca cilíndrica de comprimento infinito na qual circula uma corrente constante azimutal, figura 7.10 (b). Vamos chamar de R ao raio da casca cilíndrica que tem seu eixo orientado ao longo do eixo z de um sistema de referência inercial (a Terra, neste caso), estando a casca parada neste sistema de referência. Supõe-se que a casca cilíndrica é composta de duas densidades superficiais de carga sobrepostas, uma densidade positiva $\sigma_+ \equiv \sigma$ parada em relação à casca e ao laboratório, e uma densidade negativa $\sigma_- \equiv -\sigma$ que gira uniformemente ao redor do eixo da casca com uma velocidade angular constante $\vec{\Omega}_C \equiv -\Omega_C \hat{z}$, com $\Omega_C \equiv |\vec{\Omega}_C|$. Estas duas densidades superficiais de carga são consideradas como uniformes sobre a casca cilíndrica, tendo o mesmo valor em todos os pontos da casca. Sendo $\hat{\varphi}$ o versor de módulo unitário de um sistema de coordenadas cilíndricas, temos que a velocidade tangencial da densidade negativa de cargas, em relação ao laboratório, é dada por $\vec{v} = -R\Omega_C\hat{\varphi}$, figura 7.11.

Pode-se utilizar a equação (2.37) para calcular o campo magnético nesta situação. O resultado é que fora da casca cilíndrica ele é nulo, enquanto que dentro dela seu valor é constante e uniforme em todos os pontos, sendo dado por:[13]

[12] [RMC82, pág. 170], [Gri89, pág. 243, exercício 5.59] e [HM95, pág. 39, exercício 1-18].

[13] [FLS64, Seção 13-5, págs. 13-5 até 13-6], [Pur80, págs. 188-192], [RMC82, págs. 172 e 183], [Gri89, págs. 219-221] e [HM95, exercício 1-20, pág. 39].

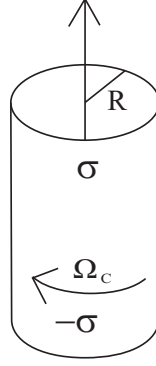



Figura 7.11: Casca cilíndrica de raio R parada em relação ao laboratório. A casca é composta de uma densidade superficial de carga σ em repouso, juntamente com uma densidade superficial de carga $-\sigma$ girando com uma velocidade angular constante $\vec{\Omega}_C$ ao redor do eixo do cilindro.

$$\vec{B} = \mu_o R \Omega_C \sigma \hat{z} = \mu_o K \hat{z} \equiv B \hat{z} \ , \tag{7.48}$$

onde $K = \sigma v = \sigma \Omega_C R$ é a densidade de corrente superficial uniforme.

Utilizando o campo magnético dado pela equação (7.48), obtém-se que a força magnética sobre uma carga deslocando-se no interior da casca cilíndrica é dada por:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = q\mu_o R \Omega_C \sigma (v_y \hat{x} - v_x \hat{y}) \ . \tag{7.49}$$

A situação em que o pêndulo eletrizado está oscilando dentro da casca cilíndrica da figura 7.11 está representada na figura 7.12.

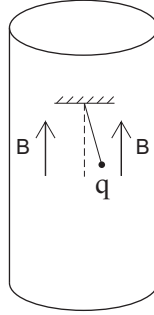



Figura 7.12: Pêndulo eletrizado oscilando dentro da casca cilíndrica da figura 7.11.

Nesta situação o resultado da equação (7.47) fica na seguinte forma:

$$\Omega_p = -\frac{q}{2m_i} \mu_o R \Omega_C \sigma = -\frac{q\mu_o R \sigma}{2m_i} \Omega_C \ . \tag{7.50}$$

Ou seja, a velocidade angular de precessão do plano de oscilação do pêndulo eletrizado é diretamente proporcional à velocidade angular das cargas negativas da casca cilíndrica. Tanto a velocidade angular de precessão do plano de oscilação do pêndulo eletrizado, quanto a velocidade angular das cargas negativas da casca cilíndrica, estão sendo consideradas aqui como ocorrendo em relação ao laboratório, que está sendo suposto como um bom referencial inercial para este problema.

Existem duas consequências muito importantes que são obtidas diretamente da equação (7.50): (I) Se pararmos estas cargas negativas sobre a casca fazendo $\Omega_C \to 0$, vai cessar a precessão do pêndulo. (II) Se desaparecermos com as densidades de cargas superficiais positiva e negativa sobre a casca cilíndrica, com $\sigma_+ = \sigma \to 0$ e com $\sigma_- = -\sigma \to 0$, a precessão do pêndulo também vai cessar.

Vamos agora modelar o caso da figura 7.10 (c). Temos uma casca esférica de raio R uniformemente carregada com uma carga total Q e com uma densidade superficial de carga $\sigma = Q/4\pi R^2$ girando com uma velocidade angular constante $\vec{\Omega}_C = \Omega_C \hat{z}$ em relação ao referencial inercial, sendo $\Omega_C \equiv |\vec{\Omega}_C|$, figura 7.13.

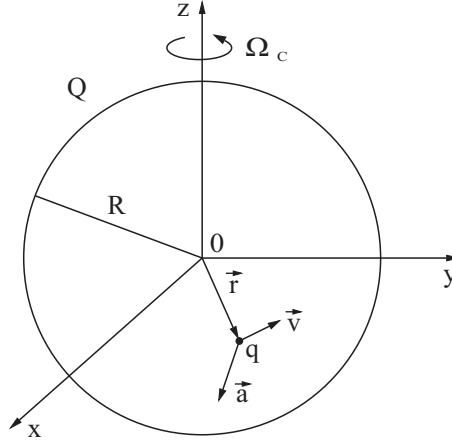



Figura 7.13: Casca esférica uniformemente eletrizada girando com velocidade angular Ω_C em relação a um referencial inercial.

Ao utilizar a equação (2.37) para calcular o campo magnético nesta situação obtém-se que fora da casca ele se comporta como um campo magnético de um dipolo, enquanto que dentro da casca o campo magnético tem um valor constante e uniforme em todos os pontos dado por:[14]

$$\vec{B} = \frac{\mu_o Q \vec{\Omega}_C}{6\pi R} = \frac{\mu_o Q \Omega_C}{6\pi R}\hat{z} = \frac{2}{3}\mu_o \sigma R \vec{\Omega}_C \equiv B\hat{z} \ . \tag{7.51}$$

O mesmo campo magnético é obtido com uma casca esférica tendo carga total $-Q$ girando com uma velocidade angular constante $-\vec{\Omega}_C$.

Utilizando este campo magnético obtém-se que a força magnética sobre uma carga deslocando-se no interior da casca esférica representada na figura 7.10 (c) é dada por:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = \frac{\mu_o q Q}{6\pi R}\vec{v} \times \vec{\Omega}_C = \frac{\mu_o q Q \Omega_C}{6\pi R}(v_y \hat{x} - v_x \hat{y}) \ . \tag{7.52}$$

A situação em que o pêndulo eletrizado está oscilando dentro desta casca esférica está representada na figura 7.14.

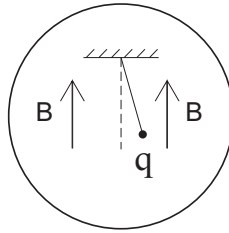



Figura 7.14: Pêndulo eletrizado oscilando dentro da casca esférica da figura 7.10 (c).

Nesta situação o resultado da equação (7.47) fica na seguinte forma:

$$\Omega_p = -\frac{qB}{2m_i} = -\frac{\mu_o q Q}{12\pi m_i R}\Omega_C \ . \tag{7.53}$$

Ou seja, a velocidade angular de precessão do plano de oscilação do pêndulo eletrizado é diretamente proporcional à velocidade angular das cargas da casca esférica. Tanto a velocidade angular Ω_p de precessão do plano de oscilação do pêndulo eletrizado, quanto a velocidade angular Ω_C das cargas superficiais sobre a casca esférica, estão sendo consideradas aqui em relação ao laboratório, que está sendo suposto como um bom referencial inercial para este problema.

Novamente temos duas consequências extremamente importantes obtidas pela equação (7.53). (I) Se pararmos estas cargas superficiais fazendo $\Omega_C \to 0$, vai cessar a precessão do pêndulo. (II) Além disso,

[14] [Fey64, exercício 14-6, págs. 14-3 e 14-4], [BT64, págs. 61 e 250] e [Gri89, págs. 229-230].

Ω_p também é proporcional à quantidade de carga Q sobre a casca esférica. Se triplicarmos Q, mantendo a velocidade angular da casca em relação ao laboratório, triplicaremos Ω_p. Por outro lado, ao desaparecer com as cargas superficiais fazendo com que $Q \to 0$, a velocidade angular de precessão do plano de oscilação do pêndulo também vai desaparecer.

7.4.3 Precessão do Plano de Oscilação com a Eletrodinâmica de Weber

O mesmo problema pode ser analisado utilizando a mecânica newtoniana juntamente com a força de Weber, equação (2.21). Todas as velocidades e acelerações mencionadas aqui devem ser entendidas em relação ao referencial terrestre que está sendo suposto um bom referencial inercial para analisar este problema.

Inicialmente vamos considerar a situação da figura 7.10 (b). Vamos considerar então a casca cilíndrica da figura 7.11 que contém duas densidades superficiais de carga sobrepostas e uniformemente distribuídas sobre o cilindro: Uma densidade superficial de carga positiva com densidade $\sigma_+ = \sigma$ parada em relação ao laboratório, e uma densidade superficial de carga negativa com densidade $\sigma_- = -\sigma$ que gira em relação ao laboratório com uma velocidade angular constante $\vec{\Omega}_C \equiv -\Omega_C \hat{z}$, com $\Omega_C \equiv |\vec{\Omega}_C|$. A integração da força de Weber exercida pelas densidades de carga positiva e negativa da casca cilíndrica atuando sobre uma carga q ao passar sobre o eixo de simetria do cilindro, deslocando-se com velocidade $\vec{v}$ em relação à casca cilíndrica, é dada por:[15]

$$\vec{F} = q\mu_o R\Omega_C\sigma(v_y\hat{x} - v_x\hat{y}) \ . \tag{7.54}$$

Este resultado coincide com a equação (7.49), mas com uma diferença importante. No caso da força magnética dada pela equação (7.36), a velocidade $\vec{v}$ é usualmente interpretada como sendo a velocidade da carga em relação a um referencial inercial. Já no caso da eletrodinâmica de Weber, a velocidade que aparece na equação (7.54) é a velocidade da carga q em relação ao eixo do cilindro (ou seja, em relação à densidade positiva de carga $\sigma_+ = \sigma$, que está sendo suposta em repouso em relação ao cilindro). Contudo, como estamos supondo o ímã parado em relação à Terra (que supomos ser um bom referencial inercial neste caso), não vai haver diferença fundamental entre as expressões da eletrodinâmica de Weber e do eletromagnetismo clássico para esta situação. Vamos supor ainda que a carga teste está sempre próxima ao eixo da casca cilíndrica, ou que sua distância ρ a este eixo seja sempre muito pequena comparada com o raio R da casca cilíndrica, $\rho \ll R$, de tal forma que podemos considerar a equação (7.54) como representando a força exercida pelas cargas da casca cilíndrica sobre a carga teste enquanto ela está oscilando no pêndulo.

Como este resultado coincide com aquele obtido pela força magnética, equação (7.49), o resultado final da precessão do plano de oscilação do pêndulo também será o mesmo, a saber, aquele dado pela equação (7.50):

$$\Omega_p = -\frac{q\mu_o R\sigma}{2m_i}\Omega_C \ . \tag{7.55}$$

As consequências obtidas desta equação (7.55) são as mesmas que haviam sido obtidas com o eletromagnetismo clássico, a saber: (I) A velocidade angular Ω_p de precessão do plano de oscilação do pêndulo é proporcional à velocidade angular Ω_C das cargas negativas sobre a superfície cilíndrica. Isto significa que a precessão do plano de oscilação do pêndulo vai se anular ao pararmos as cargas negativas que estão girando ao redor do cilindro. (II) A velocidade angular Ω_p também é proporcional às densidades superficiais de cargas positivas e negativas sobre o cilindro, $\sigma_+ = \sigma$ e $\sigma_- = -\sigma$. Logo, ao desaparecermos com estas cargas fazendo $\sigma \to 0$, a precessão do plano de oscilação também vai desaparecer.

Vamos agora considerar a situação da figura 7.10 (c). Temos então uma casca esférica de raio R uniformemente eletrizada com uma carga Q e densidade superficial de carga $\sigma = Q/(4\pi R^2)$. Supõe-se que esta casca gire com uma velocidade angular constante $\vec{\Omega}_C = \Omega_C\hat{z}$ em relação a um sistema de referência inercial, com $\Omega_C = |\vec{\Omega}_C|$. Vamos supor que o centro desta casca coincida com a origem O de um sistema de referência inercial. Uma carga pontual q localizada no vetor posição $\vec{r}$ desloca-se no interior da casca, em relação a este referencial inercial, com uma velocidade $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ e com uma aceleração $\vec{a} = d\vec{v}/dt = d^2\vec{r}/dt^2$, figura 7.13. No Apêndice A, Seção A.1, mostra-se como integrar a força de Weber exercida por esta casca girando ao atuar sobre uma carga deslocando-se em seu interior.

A força de Weber exercida pela casca sobre a carga em seu interior é dada por:[16]

[15][Ass89b], [Ass92a], [Ass93a], [AT94] e [Ass94, Seções 6.7, 7.3 e 7.4].
[16][Ass89a], [Ass92a] e [Ass94, Seção 7.3].

$$\vec{F} = \frac{\mu_o q Q}{12\pi R}\left[\vec{a} + \vec{\Omega}_C \times (\vec{\Omega}_C \times \vec{r}) + 2\vec{v} \times \vec{\Omega}_C + \vec{r} \times \frac{d\vec{\Omega}_C}{dt}\right] . \tag{7.56}$$

Vamos supor uma casca girando com velocidade angular constante, $d\vec{\Omega}_C/dt = \vec{0}$. Além desta força, também atuam sobre o pêndulo a força gravitacional terrestre (peso $\vec{P}$) e a tensão $\vec{T}$ no fio. Aplicando a mecânica newtoniana em conjunto com a eletrodinâmica de Weber, a equação de movimento (1.5) para este caso fica então na forma

$$\vec{P} + \vec{T} + \frac{\mu_o q Q}{12\pi R}\left[\vec{a} + \vec{\Omega}_C \times (\vec{\Omega}_C \times \vec{r}) + 2\vec{v} \times \vec{\Omega}_C\right] = m_i \vec{a} . \tag{7.57}$$

Supondo $|(\mu_o qQ)/(12\pi R)| \ll m_i$, podemos desprezar o primeiro termo do colchetes em relação ao termo do lado direito desta equação. Vamos aqui supor também que o termo centrífugo, proporcional a $\vec{\Omega}_C \times (\vec{\Omega}_C \times \vec{r})$, também possa ser desprezado, já que não leva a uma precessão do plano de oscilação do pêndulo, que é a grandeza que nos interessa obter. Neste caso esta equação simplifica-se para a seguinte forma:

$$\vec{P} + \vec{T} + \frac{\mu_o q Q}{6\pi R}\vec{v} \times \vec{\Omega}_C = m_i \vec{a} . \tag{7.58}$$

A componente magnética desta força é idêntica à força magnética dada pela equação (7.52). Com isto obtém-se o mesmo resultado final para a velocidade angular de precessão do plano de oscilação do pêndulo, Ω_p, dada pela equação (7.53):

$$\Omega_p = -\frac{\mu_o q Q}{12\pi m_i R}\Omega_C . \tag{7.59}$$

As consequências da equação (7.59) também são as mesmas que haviam sido obtidas no eletromagnetismo clássico, a saber: (I) A velocidade angular Ω_p de precessão do plano de oscilação do pêndulo em relação ao laboratório é proporcional à velocidade angular Ω_C destas cargas distribuídas sobre a superfície da casca esférica. Quando se anula Ω_C, obtém-se que Ω_p também vai a zero. (II) A velocidade angular Ω_p também é proporcional à quantidade de carga Q sobre a casca esférica. Ao anular Q, obtém-se que Ω_p também se anula.

Na figura 7.15 ilustramos o pêndulo eletrizado visto de cima oscilando dentro de uma casca esférica eletrizada que gira ao seu redor, na situação em que o pêndulo e a casca possuem cargas de mesmo sinal. Observa-se que o plano de oscilação do pêndulo gira em sentido contrário à casca. Ou seja, se a casca esférica girar no sentido anti-horário, o plano de oscilação do pêndulo vai girar no sentido horário.

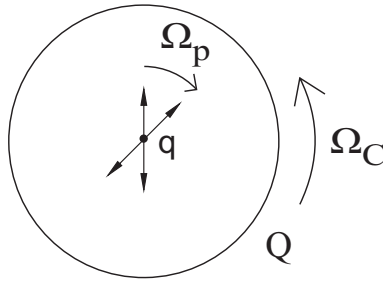



Figura 7.15: Quando o pêndulo e a casca ao seu redor possuem cargas de mesmo sinal, o plano de oscilação do pêndulo gira em sentido contrário à casca.

Já na figura 7.16 ilustramos o pêndulo eletrizado visto de cima oscilando dentro de uma casca esférica eletrizada girando ao seu redor, quando a carga da casca possui sinal contrário à carga do pêndulo. Observa-se que o plano de oscilação do pêndulo gira no mesmo sentido que a casca. Ou seja, se a casca esférica girar no sentido anti-horário, o plano de oscilação do pêndulo também vai girar no sentido anti-horário.

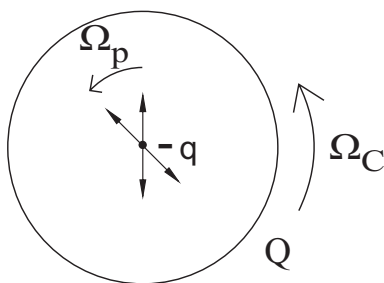



Figura 7.16: Quando o pêndulo e a casca ao seu redor possuem cargas de sinais opostos, o plano de oscilação do pêndulo gira no mesmo sentido que a casca.

Capítulo 8

Movimento Circular Uniforme

8.1 Aceleração Centrípeta

Neste Capítulo discutimos três situações de movimento circular uniforme que foram analisadas por Newton: Um planeta orbitando ao redor do Sol no referencial das estrelas fixas, dois globos ligados por uma corda girando em relação ao espaço absoluto, e um balde com água girando em relação ao solo.

Inicialmente consideramos um único corpo de massa inercial m_i sob a influência de uma força central $\vec{F}$, figura 8.1, descrevendo uma órbita circular em um sistema de referência inercial.

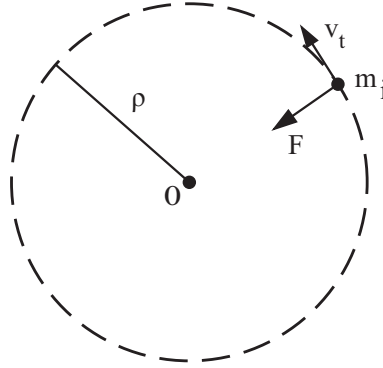



Figura 8.1: Movimento circular uniforme pela ação de uma força central, em um referencial inercial.

Consideramos uma força central sempre direcionada para a origem O de um sistema de coordenadas inercial S: $\vec{F} = -F\hat{\rho}$, onde $F = |\vec{F}|$ é o módulo da força e $\hat{\rho}$ é um vetor unitário radial que aponta para fora a partir de O. Com um sistema de coordenadas polares $(\rho,\ \varphi)$ para descrever a posição, velocidade e aceleração de uma partícula temos, respectivamente:

$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} \ , \tag{8.1}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v_\rho\hat{\rho} + v_\varphi\hat{\varphi} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\varphi}\hat{\varphi} \ , \tag{8.2}$$

e

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = a_\rho\hat{\rho} + a_\varphi\hat{\varphi} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\hat{\rho} + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\hat{\varphi} \ , \tag{8.3}$$

onde $\rho = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$, com z sendo o eixo normal ao plano da órbita passando pela origem do sistema de coordenadas.

Com a equação (1.4) e com um raio ρ constante (movimento circular uniforme) obtemos que o módulo da força é dado por:

$$F = m_i|a_\rho| = m_i\rho\dot{\varphi}^2 \ . \tag{8.4}$$

É comum definir o módulo da aceleração radial a_ρ como sendo a aceleração centrípeta, a_c, a saber:

$$a_c = |a_\rho| = \rho\dot{\varphi}^2 = \frac{v_t^2}{\rho} \ , \tag{8.5}$$

onde a velocidade tangencial, v_t, é dada por:

$$v_t = \rho\dot{\varphi} \ . \tag{8.6}$$

Com isto a equação (8.4) pode então ser expressa da seguinte forma:

$$F = m_i a_c = m_i \rho \dot{\varphi}^2 \ . \tag{8.7}$$

Sendo a força e o raio constantes, esta equação leva ao seguinte resultado:

$$\dot{\varphi} = \text{constante} \ . \tag{8.8}$$

Huygens e Newton foram os primeiros a obter expressões análogas às equações (8.5) e (8.7) para a aceleração de um corpo girando com velocidade constante ao redor de um centro e para a força atuando sobre este corpo. Huygens não tinha o conceito newtoniano de massa e falava apenas do peso do corpo. No caso de Huygens ele calculou a *força centrífuga*. Este foi um nome cunhado por Huygens, significando uma tendência a se afastar do centro. Ele estava interessado na força centrífuga exercida pelo corpo sobre o fio que o prende. Ele chegou na expressão da força centrífuga em 1659, redigindo um manuscrito em latim sobre esta força, *De Vi Centrifuga* [Sobre a Força Centrífuga], que só chegou a ser publicado postumamente em 1703.[1] Contudo, em seu livro *O Relógio de Pêndulo*, publicado em 1673, apresentou as principais propriedades da força centrífuga, sem contudo dar as provas de como chegou nelas.[2] As provas só vieram em seu trabalho sobre a força centrífuga publicado em 1703. Huygens foi então o primeiro a publicar o valor correto desta aceleração e da força centrífuga em 1673.

Newton calculou a *força centrípeta* (um nome que Newton cunhou para se opor à expressão criada Huygens) entre 1664 e 1666, sem conhecer os resultados de Huygens. No *Principia* de 1687 faz amplo uso da força centrípeta e da aceleração centrípeta.[3] Sua definição de força centrípeta aparece no início do *Principia*:[4]

> *Definição V: Uma força centrípeta é aquela pela qual os corpos são dirigidos ou impelidos, ou tendem de qualquer maneira, para um ponto como centro.*

Deve ser observado que esta força central muda apenas a direção do movimento, mantendo o módulo da velocidade tangencial constante: $|\vec{v}_t| = $ constante.

8.2 Órbita Circular de um Planeta

8.2.1 Planeta Orbitando ao Redor do Sol

A primeira situação analisada aqui é a de um planeta orbitando ao redor do Sol devido à atração gravitacional entre eles. O problema vai ser analisado no referencial das estrelas fixas, ou seja, em relação ao pano de fundo das estrelas distantes. Consideramos a massa gravitacional do planeta, m_{gp}, muito menor do que a massa gravitacional do Sol, m_{gS}, de tal forma que podemos desprezar o movimento do Sol, ver a figura 8.2. Embora a órbita dos planetas sejam elípticas em geral, vamos considerar aqui apenas o caso particular das órbitas circulares em que as distâncias dos planetas ao Sol são constantes.

Das equações (1.7) e (8.7) obtemos, com F sendo o módulo da força e com r sendo a distância entre o planeta e o Sol:

$$F = G\frac{m_{gS}m_{gp}}{r^2} = m_{ip}a_{cp} = m_{ip}\frac{v_{tp}^2}{r} \ . \tag{8.9}$$

A aceleração centrípeta do planeta é então dada por:

$$a_{cp} = \frac{v_{tp}^2}{r} = \frac{m_{gp}}{m_{ip}}\frac{Gm_{gS}}{r^2} \ . \tag{8.10}$$

[1] Existem traduções para as línguas alemã, francesa e inglesa: [Huy03], [Huy29] e [Huy].
[2] [Huy13, págs. 190-192], [Huy34, págs. 366-368] e [Huy86, págs. xx-xxi e 173-178].
[3] [Bar89, Seções 8.2, 9.7-9.9 e 10.5-10.6].
[4] [New90, pág. 3].

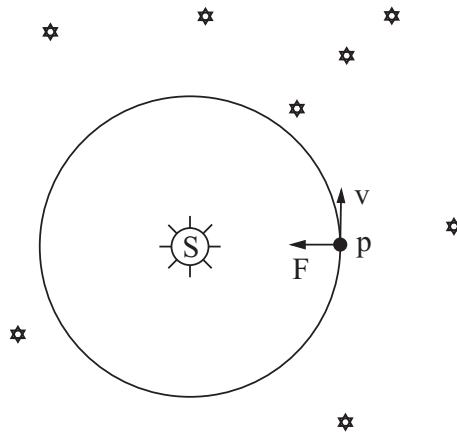



Figura 8.2: Planeta orbitando ao redor do Sol, no referencial das estrelas fixas.

8.2.2 Proporcionalidade entre a Massa Inercial e a Massa Gravitacional de Qualquer Planeta a partir da Terceira Lei de Kepler

A terceira lei do movimento planetário de Kepler, publicada pela primeira vez em 1619, afirma o seguinte em linguagem moderna:[5]

> Os quadrados dos períodos de revolução de dois planetas quaisquer estão entre si como os cubos das suas distâncias médias ao Sol.

Ele descobriu-a em 1618:[6]

> Em 8 de março do presente ano de 1618, se quisermos datas exatas, [a solução] me veio à cabeça. Mas não tive sorte e quando a verifiquei mediante cálculos, rejeitei-a por falsa. Afinal, voltou novamente a mim em 15 de maio, e em novo ataque conquistou a treva do meu espírito; concordava tão perfeitamente com os dados ministrados pelos meus dezessete anos de trabalho nas observações de Ticho, que, a princípio, julguei estar sonhando, ou haver cometido uma **petitio principi**...

A formulação do próprio Kepler para sua terceira lei é a seguinte:[7]

> A razão que existe entre os tempos periódicos de quaisquer dois planetas é precisamente a razão da 3/2ª potência das distâncias médias.

De acordo com a equação (8.10), o período T_p para uma órbita completa do planeta ao redor do Sol, em relação às estrelas fixas, é dado por:

$$T_p = \frac{2\pi r}{v_{tp}} = 2\pi r \sqrt{\frac{m_{ip}}{m_{gp}} \frac{r}{G m_{gS}}} \ . \tag{8.11}$$

Ou seja, o quadrado deste período é proporcional ao cubo da distância entre o planeta e o Sol:

$$T_p^2 = 4\pi^2 \frac{m_{ip}}{m_{gp}} \frac{r^3}{G m_{gS}} \ . \tag{8.12}$$

Vamos supor que temos dois planetas 1 e 2 descrevendo órbitas circulares ao redor do Sol a distâncias r_1 e r_2 de seu centro, deslocando-se com velocidades v_1 e v_2 em relação ao referencial das estrelas fixas, figura 8.3.

De acordo com a equação (8.11), se os períodos das órbitas destes planetas são T_1 e T_2, respectivamente, a razão entre estes períodos é dada por:

---
[5] [Koe89, pág. 273].
[6] [Koe89, págs. 273-274].
[7] [Kep02, *Harmonias do Mundo*, Livro V, Cap. 3, Prop. 8, pág. 14].

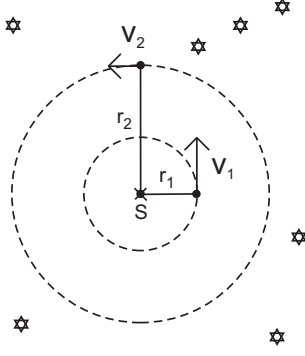



Figura 8.3: Dois planetas orbitando a distâncias r_1 e r_2 do Sol, deslocando-se com velocidades v_1 e v_2 em relação ao referencial das estrelas fixas.

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{m_{i1}/m_{g1}}{m_{i2}/m_{g2}}} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{3/2} . \tag{8.13}$$

Matematicamente a terceira lei de Kepler pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{3/2} . \tag{8.14}$$

Combinando as equações (8.13) e (8.14) obtém-se que as razões entre a massa inercial e a massa gravitacional de todos os planetas que orbitam ao redor do Sol têm o mesmo valor:

$$\frac{m_{i1}}{m_{g1}} = \frac{m_{i2}}{m_{g2}} . \tag{8.15}$$

Esta equação é análoga à equação (6.17), sendo agora obtida para os planetas orbitando ao redor do Sol. Ou seja, apesar da diferença entre os tamanhos, densidades ou composições químicas entre os planetas, a razão entre m_i e m_g de um certo planeta é igual à razão entre m_i e m_g de qualquer outro planeta.

Outra maneira de expressar este resultado é dizendo que a razão entre as massas inerciais de dois planetas orbitando ao redor do Sol estão entre si como a razão entre as massas gravitacionais destes planetas, ou seja:

$$\frac{m_{i1}}{m_{i2}} = \frac{m_{g1}}{m_{g2}} . \tag{8.16}$$

O mesmo raciocínio pode ser aplicado para quaisquer dois satélites (duas luas) que orbitam ao redor de Júpiter, ou para quaisquer dois satélites que orbitam ao redor de qualquer outro planeta, já que estas órbitas também satisfazem à terceira lei de Kepler.

É relevante ressaltar aqui que a equação (8.16) mostra que a razão entre as massas inerciais de dois planetas é igual à razão entre as massas gravitacionais destes planetas. Por outro lado, seria incorreto dizer que esta razão também é igual à razão entre os pesos destes dois planetas, como aconteceu no caso da equação (6.19). No caso dos planetas seria incorreto afirmar isto, já que estão a diferentes distâncias do Sol. E o peso de cada planeta em relação ao Sol, que nada mais é do que a força gravitacional exercida entre cada planeta e o Sol, varia com o inverso da distância entre cada planeta e o Sol. Ou seja, só é possível afirmar que a razão entre as massas inerciais de dois corpos é igual à razão entre os pesos destes dois corpos, caso eles estejam à mesma distância do corpo que está exercendo a força gravitacional sobre eles. Isto ocorria no caso da queda livre de dois corpos na superfície da Terra, por isto foi possível chegar na equação (6.19). Se este não for o caso, então só se pode afirmar que a razão entre as massas inerciais destes corpos é igual à razão entre suas massas gravitacionais, equação (8.16).

No Sistema Internacional de Unidades esta razão constante entre a massa inercial e gravitacional de qualquer corpo é definida como tendo o valor unitário adimensional, equação (6.20). Utilizando este fato nas equações (8.10) e (8.11) obtém-se:

$$a_{cp} = \frac{v_{tp}^2}{r} = \frac{Gm_{gS}}{r^2} , \tag{8.17}$$

e

$$T_p = \frac{2\pi r}{v_{tp}} = 2\pi r \sqrt{\frac{r}{Gm_{gS}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{Gm_{gS}}} r^{3/2} \ . \tag{8.18}$$

Isto é, a aceleração centrípeta, a velocidade orbital ou o período da órbita não dependem da massa do planeta, mas apenas da massa gravitacional do Sol.

Nesta Seção está sendo analisada a órbita circular de um planeta ao redor do Sol. Uma pergunta interessante que pode ser feita é a seguinte. Como pode o planeta manter uma distância constante ao Sol (ou a Lua manter uma distância constante em relação à Terra, por exemplo), apesar da atração gravitacional entre eles? De acordo com Newton, o planeta só pode manter uma distância constante ao Sol pelo fato de ter uma aceleração centrípeta em relação ao espaço absoluto. Também pode ser afirmado que esta distância constante só é possível devida à aceleração centrípeta do planeta em relação a um referencial inercial. Isto é, se o planeta e o Sol estivessem inicialmente em repouso em relação a um referencial inercial, eles iriam se atrair e se aproximar um do outro devido a esta atração, até que colidissem entre si. O que mantém o planeta a uma distância constante do Sol, apesar da atração gravitacional entre eles, é a aceleração centrípeta do planeta no espaço absoluto, isto é, seu movimento tangencial com relação ao Sol. Voltaremos a discutir este aspecto.

8.2.3 A Massa Inercial de Qualquer Corpo Parece estar Associada às Interações Gravitacionais deste Corpo

Na Subseção 6.2.2 foi visto que a razão entre as massas inerciais de dois corpos é igual à razão entre as massas gravitacionais destes corpos, já que a aceleração de queda livre na superfície da Terra é a mesma para todos os corpos. O mesmo vale para os planetas que orbitam ao redor do Sol quando se utiliza a terceira lei de Kepler em conjunto com a lei de Newton da gravitação, como visto na Subseção 8.2.2. Por outro lado, na Seção 6.3 foi visto que a razão entre as massas inerciais de dois corpos não é sempre igual à razão entre as cargas elétricas destes corpos já que, por exemplo, um próton e uma partícula alfa sofrem acelerações diferentes no interior de um mesmo capacitor uniformemente eletrizado.

Nas Subseções 7.3.2 e 7.3.3 foi visto que a razão entre as massas inerciais de dois corpos é igual à razão entre as massas gravitacionais destes corpos, já que um mesmo pêndulo tem sempre a mesma frequência de pequenas oscilações na superfície da Terra, não importando o peso nem a composição química do corpo que está oscilando. Por outro lado, foi visto também na Subseção 7.1.2 que a razão entre as massas inerciais de dois corpos não é sempre igual à razão entre as forças elásticas que atuam sobre eles já que, por exemplo, se um corpo de massa inercial m_1 tem uma frequência angular de oscilação ω_1 ao oscilar na horizontal preso a uma mola, dois destes corpos (com uma massa inercial $m_2 = 2m_1$), presos à mesma mola, têm uma frequência angular de oscilação $\omega_2 = \omega_1/\sqrt{2}$, ou seja, uma frequência angular de oscilação diferente de ω_1.

Analogamente, pode ser mostrado que a massa inercial, a força inercial ou a inércia de um corpo não estão relacionadas com nenhuma propriedade magnética, nuclear ou de qualquer outro tipo, seja do corpo de prova ou do meio que o circunda. Newton expressou este fato no Corolário 5, Proposição 6 do Livro III do *Principia*:[8]

> Corolário 5 - O poder da gravidade é de uma natureza diferente do poder do magnetismo, pois a atração magnética não é como a matéria atraída. Alguns corpos são mais atraídos pelo ímã, outros menos, a maioria dos corpos não sofre qualquer atração. O poder do magnetismo num mesmo corpo pode ser aumentado e diminuído, sendo algumas vezes muito mais forte, pela quantidade de matéria, do que o poder da gravidade. E, ao se afastar do ímã, decai não como o quadrado mas quase como o cubo da distância, tanto quanto pude julgar a partir de algumas observações grosseiras.

Quando Newton afirmou que "a atração magnética não é como a matéria atraída," o que ele estava querendo dizer é que a força magnética não é proporcional à massa inercial do corpo que está sendo atraído. E quando ele afirmou que o poder do magnetismo pode algumas vezes ser muito mais forte, pela quantidade de matéria, do que o poder da gravidade, ele estava querendo dizer que a força magnética atuando sobre um corpo pode ser maior do que a força gravitacional exercida pela Terra sobre este corpo. Desde Coulomb sabe-se que a força magnética exercida entre dois polos magnéticos p_1 e p_2 é proporcional ao produto destes polos, equação (2.13). Por outro lado, não há nenhuma relação entre estas intensidades de polo magnético e

[8] [New08b, pág. 203].

as massas inerciais m_{i1} e m_{i2} destes corpos. No caso da gravidade, Newton mostrou que a força gravitacional entre dois corpos era proporcional ao produto de suas massas inerciais. Por este Corolário 5, Proposição 6 do Livro III do *Principia*, vê-se que Newton sabia que a força magnética não era proporcional à quantidade de matéria do corpo que está sendo atraído, ou seja, não era proporcional à sua massa inercial.

A massa inercial de um corpo só é proporcional à massa gravitacional deste corpo. Ela não é proporcional a outras propriedades deste corpo, tais como propriedades elétricas, magnéticas, elásticas, nucleares, térmicas, etc. Por qual motivo a natureza se comporta assim? Não há uma resposta a esta pergunta na mecânica newtoniana. Poderia acontecer que um pedaço de ouro caísse no vácuo em direção à Terra com uma aceleração maior do que um pedaço de ferro ou de prata com o mesmo peso, mas isto não se observa. Também poderia acontecer que um pedaço mais pesado de ouro caísse no vácuo em direção à Terra com uma aceleração maior do que um pedaço mais leve também de ouro, ou do que um outro pedaço de ouro com uma forma diferente. Mais uma vez isto não se observa. Caso acontecesse qualquer um destes casos, todos os resultados da mecânica newtoniana continuariam a valer, com a única diferença de que não mais cancelaríamos m_i com m_g. Diríamos então que m_i depende da composição química do corpo, ou de sua forma, ou que não é linearmente proporcional a m_g, ou ..., dependendo do que se observasse experimentalmente.

Embora esta proporcionalidade impressionante entre a massa inercial e a massa gravitacional de qualquer corpo não prove nada, ela é altamente sugestiva. Esta proporcionalidade sugere que a massa inercial de um corpo (sua resistência em sofrer acelerações em relação a um referencial inercial) pode ter uma origem gravitacional. Mais para a frente mostraremos que este é realmente o caso.

8.2.4 Movimento Orbital de Dois Corpos no Referencial das Estrelas Fixas

Vamos agora generalizar a situação estudada na Subseção 8.2.1 considerando dois corpos 1 e 2 interagindo gravitacionalmente entre si e levando em conta o movimento de ambos em relação a um referencial inercial. Estes corpos podem ser o Sol e um planeta, a Terra e a Lua, Júpiter e um de seus satélites, ou outros dois corpos quaisquer. A massa inercial de 1 será representada por m_{i1}, enquanto sua massa gravitacional será representada por m_{g1}. Analogamente, a massa inercial de 2 será representada por m_{i2} e sua massa gravitacional por m_{g2}. Vamos tratar estes dois corpos como partículas localizadas em seus centros de massa. Nesta Subseção só vai nos interessar a situação na qual cada um destes dois corpos descreve uma órbita circular ao redor do centro de massa, considerando seus movimentos como ocorrendo em relação ao referencial inercial. A distância entre estes corpos será constante no tempo.

Vamos considerar aqui o referencial F das estrelas fixas como sendo um bom referencial inercial. Os vetores posição destas partículas em relação à origem O do referencial F serão representadas por $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$. Suas velocidades e acelerações em relação ao referencial F serão representadas por $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{a}_1$ e $\vec{a}_2$, respectivamente.

A força $\vec{F}_{21}$ exercida por 2 sobre 1 é dada pela equação (1.7):

$$\vec{F}_{21} = -G\frac{m_{g1}m_{g2}}{r_{12}^2}\hat{r}_{12} = -\vec{F}_{12} \ , \tag{8.19}$$

onde $\hat{r}_{12} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)/r_{12}$ é o vetor unitário apontando de 2 para 1, enquanto que $\vec{F}_{12}$ é a força de 1 em 2.

Combinando a equação (8.19) com a segunda lei de Newton, equação (1.4), e usando que $\hat{r}_{21} = -\hat{r}_{12}$, as equações de movimento para as partículas 1 e 2 ficam dadas por, respectivamente:

$$\vec{F}_{21} = G\frac{m_{g1}m_{g2}}{r_{12}^2}\hat{r}_{21} = m_{i1}\vec{a}_1 \ , \tag{8.20}$$

e

$$\vec{F}_{12} = -G\frac{m_{g1}m_{g2}}{r_{12}^2}\hat{r}_{21} = m_{i2}\vec{a}_2 \ . \tag{8.21}$$

A lei de Newton da gravitação, equação (8.19), satisfaz ao princípio de ação e reação na forma forte. De acordo com as equações (3.4) e (3.10), isto significa que o momento linear total $\vec{p}_t$ e o momento angular total $\vec{L}_t$ são constantes no tempo.

A situação que nos interessa aqui é o caso particular no qual o momento linear total é nulo, $\vec{p}_t = \vec{0}$, mas no qual o momento angular total tem um valor constante diferente de zero, $\vec{L}_t = \text{constante} \neq \vec{0}$. Vamos supor ainda que o centro de massa do sistema está localizado na origem do sistema de coordenadas das estrelas fixas, $\vec{r}_{cm} = \vec{0}$, sendo $\vec{r}_{cm}$ definido pela equação (3.11). Com isto obtém-se:

$$\vec{r}_{cm} = m_{i1}\vec{r}_1 + m_{i2}\vec{r}_2 = \vec{0} \ , \tag{8.22}$$

e

$$\vec{r}_2 = -\frac{m_{i1}}{m_{i2}}\vec{r}_1 \ , \quad \vec{v}_2 = -\frac{m_{i1}}{m_{i2}}\vec{v}_1 \ , \quad \vec{a}_2 = -\frac{m_{i1}}{m_{i2}}\vec{a}_1 \ . \tag{8.23}$$

Em particular, vai nos interessar a solução deste problema na qual os dois corpos descrevem órbitas circulares ao redor do centro de massa. Esta situação está representada na figura 8.4.

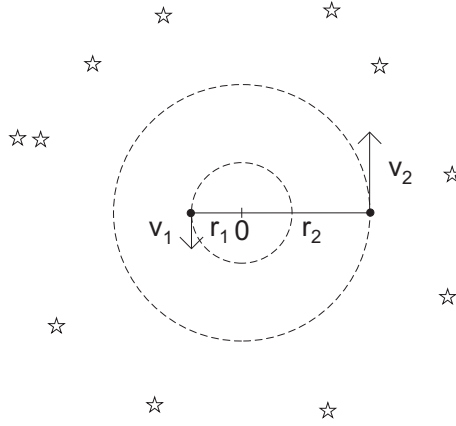



Figura 8.4: Duas massas orbitando ao redor do centro de massa no referencial das estrelas fixas.

Usando as equações (1.4), (6.26) e (8.5), obtém-se, com $r_1 \equiv |\vec{r}_1|$ e $r_2 \equiv |\vec{r}_2|$:

$$G\frac{m_{g1}m_{g2}}{(r_1+r_2)^2} = \frac{m_{i1}v_1^2}{r_1} = \frac{m_{i2}v_2^2}{r_2} = m_{i1}\omega^2 r_1 = m_{i2}\omega^2 r_2 \ , \tag{8.24}$$

onde ω é a velocidade angular, em relação ao referencial inercial F das estrelas fixas, tanto da partícula 1 quanto da partícula 2.

Caso $m_{i1} \gg m_{i2}$ teremos $r_1 \ll r_2$, $|\vec{v}_1| \ll |\vec{v}_2|$ e $|\vec{a}_1| \ll |\vec{a}_2|$. Poderemos então desprezar o movimento de 1 no referencial das estrelas fixas, comparado com o movimento de 2 neste referencial. Voltaremos então aos resultados da Subseção 8.2.1.

Usando que $m_i = m_g$, equação (6.21), a velocidade angular dada pela equação (8.24) pode ser escrita como:

$$\omega = \sqrt{\frac{Gm_{g1}}{(r_1+r_2)^2 r_2}} = \sqrt{\frac{Gm_{g2}}{(r_1+r_2)^2 r_1}} \ . \tag{8.25}$$

Usando as equações (8.23) e (8.25) obtém-se que a distância entre os dois corpos é dada por:

$$r_1 + r_2 = \left[\frac{G(m_{g1}+m_{g2})}{\omega^2}\right]^{1/3} \ . \tag{8.26}$$

8.3 Rotação de Dois Globos, em Relação a um Referencial Inercial, ao Redor do Seu Centro Comum de Gravidade

8.3.1 Dois Globos Girando Presos por uma Corda

Consideramos agora dois globos de mesma massa inercial m_i que estão sobre uma mesa horizontal sem atrito. A Terra será considerada como um bom referencial inercial neste problema. Vamos supor que eles estão ligados entre si por uma corda de comprimento ℓ. Vamos supor ainda que eles estão girando, em relação ao laboratório, com uma velocidade angular constante $\omega = \dot{\varphi} = v_t/\rho$ ao redor do ponto médio O entre eles, de tal forma que a distância de cada globo ao centro seja $\rho = \ell/2$, figura 8.5.

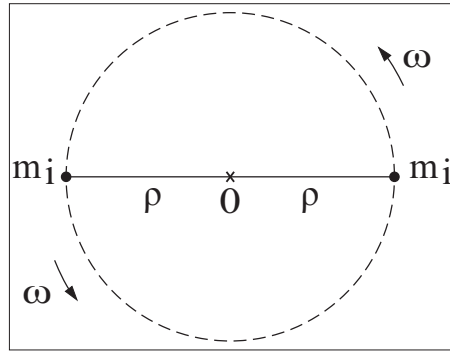



Figura 8.5: Dois globos girando sobre uma mesa sem atrito presos a uma corda. O retângulo representa a mesa.

A única força sentida por cada globo é a exercida pela corda tensionada. Representando esta tensão por T obtemos pela equação (8.7) aplicada a qualquer um dos globos:

$$T = m_i a_c = m_i \frac{v_t^2}{\rho} = m_i w^2 \rho \ . \tag{8.27}$$

Isto é, quanto maior for a velocidade angular de rotação dos globos (ou seja, quanto maior for ω), maior será a tensão na corda que suporta esta rotação. Conhecendo m_i, ω e ρ, esta tensão pode ser obtida pela equação (8.27).

8.3.2 Dois Globos Girando Presos por uma Mola

O problema da Subseção 8.3.1 também pode ser facilmente resolvido trocando a corda por uma mola de constante elástica k e comprimento natural ou relaxado ℓ_o, figura 8.6 (a). Vamos aqui considerar que a massa gravitacional da mola é desprezível comparada com a massa gravitacional m_g de cada corpo preso a ela. Vamos supor que as distâncias de cada globo ao centro O do sistema seja $\rho_o = \ell_o/2$ quando estão parados sobre a mesa. Quando o sistema está girando sobre a mesa com uma velocidade angular constante, observa-se que a mola fica esticada. Vamos representar por ℓ seu novo comprimento, sendo $\ell > \ell_o$. A distância entre os globos é dada por $\ell = 2\rho$, sendo ρ a distância de cada globo ao centro do sistema, figura 8.6 (b).

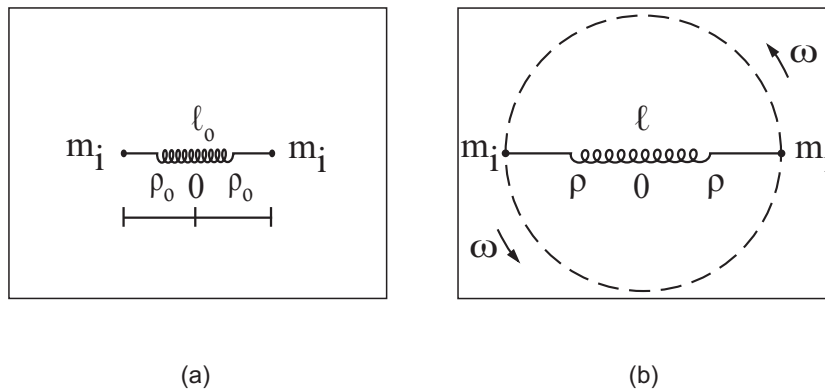



Figura 8.6: (a) Dois globos parados sobre a mesa sem atrito, ligados por uma mola de comprimento ℓ_o quando relaxada e separados por uma distância $\ell_o = 2\rho_o$. O quadrado representa a mesa, que está parada em relação ao solo. (b) Dois globos girando sobre esta mesa com uma velocidade angular constante. A mola fica distendida de um comprimento $\ell = 2\rho > \ell_o$.

Pela equação (8.7), a força F ou tensão T exercida pela mola sobre cada um dos corpos é dada por:

$$F = T = k(\ell - \ell_o) = m_i \frac{v_t^2}{\rho} = m_i w^2 \rho \ . \tag{8.28}$$

A diferença deste caso em relação à situação da Subseção 8.3.1 é que agora a tensão na corda pode ser visualizada e medida através do alongamento da mola, isto é, através do valor $\ell - \ell_o = T/k$.

8.3.3 Newton e a Distinção entre a Rotação Relativa e a Rotação Absoluta

Newton discutiu este problema da rotação dos dois globos presos a uma corda como uma possível maneira de distinguir o movimento relativo do absoluto (ou, mais especificamente, para distinguir a rotação relativa da rotação absoluta). Isto é, por esta experiência poderíamos saber se os globos estão ou não girando em relação ao espaço absoluto (ou em relação a um referencial inercial). Sua discussão aparece no Escólio do começo do Livro I do *Principia*, após as oito definições iniciais e antes dos três axiomas ou leis do movimento. Aqui vai toda a discussão, com nossa ênfase em itálico:[9]

> É realmente uma questão de grande dificuldade descobrir, e efetivamente distinguir, os movimentos verdadeiros de corpos particulares daqueles aparentes; porque as partes daquele espaço imóvel, no qual aqueles movimentos se realizam, de modo algum são passíveis de serem observadas pelos nossos sentidos. No entanto, a coisa não é totalmente desesperadora, pois temos alguns argumentos para guiar-nos, parcialmente a partir dos movimentos aparentes, que são as diferenças dos movimentos verdadeiros, e parcialmente a partir das forças, que são as causas e os efeitos dos movimentos verdadeiros. Por exemplo, se dois globos, mantidos a uma dada distância um do outro por meio de uma corda que os ligue, forem girados em torno do seu centro comum de gravidade, poderíamos descobrir, a partir da tensão da corda, a tendência dos globos a se afastar do eixo de seu movimento, e a partir daí poderíamos calcular a quantidade de seus movimentos circulares. E então se quaisquer forças iguais fossem imprimidas de uma só vez nas faces alternadas dos globos para aumentar ou diminuir seus movimentos circulares, a partir do acréscimo ou decréscimo da tensão na corda, poderíamos inferir o aumento ou diminuição de seus movimentos; e assim seria encontrado em que faces aquelas forças devem ser imprimidas, tal que os movimentos dos globos pudessem ser aumentados ao máximo, isto é, poderíamos descobrir suas faces posteriores ou aquelas que, no movimento circular, realmente vêm depois. Mas sendo conhecidas as faces que vem depois, e consequentemente as opostas que precedem, deveríamos da mesma forma conhecer a determinação dos seus movimentos. E, assim, poderíamos encontrar tanto a quantidade como a determinação desse movimento circular, mesmo em um imenso vácuo, onde não existisse nada externo ou sensível com o qual os globos pudessem ser comparados. *Porém, se naquele espaço fossem colocados alguns corpos remotos que mantivessem sempre uma dada posição uns com relação aos outros, como as estrelas fixas mantêm nas nossas regiões, não poderíamos realmente determinar a partir da translação relativa dos globos entre aqueles corpos, se o movimento pertencia aos globos ou aos corpos. Mas, se observássemos a corda, e descobríssemos que sua tensão era aquela mesma tensão que os movimentos dos corpos exigiam, poderíamos concluir que o movimento estava nos globos e que os corpos estavam em repouso*; então, finalmente, a partir da translação dos globos entre os corpos, devemos obter a determinação dos seus movimentos. Mas as maneiras pelas quais vamos obter os movimentos verdadeiros a partir de suas causas, efeitos e diferenças aparentes e o contrário, serão explicadas mais amplamente no próximo tratado. Pois foi com este fim que o compus.

Esta é uma discussão extremamente importante. Vamos ilustrar o ponto de vista de Newton com figuras e utilizando uma mola em vez da corda, já que o valor da tensão T na mola pode ser visualizado a partir da variação do seu comprimento pela equação (8.28). Ou seja, se ℓ e ℓ_o são os comprimentos da mola quando está girando ou parada, respectivamente, a tensão T que atua sobre ela está relacionada com a variação $\ell - \ell_o$ do comprimento da mola através da relação $T = k(\ell - \ell_o)$. Os dois corpos ligados pela mola estão sobre uma mesa sem atrito. A mola relaxada tem um comprimento ℓ_o. Quando ela está esticada ela tem um comprimento ℓ, sendo $\ell > \ell_o$. Como visto na Subseção 1.6.3, Newton considerava que as estrelas fixas estavam paradas em relação ao espaço absoluto. Para simplificar a análise, vamos supor aqui que a Terra também esteja em repouso em relação ao espaço absoluto.

Vamos utilizar a Terra como sendo um referencial padrão neste problema, aquele referencial que está parado em relação à folha de papel no qual são feitas as figuras.

Na primeira situação temos todos os corpos (estrelas, mesa, mola e dois globos) parados em relação ao solo, com a mola tendo um comprimento ℓ_o quando está relaxada, figura 8.7 (a). Na segunda situação temos

[9] [New90, págs. 13-14].

que os dois globos e a mola giram com uma velocidade angular constante $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$ em relação à mesa e em relação ao referencial das estrelas fixas, sendo $\hat{z}$ o vetor de módulo unitário apontando verticalmente para cima e $\omega \equiv |\vec{\omega}|$ o módulo da velocidade angular. Observa-se que a mola fica tensionada e esticada de um comprimento $\ell > \ell_o$, figura 8.7 (b).

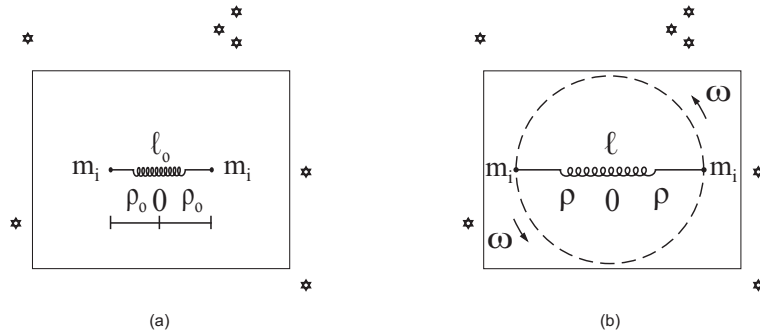



Figura 8.7: (a) Dois globos parados sobre a mesa. (b) Dois globos girando sobre esta mesa. A mola fica distendida de um comprimento $\ell > \ell_o$.

Vamos agora supor uma experiência de pensamento. Agora deixamos os dois globos e a mola parados em relação à mesa e ao solo, enquanto que o conjunto das estrelas gira com velocidade angular constante $\vec{\omega}_{FT} = -\vec{\omega} = -\omega\hat{z}$ em relação à Terra. De acordo com a citação de Newton que acabou de ser apresentada, a mola não deve ficar tensionada nesta situação hipotética. Isto significa que ela deve permanecer com seu comprimento original ℓ_o, permanecendo relaxada, figura 8.8.

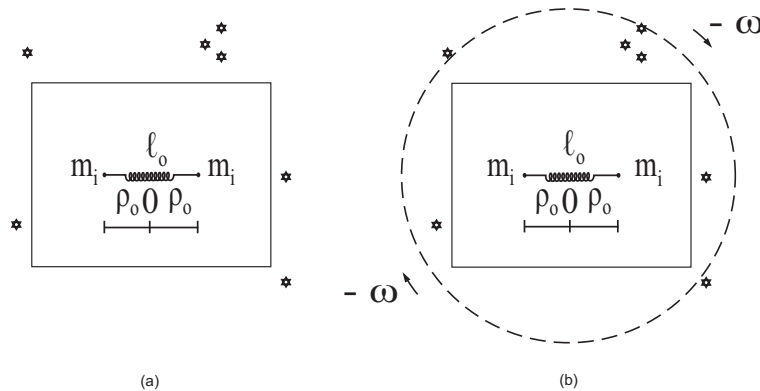



Figura 8.8: (a) Dois globos parados sobre a mesa. (b) De acordo com a mecânica newtoniana, se os globos ficarem parados em relação à mesa, e se o conjunto das estrelas fixas girar em relação à Terra com uma velocidade angular $-\omega$, a mola não ficaria tensionada e manteria seu comprimento ℓ_o.

Na figura 8.9 comparamos as situações das figuras 8.7 (b) e 8.8 (b), no contexto da mecânica newtoniana. Na figura 8.9 (a) temos dois globos sobre uma mesa, com os globos girando com uma velocidade angular constante ω em relação a um referencial inercial. Na figura 8.9 (b) temos a previsão do que aconteceria, de acordo com a mecânica newtoniana, se os globos e a mola ficarem parados em relação à mesa, e se o conjunto das estrelas fixas girar em relação à Terra com uma velocidade angular $-\omega$. Neste caso a mola não ficaria tensionada e manteria seu comprimento ℓ_o de quando estava relaxada, sendo $\ell_o < \ell$.

Ou seja, o movimento relativo entre os globos e as estrelas fixas é o mesmo nos dois casos da figura 8.9, com uma rotação relativa de valor ω entre eles. Apesar disto, de acordo com Newton, seria possível distinguir estas duas situações observando a tensão no corpo que liga os dois globos. Se este corpo for uma mola, esta tensão pode ser visualizada pela sua distensão, já que ela deve ficar esticada na situação (a), mas não deve ficar esticada na situação (b). Isto é, observando se há ou não uma tensão na mola, seria possível descobrir se são os globos que estão girando em relação ao espaço absoluto, ou se são as estrelas que estão girando em relação ao espaço absoluto, embora nos dois casos exista a mesma rotação aparente ou relativa entre os globos e as estrelas.

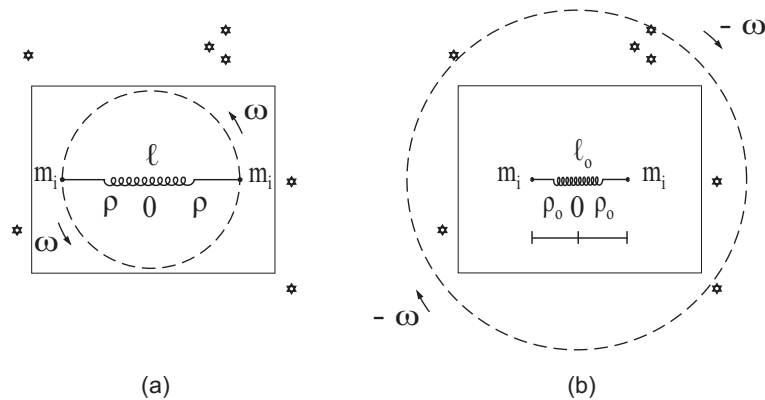



Figura 8.9: Comparação das figuras 8.7 (b) e 8.8 (b).

8.4 A Experiência do Balde de Newton

8.4.1 Balde Parado ou Girando Junto com a Água em Relação ao Solo

Analisamos agora a experiência do balde de Newton. Esta é uma das experiências mais simples e mais importantes dentre todas aquelas realizadas por Newton.[10] Esta experiência está ilustrada na figura 8.10.

Figura 8.10: (a) Balde e água em repouso em relação ao solo, com a superfície da água horizontal. (b) Balde e água girando juntos com uma velocidade angular constante ω em relação ao solo. Observa-se que a superfície da água fica côncava, tendo abaixado ao longo do eixo de rotação e subido pelas paredes do balde.

Como a rotação diária da Terra em relação às estrelas fixas é muito mais lenta do que a rotação do balde em relação à Terra nesta experiência, vamos supor que a Terra está parada em relação às estrelas fixas, para simplificar a análise da experiência. A Terra e as estrelas fixas constituem então um bom referencial inercial para analisar este problema. Na situação (a) temos o balde e a água parados em relação ao solo. Observa-se que a superfície da água fica plana e horizontal. A corda é então torcida e o balde solto do repouso em relação ao solo. Observa-se que o balde começa a girar em relação ao solo, enquanto que neste início do movimento do balde a água continua parada em relação ao solo. Devido ao atrito que existe entre a água e as paredes do balde, a água também começa a girar em relação ao solo. Observa-se que ela começa a subir pelas paredes do balde, abaixando ao longo do eixo de rotação. Supondo que o balde mantenha uma velocidade angular constante em relação ao solo, a situação logo se estabiliza na situação representada pelo caso da figura 8.10 (b). Nesta situação temos o balde e a água girando juntos ao redor do eixo do balde com uma velocidade angular constante ω em relação ao solo. Observa-se que a superfície da água fica côncava, tendo abaixado ao longo do eixo de rotação e ficando elevada próxima das paredes do balde.

Newton terminou sua experiência neste ponto. Mas ela poderia ser continuada da seguinte forma. Depois que o balde e a água estão girando juntos em relação ao solo por algum tempo, com uma velocidade angular constante ao redor do eixo do balde, a superfície da água fica côncava. Segura-se então repentinamente o balde com as mãos, fazendo com que ele não mais gire em relação ao solo daí por diante. Neste momento a água continua girando em relação ao solo, mantendo seu formato côncavo. Devido ao atrito que existe entre a água e as paredes do balde, a água vai diminuindo sua velocidade angular em relação ao solo. Ao mesmo tempo vai diminuindo a concavidade da superfície livre da água, fazendo com que a parte em contato com

[10][New90, págs. 11-12] e [Nus81, págs. 504-507].

as paredes vá baixando, enquanto que a parte ao longo do eixo vá subindo. Quando a água atinge o repouso em relação às paredes do balde e em relação ao solo, sua superfície livre volta a ficar plana na horizontal.

Consideramos a água como um fluido incompressível homogêneo ideal com densidade de massa inercial ρ_i (massa inercial por unidade de volume) e densidade de massa gravitacional ρ_g (massa gravitacional por unidade de volume). O problema do balde parado em relação ao solo foi resolvido na Seção 4.3. A superfície da água fica plana e horizontal, com a pressão aumentando linearmente com a profundidade de acordo com a equação (4.11).

Agora analisamos a situação da figura 8.10 (b). Nesta configuração a água e o balde giram juntos ao redor do eixo do balde, em relação ao solo, com uma velocidade angular constante ω. Vamos obter a forma da superfície da água e a pressão em um ponto qualquer do líquido no interior do balde.[11] A superfície da água fica côncava como representada na figura 8.10 (b). A maneira mais simples de obter a forma da superfície é considerar um sistema de referência parado em relação ao solo, centrado na parte mais baixa da água girando, com o eixo z apontando verticalmente para cima, figura 8.11. A distância de um ponto qualquer do fluido ao eixo z será representada por $u \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$, sendo que usamos u em vez de ρ para esta coordenada para não confundi-la com as densidades de massa gravitacional e inercial do fluido.

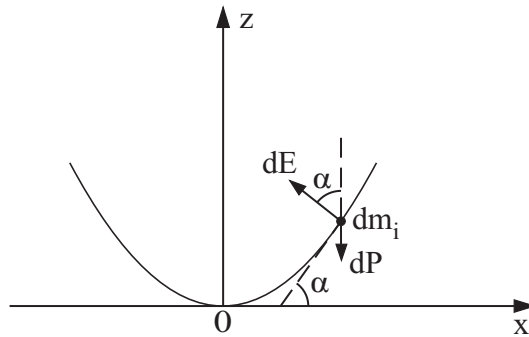



Figura 8.11: Água girando em relação ao solo. O referencial inercial S com eixos ortogonais $(x,\ z)$ está parado no solo com sua origem no ponto mais baixo da água.

Vamos considerar um pequeno volume de líquido com massa inercial $dm_i = \rho_i dV$ logo abaixo da superfície. Ele sofre a força gravitacional para baixo $dP = dm_g g$ e uma força normal à superfície do líquido devida ao gradiente de pressão, dE. Como esta pequena porção de água move-se em um círculo centrado no eixo z, não há uma força vertical resultante. Só vai haver uma força centrípeta resultante apontando em direção ao eixo z que muda a direção do movimento, mas não o módulo da velocidade tangencial. Da figura 8.11 obtemos neste caso (sendo a_c a aceleração centrípeta do elemento de volume):

$$dE \operatorname{sen} \alpha = dm_i a_c = dm_i \frac{v_t^2}{u} = dm_i \omega^2 u \ , \tag{8.29}$$

e

$$dE \cos \alpha = dP = dm_g g \ . \tag{8.30}$$

Dividindo a equação (8.29) pela equação (8.30) obtém-se:

$$\tan \alpha = \frac{dm_i}{dm_g} \frac{\omega^2 u}{g} \ . \tag{8.31}$$

Da figura 8.11 observa-se que $\tan \alpha = dz/du$, onde dz/du é a inclinação da curva em cada ponto, ou seja, a inclinação da superfície livre do fluido. Utilizando esta relação e o fato de que queremos a equação da curva que contém a origem $x = y = z = 0$ obtém-se, após integrar a equação (8.31) e utilizando $\rho_i = dm_i/dV$ e $\rho_g = dm_g/dV$:

$$z = \frac{\rho_i}{\rho_g} \frac{\omega^2}{2g} u^2 \ . \tag{8.32}$$

Ou seja, a superfície livre do fluido tem a forma de um paraboloide de revolução. Quanto maior for o valor de ω, maior será a concavidade do fluido.

[11] [Luc80, págs. 421-424].

Podemos também calcular a pressão em um ponto qualquer do líquido utilizando um raciocínio similar. Considere a figura 8.12.

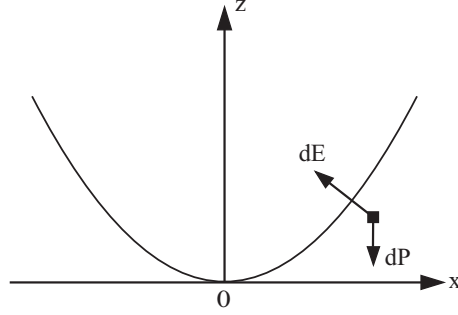



Figura 8.12: Forças atuando sobre um elemento de volume do líquido.

A equação de movimento de uma pequena quantidade de água dm_i é dada por:

$$d\vec{P} + d\vec{E} = dm_i\vec{a} \ , \tag{8.33}$$

onde $d\vec{E}$ é a força devida ao gradiente de pressão. Utilizando coordenadas cilíndricas $(u, \ \varphi, \ z) = (\sqrt{x^2+y^2}$, $\arctan(y/x), \ z)$, obtém-se que esta força devida ao gradiente de pressão atuando no elemento de massa representado na figura 8.12 é dada por:

$$d\vec{E} = -(\nabla p)dV = -\left(\frac{\partial p}{\partial u}\hat{u} + \frac{1}{u}\frac{\partial p}{\partial \varphi}\hat{\varphi} + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{z}\right) dV \ . \tag{8.34}$$

Utilizando este resultado na equação (8.33), juntamente com o fato de que existe apenas uma aceleração centrípeta, $\vec{a} = -(v^2/u)\hat{u} = -\omega^2 u\hat{u}$ e usando ainda que $d\vec{P} = -dm_g g\hat{z}$, obtém-se:

$$d\vec{P} + d\vec{E} = -dm_g g\hat{z} - \left(\frac{\partial p}{\partial u}\hat{u} + \frac{1}{u}\frac{\partial p}{\partial \varphi}\hat{\varphi} + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{z}\right) dV = dm_i\vec{a} = -dm_i\omega^2 u\hat{u} \ . \tag{8.35}$$

Considerando as componentes:

$$\frac{\partial p}{\partial u} = \rho_i \omega^2 u \ , \tag{8.36}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0 \ , \tag{8.37}$$

e

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_g g \ . \tag{8.38}$$

A integração destas equações leva a, respectivamente:

$$p(u, \ \varphi, \ z) = \frac{\rho_i \omega^2 u^2}{2} + f_1(\varphi, \ z) \ , \tag{8.39}$$

$$p(u, \ \varphi, \ z) = f_2(u, \ z) \ , \tag{8.40}$$

e

$$p(u, \ \varphi, \ z) = -\rho_g g z + f_3(u, \ \varphi) \ . \tag{8.41}$$

onde $f_1(\varphi, \ z)$, $f_2(u, \ z)$ e $f_3(u, \ \varphi)$ são funções arbitrárias de φ e z; u e z; e u e φ, respectivamente. Igualando estas três soluções obtém-se:

$$p(u, \ \varphi, \ z) = \frac{\rho_i \omega^2}{2} u^2 - \rho_g g z + k \ , \tag{8.42}$$

onde k é uma constante.

De acordo com a figura 8.12, o ponto mais baixo da superfície livre do fluido foi escolhido como sendo aquele no qual $(\rho,\ z) = (0,\ 0)$. Utilizando na equação (8.42) que a pressão neste ponto mais baixo é a pressão atmosférica p_o, obtém-se $k = p_o$. Com isto a pressão no interior do líquido fica dada pela seguinte expressão:

$$p(u,\ \varphi,\ z) = \frac{\rho_i \omega^2}{2} u^2 - \rho_g g z + p_o \ . \tag{8.43}$$

Sobre a superfície do líquido tem-se que a pressão é a pressão atmosférica, ou seja, $p(u,\ \varphi,\ z) = p_o$. Utilizando este fato na equação (8.43) obtém-se mais uma vez a equação da superfície côncava, a saber, a equação (8.32). Isto completa a solução do problema na mecânica clássica.

8.4.2 A Proporcionalidade entre a Massa Inercial e a Massa Gravitacional a partir da Forma Côncava de Fluidos Girando Juntos com Seus Baldes

Vamos supor que giramos dois baldes ao redor de seus eixos, em relação ao solo, com velocidades angulares constantes ω_1 e ω_2. Vamos supor ainda que no primeiro balde tem um fluido ideal incompressível com densidade de massa inercial ρ_{i1} e com densidade de massa gravitacional ρ_{g1}, enquanto que no segundo balde tem um outro fluido ideal incompressível com densidade de massa inercial ρ_{i2} e com densidade de massa gravitacional ρ_{g2}. Vamos considerar a situação na qual os fluidos estão girando juntos com seus baldes. De acordo com a equação (8.32), as superfícies livres destes dois fluidos vão ter as formas de paraboloides de revolução. A razão das alturas z_1 e z_2 destes dois líquidos a uma mesma distância $u_1 = u_2 \equiv u$ de seus eixos de rotação é dada por:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_{i1}/\rho_{g1}}{\rho_{i2}\rho_{g2}} \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2 \ . \tag{8.44}$$

Vem da experiência com fluidos incompressíveis homogêneos ideais que $z_1 = z_2$ quando $\omega_1 = \omega_2$, qualquer que sejam as densidades gravitacionais ou as composições químicas destes fluidos. Ou seja, todas as superfícies parabólicas possuem as mesmas concavidades quando estes fluidos giram em relação ao solo com a mesma velocidade angular, figura 8.13.

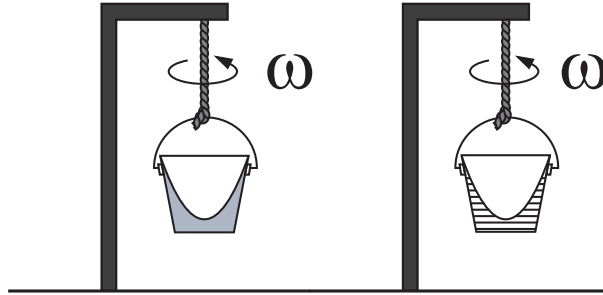



Figura 8.13: As superfícies livres de todos os fluidos possuem a mesma concavidade quando eles giram em relação ao solo com a mesma velocidade angular, não importando suas densidades gravitacionais nem suas composições químicas.

Combinando este resultado experimental com a equação (8.44) obtém-se mais uma vez que a razão da densidade de massa inercial para a densidade de massa gravitacional dos fluidos incompressíveis é uma constante, equação (6.86).

Utilizando ainda que no Sistema Internacional de Unidades a razão da massa inercial para a massa gravitacional de qualquer corpo tem valor unitário adimensional, equação (6.20), pode-se cancelar as densidades de massa que aparecem nas equações (8.32) e (8.43). A equação da superfície livre de um fluido incompressível qualquer girando com velocidade angular constante em relação ao solo fica então dada por:

$$z = \frac{\omega^2}{2g} u^2 \ . \tag{8.45}$$

Já a pressão em um ponto qualquer no interior deste fluido girando fica dada por (com $\rho_i = \rho_g \equiv \rho$ representando a densidade de massa do fluido e com p_o sendo a pressão atmosférica):

$$p(u,\ \varphi,\ z) = \frac{\rho\omega^2}{2}u^2 - \rho g z + p_o\ . \tag{8.46}$$

8.4.3 Newton e a Distinção entre a Rotação Relativa e a Rotação Absoluta do Balde Girando Junto com a Água na Superfície da Terra

Newton apresentou sua experiência do balde no Escólio após as oito definições no início do Livro I do *Principia*. Esta experiência aparece antes de suas três leis do movimento. Esta é uma das experiências mais importantes de toda a sua mecânica, sendo apresentada logo antes da experiência dos dois globos descrita na Subseção 8.3.3. Ao contrário da rotação dos dois globos presos a uma corda, que foi apenas imaginada por Newton, a rotação do balde com água foi uma experiência real realizada por ele, observando a rotação da água em relação ao solo e sua subida pelas paredes do balde. É esta experiência crucial que lhe forneceu o suporte empírico para os conceitos de movimento absoluto que foram empregados nas suas leis do movimento. Ele não chegou a variar o tipo de fluido que girava no balde, trabalhando apenas com água. Portanto, não chegou a discutir a proporcionalidade entre a densidade de massa gravitacional (ou densidade de peso) e a densidade de massa inercial a partir desta experiência. A importância fundamental desta experiência, para Newton, é que com ela tentou apresentar uma sustentação empírica ao conceito de rotação absoluta em relação ao espaço vazio. Com esta experiência seria então possível distinguir uma rotação absoluta da água em relação ao espaço vazio, da rotação relativa da água em relação aos outros corpos materiais (como o balde, a Terra e as estrelas fixas). É importante citá-la em sua totalidade (nossa ênfase):[12]

> *Os efeitos que distinguem movimento absoluto de relativo são as forças que agem no sentido de provocar um afastamento a partir do eixo do movimento circular. Pois não há tais forças em um movimento circular puramente relativo; mas em um movimento circular verdadeiro ou absoluto elas são maiores ou menores, dependendo da quantidade do movimento.* Se um recipiente, suspenso por uma longa corda, é tantas vezes girado, a ponto de a corda ficar fortemente torcida, e então enchido com água e suspenso em repouso junto com a água; a seguir, pela ação repentina de outra força, é girado para o lado contrário e, enquanto a corda desenrola-se, o recipiente continua no seu movimento por algum tempo; a superfície da água, de início, será plana, como antes de o recipiente começar a se mover; mas depois disso, o recipiente, por comunicar gradualmente o seu movimento à água, fará com que ela comece nitidamente a girar e a afastar-se pouco a pouco do meio e a subir pelos lados do recipiente, transformando-se em uma figura côncava (*conforme eu mesmo experimentei*), e quanto mais rápido se torna o movimento, mais a água vai subir, até que, finalmente, realizando suas rotações nos mesmos tempos que o recipiente, ela fica em repouso relativo nele. Essa subida da água mostra sua tendência a se afastar do eixo de seu movimento; e o movimento circular verdadeiro e absoluto da água, que aqui é diretamente contrário ao relativo, torna-se conhecido e pode ser medido por esta tendência. De início, quando o movimento relativo da água no recipiente era máximo, não havia nenhum esforço para afastar-se do eixo; a água não mostrava nenhuma tendência à circunferência, nem nenhuma subida na direção dos lados do recipiente, mas mantinha uma superfície plana, e, portanto, seu movimento circular verdadeiro ainda não havia começado. Mas, posteriormente, quando o movimento relativo da água havia diminuído, a subida em direção aos lados do recipiente mostrou o esforço dessa para se afastar do eixo; e esse esforço mostrou o movimento circular real da água aumentando continuamente, até ter adquirido sua maior quantidade, quando a água ficou em repouso relativo no recipiente. *E, portanto, esse esforço não depende de qualquer translação da água com relação aos corpos do ambiente, nem pode o movimento circular verdadeiro ser definido por tal translação.* Há somente um movimento circular real de qualquer corpo em rotação, correspondendo a um único poder de tendência de afastamento a partir de seu eixo de movimento, como efeito próprio e adequado; mas movimentos relativos, em um mesmo e único corpo, são inumeráveis, de acordo com as diferentes relações que ele mantém com corpos externos e, como outras relações, são completamente destituídas de qualquer efeito real, embora eles possam talvez compartilhar daquele único movimento verdadeiro. [...]

De acordo com Newton, a superfície da água seria côncava apenas quando ela estivesse girando em relação ao espaço absoluto. Embora ele não tenha apresentado contas descrevendo o formato da superfície da água, contentando-se em constatar que ela ficava côncava, sabia e observou que quanto mais rápido ela

[12] [New90, págs. 11-12] e [Nus81, págs. 504-507].

estivesse girando, maior era esta concavidade. Isto significa que, para ele, o ω que aparece na equação (8.32) descrevendo a concavidade da água na mecânica clássica, seria a velocidade angular da água em relação ao espaço absoluto e não a velocidade angular da água em relação aos "corpos do ambiente." Isto é, este ω não representa a rotação da água em relação ao balde, nem a rotação da água em relação à Terra, e nem mesmo a rotação da água em relação às estrelas fixas. Lembre-se de que, para Newton,[13] o espaço absoluto não tem "relação com qualquer coisa externa," não estando, portanto, relacionado com o balde, com a Terra nem com as estrelas fixas.

Vamos mostrar agora que Newton não tinha outra alternativa em sua época senão chegar a esta conclusão. Como a velocidade angular do balde em relação ao solo na experiência de Newton é muito maior do que a velocidade angular da Terra em relação às estrelas fixas devida à rotação diurna da Terra, ou do que a velocidade angular anual da Terra ao redor do Sol, podemos considerar a Terra como não estando acelerada em relação ao referencial das estrelas fixas e como sendo um bom sistema de referência inercial. Vamos concentrar nossa análise em duas situações bem específicas representadas pela figura 8.10 (a) e (b), a saber:

(I) Na primeira situação, o balde e a água estão em repouso em relação à Terra. Portanto, o balde e a água também estão em repouso ou deslocando-se com uma velocidade linear praticamente constante em relação ao referencial das estrelas fixas. Vamos chamar de $\vec{\omega}_{bT}$ à velocidade angular do balde em relação à Terra e de $\vec{\omega}_{aT}$ à velocidade angular da água em relação à Terra. Nesta primeira situação temos $\vec{\omega}_{bT} = \vec{\omega}_{aT} = \vec{0}$. Observa-se que a superfície da água é plana e não há problemas em deduzir esta conclusão com a mecânica newtoniana.

(II) Agora consideramos a segunda situação na qual o balde e a água giram juntos em relação à Terra com uma velocidade angular constante $\vec{\omega}_{bT} = \vec{\omega}_{aT} \equiv \vec{\omega} = \omega\hat{z} =$ constante $\neq \vec{0}$. Estamos considerando que o eixo z aponta verticalmente para cima no local em que o balde se encontra (isto é, $\hat{z} = \hat{r}$, onde $\hat{r}$ aponta radialmente para fora a partir do centro da Terra). Ou seja, o balde e a água também giram juntos em relação ao referencial das estrelas fixas. Neste caso a superfície da água fica côncava, tendo subido em direção às paredes do balde.

As principais questões que precisam ser respondidas e bem compreendidas são: Por que a superfície da água é plana na primeira situação e côncava na segunda? Qual é o responsável por este comportamento diferente? A concavidade da água na segunda situação é devida à rotação da água com relação a quê? Vamos responder a estas questões do ponto de vista newtoniano, analisando todas as possibilidades plausíveis. Há três suspeitos naturais principais para a concavidade da água: Sua rotação em relação ao balde, sua rotação em relação à Terra, ou sua rotação em relação aos outros corpos astronômicos (compostos essencialmente pelas estrelas fixas e galáxias).

Vamos ver se a rotação da água em relação ao balde pode explicar a diferença entre as situações (a) e (b) da figura 8.10. Que o balde não é o responsável pelo comportamento diferente da superfície da água pode ser percebido imediatamente observando que não há movimento relativo entre a água e o balde nestas duas situações, já que $\vec{\omega}_{bT} - \vec{\omega}_{aT} = \vec{0}$ tanto na primeira quanto na segunda situação. Isto significa que qualquer que seja a força exercida pelo balde sobre cada molécula da água na primeira situação, ela vai continuar a mesma na segunda situação, já que o balde ainda vai estar em repouso com relação à água.

O segundo suspeito é a rotação da água com relação à Terra. Afinal de contas, na primeira situação a água estava em repouso com relação à Terra e a superfície da água era plana, mas quando a água estava girando com relação à Terra na segunda situação, sua superfície ficou côncava. Logo, poderia ser esta rotação relativa entre a água e a Terra a responsável pela concavidade da superfície da água. Newton argumentou[14] que este não era o motivo da concavidade ("E, portanto, esse esforço [de se afastar do eixo do movimento circular] não depende de qualquer translação da água com relação aos corpos do ambiente, nem pode o movimento circular verdadeiro ser definido por tal translação"). Mostraremos agora que Newton foi coerente e estava correto ao chegar a esta conclusão, se partirmos do pressuposto de que a força descrevendo a interação gravitacional entre os corpos seja a lei de Newton da gravitação. Na primeira situação, a única força relevante exercida pela Terra sobre cada molécula da água é de origem gravitacional. Como vimos no Capítulo 1, utilizando a equação (1.7) e o teorema 31 de Newton, descrito na Subseção 1.4.1, obtemos que a Terra atrai qualquer molécula da água como se toda a Terra estivesse concentrada em seu centro, equações (1.15) e (1.17):

$$\vec{P} = m_g\vec{g} = -m_g g\hat{z} \ . \tag{8.47}$$

Na segunda situação a água está girando em relação à Terra, mas a força exercida pela Terra sobre cada molécula da água ainda é dada simplesmente por $\vec{P} = -m_g g\hat{z}$ apontando verticalmente para baixo. Isto

[13] [New90, pág. 7].
[14] [New90, pág. 12].

ocorre devido ao fato de que a lei de Newton da gravitação, equação (1.7), não depende da velocidade ou da aceleração entre os corpos interagentes. Isto significa que na mecânica newtoniana a Terra não pode ser a responsável pela concavidade da superfície da água. Estando a água em repouso ou girando em relação à Terra, ela vai sentir a mesma força gravitacional devida à Terra, a saber, o peso $\vec{P}$ apontando para baixo dado pela equação (8.47). Esta força não tem qualquer componente tangencial nem qualquer componente centrífuga que sejam perpendiculares à direção z. Não é a Terra que está empurrando a água para fora do eixo de rotação. Não há qualquer componente da força gravitacional exercida pela Terra sobre a água que dependa da velocidade ou da aceleração da água em relação ao solo. Ou seja, não é a Terra que vai fazer com que a água suba pelas paredes do balde quando a água está girando em relação ao solo.

O terceiro suspeito que poderia causar a concavidade da água é a rotação da água em relação ao conjunto das estrelas fixas. Na primeira situação a água está essencialmente em repouso ou com velocidade linear constante em relação ao referencial das estrelas fixas e sua superfície é plana. Já na segunda situação, a água está girando com relação ao conjunto das estrelas e sua superfície é côncava. Poderia ser esta rotação relativa entre a água e as estrelas fixas a responsável pela concavidade da água. Mas na mecânica newtoniana este também não é o caso. A única interação relevante da água com as estrelas fixas é de origem gravitacional. Vamos analisar esta influência das estrelas na primeira situação. Como vimos no Capítulo 1, utilizando a equação (1.7) e o teorema 30 de Newton, descrito na Subseção 1.4.1, obtemos que a força resultante exercida por todas as estrelas fixas em qualquer molécula de água é essencialmente nula, supondo as estrelas fixas distribuídas mais ou menos homogeneamente no céu e desprezando as pequenas anisotropias em suas distribuições. Este resultado está representado na equação (1.11). Este é o motivo pelo qual as estrelas fixas raramente são mencionadas na mecânica newtoniana. Isto vai permanecer válido não apenas quando a água está em repouso com relação às estrelas fixas, mas também quando a água está girando com relação ao conjunto das estrelas fixas. Mais uma vez este resultado nulo é devido ao fato de que a lei de Newton da gravitação, equação (1.7), não depende da velocidade nem da aceleração entre os corpos. Logo, a força gravitacional exercida por uma casca esférica sobre um ponto material, dado pela equação (1.15), vai permanecer válido não importando a velocidade ou aceleração do corpo de prova em relação à casca esférica.

Como vimos na Subseção 1.4.4, Newton estava ciente de que podemos desprezar a influência gravitacional do conjunto das estrelas fixas na maior parte das situações. Lembre-se de que ele afirmou no *Principia*[15] que "as estrelas fixas, estando dispersas promiscuamente por todo o céu, destroem suas ações mútuas devido a suas atrações contrárias, pela Proposição 70, Livro I." Concluímos então que a rotação relativa entre a água e as estrelas fixas também não é a responsável pela concavidade da água.

Newton só tinha conhecimento das estrelas fixas que pertencem à nossa galáxia, a Via Láctea. Ele não sabia da existência de outras galáxias. Hoje em dia poderia ser pensado que a concavidade da água na segunda situação seria devida à rotação da água em relação ao conjunto de galáxias. Mas dentro da mecânica newtoniana esta explicação não funciona. Sabe-se que as galáxias estão distribuídas mais ou menos uniformemente no céu. Logo, a mesma conclusão a que Newton chegou com relação às estrelas fixas (que elas não exercem qualquer força resultante apreciável em outros corpos) é obtida com as galáxias distantes. Ou seja, o conjunto de galáxias exerce uma força gravitacional essencialmente nula sobre as moléculas da água na experiência do balde, não importando se a água está parada ou girando em relação às galáxias.

A concavidade da água é um efeito real, pois se pode medir o quanto a água sobe pelas paredes do balde. Além disso, a água girando pode chegar até mesmo a entornar do balde se ω for muito grande. Newton concluiu que este efeito não era devido à rotação da água em relação ao balde, nem devido à rotação da água em relação à Terra, e nem mesmo devido à rotação da água em relação às estrelas fixas. Logo, Newton não tinha outra escolha senão apontar um outro responsável para este efeito, ou seja, a rotação da água em relação ao espaço absoluto. Esta era sua única alternativa, supondo a validade de sua lei da gravitação universal que ele estava propondo no mesmo livro onde apresentou a experiência do balde. Além disto, este espaço absoluto newtoniano não pode ter nenhuma relação com a massa gravitacional da água, do balde, da Terra, das estrelas fixas, nem de qualquer outro corpo material. Afinal de contas, como acabamos de ver, todas estas outras possíveis influências materiais já foram eliminadas. O espaço absoluto newtoniano é então o vácuo ou espaço vazio, pois não está ligado com nenhum corpo material.

A explicação quantitativa desta experiência chave, sem introduzir o conceito de espaço absoluto, é uma das principais características da mecânica relacional desenvolvida neste livro.

---

[15] [New08b, pág. 211].

8.4.4 Qual Seria o Formato da Água se Todos os Outros Corpos Astronômicos Desaparecessem?

Na experiência de Newton existiam não apenas a Terra, o balde e a água, mas também as estrelas e galáxias ao redor de todo o sistema. Newton sabia da existência das estrelas, mas não das galáxias. Na figura 8.14 apresentamos a experiência de Newton incluindo nesta representação as estrelas e galáxias ao redor da Terra. Para simplificar a análise estamos supondo que elas estejam paradas em relação à Terra. A rotação da água em relação ao solo na experiência de Newton é muito maior do que a rotação diária da Terra ao redor de seu eixo em relação às estrelas, ou do que a rotação anual da Terra ao redor do Sol em relação às estrelas. Vamos então desprezar nesta análise a rotação diária da Terra ao redor de seu eixo e também sua translação anual ao redor do Sol.

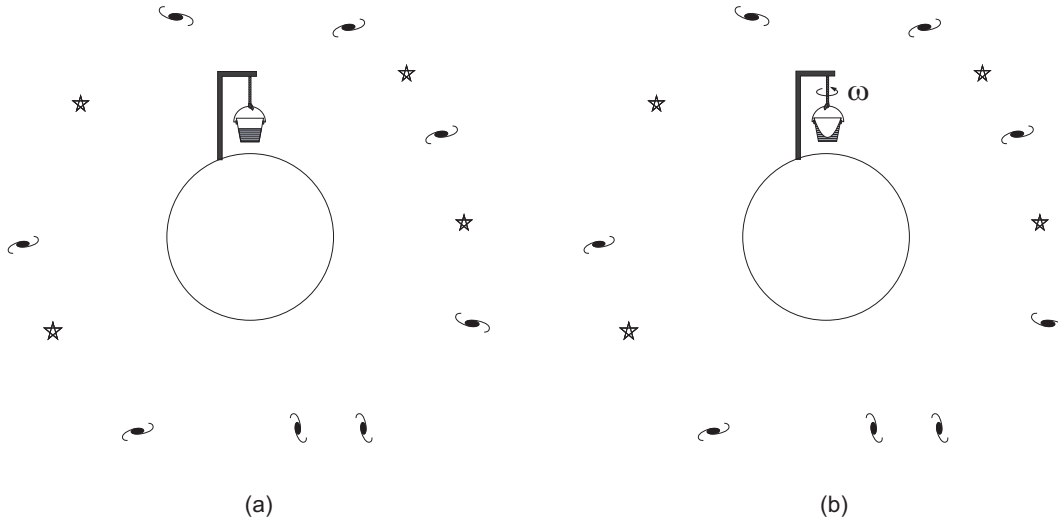



Figura 8.14: Experiência do balde de Newton incluindo nesta representação as estrelas e galáxias.

Uma consequência importante da análise apresentada na Subseção 8.4.3 é que mesmo que as estrelas fixas e as galáxias distantes desaparecessem (fossem literalmente aniquiladas do universo), isto não iria alterar a concavidade da água nesta experiência do balde. As estrelas fixas e as galáxias distantes não têm nenhuma relação com esta concavidade, pelo menos de acordo com a mecânica newtoniana. Tudo isto é devido à Proposição 70, Teorema 30 do Livro I do *Principia*, apresentada na Subseção 1.4.1. Ou seja, se a água subia pelas paredes do balde até sua borda ao girar, por exemplo, com uma velocidade angular tal que desse uma volta por segundo em relação ao solo, então ela continuaria a subir até a borda do balde na situação sem estrelas e galáxias, sempre que estivesse girando junto com o balde em relação ao solo com esta mesma velocidade angular de uma volta por segundo.

Esta situação hipotética está representada na figura 8.15.

Também se dobrássemos o número ou a densidade de massa gravitacional de todas as estrelas e galáxias distantes, comparado com a situação real representada pela figura 8.14, a concavidade da água não seria alterada de acordo com a mecânica newtoniana. Aqui estamos supondo que o balde, a água e a Terra não foram alterados em relação ao nosso mundo real (ou seja, a Terra continua com seu mesmo tamanho e com uma densidade de 5,5 vezes a densidade da água). Estamos considerando que apenas o número de estrelas e galáxias é que dobrou em relação ao nosso mundo real.

Esta situação hipotética está representada na figura 8.16.

8.4.5 Qual Seria o Formato da Água se Ela Ficasse Parada em Relação ao Solo e Todos os Outros Corpos Astronômicos Girassem Rapidamente ao Redor do Eixo do Balde?

Pode-se obter uma outra consequência importante a partir da análise apresentada na Subseção 8.4.3.

Na experiência de Newton temos a água inicialmente em repouso em relação ao balde e em relação à Terra, estando com sua superfície plana, figura 8.14 (a). Estamos supondo que as estrelas e galáxias também estejam paradas em relação à Terra, para simplificar a análise do problema. Depois que a água está girando

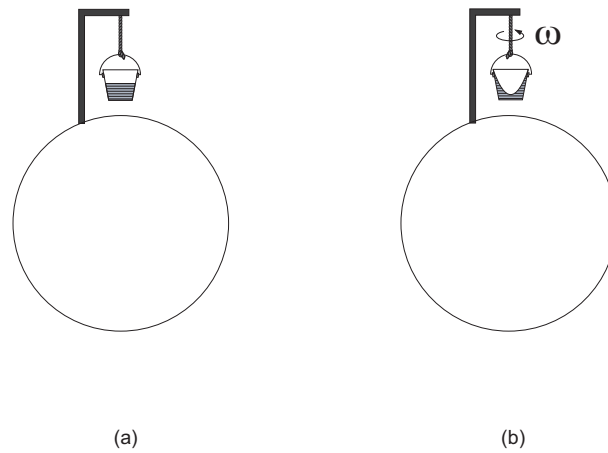



Figura 8.15: A concavidade da água não seria alterada de acordo com a mecânica newtoniana se todos os corpos astronômicos distantes fossem aniquilados do universo.

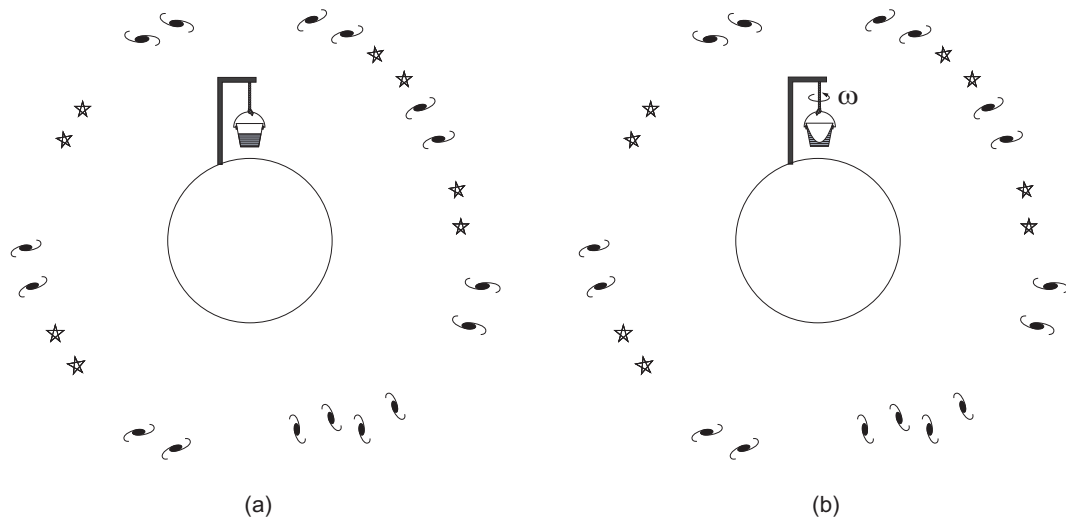



Figura 8.16: A concavidade da água não seria alterada de acordo com a mecânica newtoniana se dobrássemos o número de corpos distantes do universo.

juntamente com o balde em relação à Terra, ela assume uma superfície côncava. Vamos supor que na situação da figura 8.14 (b) o balde estivesse girando com uma velocidade angular constante de 1 volta por segundo em relação ao solo, com a parte mais alta da água chegando até a borda do balde. Vamos supor ainda que o plano do papel coincida com o espaço absoluto de Newton e que o balde com água esteja girando no sentido anti-horário quando visto de cima para baixo.

Vamos agora imaginar uma situação que seja visualmente ou cinematicamente equivalente a esta. Inicialmente temos a água e o balde em repouso em relação ao espaço absoluto, observando-se que a superfície da água fica plana. Qual seria o formato da superfície da água caso o balde com a água permanecessem em repouso em relação ao espaço absoluto, enquanto que a Terra, as estrelas e galáxias girassem juntos em relação ao espaço absoluto, dando uma volta por segundo ao redor do eixo do balde no sentido horário? Como visto na Subseção 1.4.3, a Terra vai continuar atraindo a água verticalmente para baixo, enquanto que as estrelas e galáxias girando ao redor do balde vão continuar exercendo forças resultantes nulas sobre qualquer molécula da água, equação (1.21). Isto significa que nesta situação hipotética a superfície da água continuaria plana, como indicado na figura 8.17.

A situação da figura 8.17 (b) é visualmente ou cinematicamente equivalente à situação da figura 8.14 (b). Nos dois casos temos a mesma rotação relativa entre a água e a Terra, entre a água e as estrelas, assim como entre a água e as galáxias. Apesar disto, esta duas situações não são dinamicamente equivalentes na mecânica newtoniana, já que a água fica côncava na situação da 8.14 (b), mas não ficaria côncava na situação

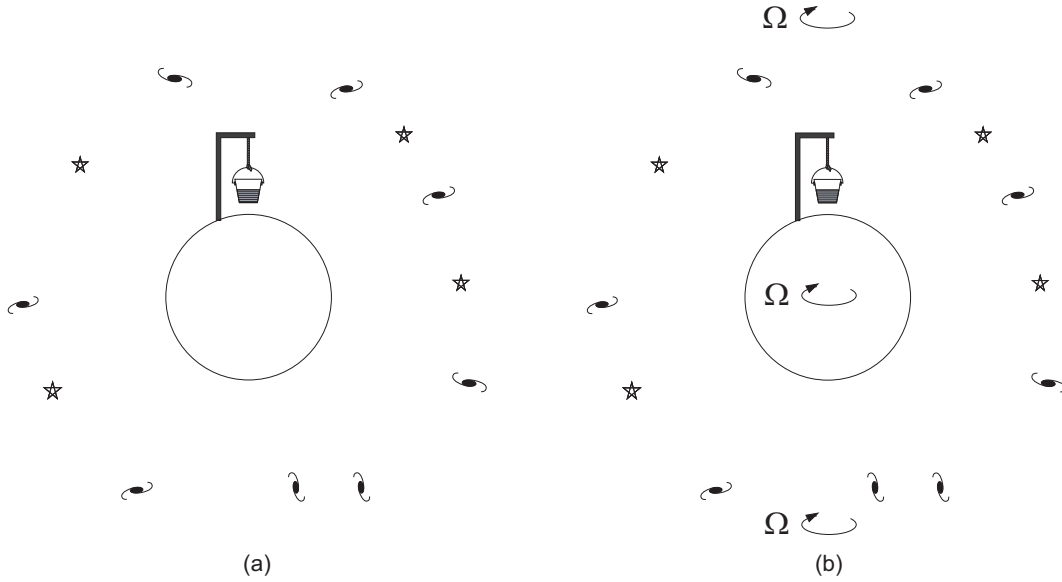



Figura 8.17: Supondo a água parada em relação ao espaço absoluto, a superfície da água continuaria plana se a Terra, estrelas e galáxias girassem ao redor do eixo do balde.

da figura 8.17 (b).

Uma outra situação hipotética na qual a superfície da água continuaria plana está indicada na figura 8.18. Neste caso a Terra continua parada em relação ao espaço absoluto tanto em (a) quanto em (b). Nesta situação não precisamos nem mesmo falar do espaço absoluto, já que podemos referir todos os movimentos à superfície da Terra. Na situação (a) temos a água, estrelas e galáxias paradas em relação ao solo, com a superfície plana da água. No caso (b) temos uma situação hipotética na qual apenas o conjunto de estrelas e de galáxias passou a girar rapidamente em relação ao solo ao redor do eixo do balde. O balde e a água continuam parados em relação ao solo. De acordo com a mecânica newtoniana, a superfície da água vai continuar plana nesta situação, mesmo que fosse possível fazer com que o conjunto de estrelas e galáxias desse uma volta por segundo ao redor do eixo do balde.

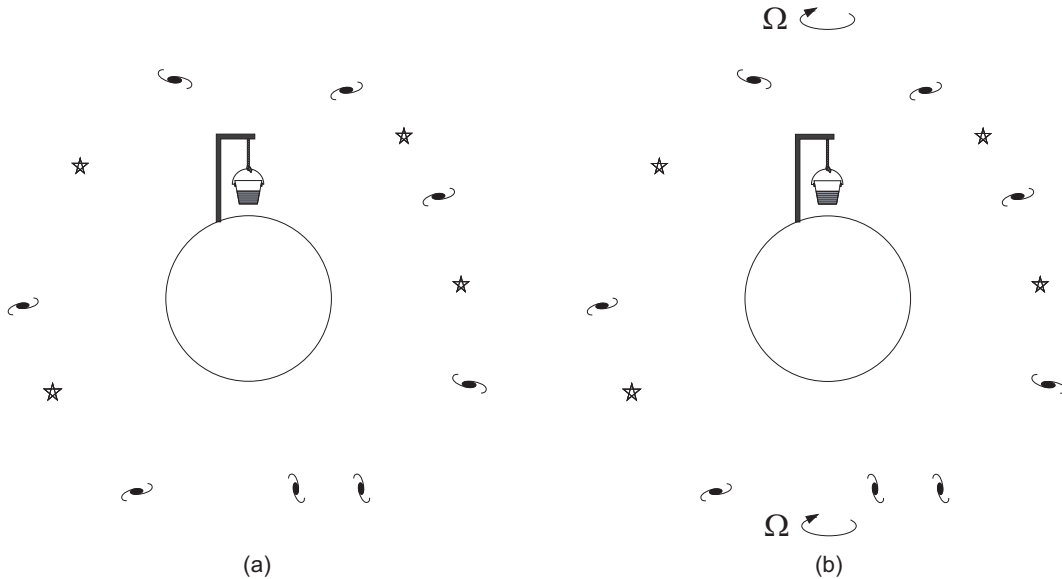



Figura 8.18: Supondo a água parada em relação ao solo, a superfície da água continuaria plana se apenas as estrelas e galáxias girassem ao redor do eixo do balde.

Veremos na Subseção 22.3.4 que a mecânica relacional faz previsões para estas situações hipotéticas que são diferentes das previsões da mecânica newtoniana.

Capítulo 9

Rotações Diárias da Terra

Neste Capítulo discutimos as rotações diárias da Terra ao redor de seu eixo na mecânica newtoniana. A rotação da Terra em relação a ela mesma é nula. Também é nula a rotação da Terra em relação a qualquer pessoa que esteja parada em relação ao solo, ou em relação a qualquer sistema de referência que esteja parado na Terra. Logo, quando dizemos que a Terra gira uma vez por dia ao redor de seu eixo Norte-Sul, esta rotação só pode ser entendida como ocorrendo em relação a outros corpos materiais externos à Terra, ou em relação a outros sistemas de referência que sejam distintos do referencial terrestre.

Há duas maneiras principais de saber que a Terra está em rotação em relação a alguma coisa. A primeira maneira é observando a rotação relativa entre a Terra e os corpos astronômicos (conjunto das estrelas fixas, Sol, galáxias distantes, radiação cósmica de fundo, etc.). Esta é a chamada *rotação relativa da Terra*, também chamada de *rotação cinemática da Terra*. Esta rotação é indicada por um efeito visual. Vemos, por exemplo, que o Sol dá uma volta por dia ao redor da Terra. Da mesma forma, ao observar as estrelas à noite, observa-se que elas dão uma volta por dia ao redor da Terra (o conjunto de estrelas desloca-se ao longo da noite em relação a uma parede presa ao solo, por exemplo). Esta rotação cinemática da Terra pode ser atribuída tanto à Terra quanto aos corpos ao seu redor. Por exemplo, pode ser afirmado que a Terra está parada enquanto o Sol e as estrelas giram diariamente ao seu redor, assim como pode ser afirmado que o Sol e as estrelas estão parados enquanto que a Terra gira diariamente ao redor de seu próprio eixo. Tanto a rotação cinemática diária entre a Terra e as estrelas, quanto a rotação cinemática diária entre a Terra e o Sol, já eram conhecidas e medidas pelos astrônomos há mais de dois mil anos.

A segunda maneira de saber que a Terra está girando é observando efeitos que ocorrem na própria Terra ou em corpos que estão ligados à Terra, sendo que estes efeitos são atribuídos à rotação da Terra. Nesta segunda maneira de se determinar a rotação da Terra não é necessário observar o Sol, as estrelas nem os outros corpos astronômicos. Esta é a chamada *rotação dinâmica da Terra*. Ela pode ser indicada ou medida através do formato da Terra (achatada nos polos). Esta rotação dinâmica da Terra também pode ser indicada ou medida através da sua influência no movimento de corpos que estão deslocando-se sobre o solo (pêndulo de Foucault, giroscópios, redemoinhos nos hemisférios Norte e Sul, etc.). Discutimos estes tópicos neste Capítulo.

Todos estes fenômenos que definem a rotação dinâmica da Terra são relativamente recentes, sendo descobertos e discutidos apenas a partir de Newton. Embora esta distinção entre uma rotação cinemática e uma rotação dinâmica possa ser aplicada a qualquer planeta ou a qualquer outro corpo do universo, restringiremos a discussão neste Capítulo às rotações cinemáticas e dinâmicas da Terra.

9.1 Rotações Relativas ou Cinemáticas da Terra

A maneira mais simples de saber que a Terra gira em relação a alguma coisa é observando os corpos astronômicos. Uma pessoa que esteja parada em relação ao solo não vai observar nenhuma rotação entre ela e a Terra. Mas se esta pessoa olhar para fora da Terra, poderá observar rotações relativas entre a Terra e outros corpos astronômicos. Nesta Seção vamos analisar algumas destas rotações relativas.

9.1.1 Rotação em Relação às Estrelas — Dia Sideral

Uma das rotações cinemáticas da Terra é aquela que ocorre em relação às estrelas fixas, ou seja, em relação às estrelas que pertencem à nossa galáxia, a Via Láctea. Embora a Lua, o Sol, os planetas e os cometas

estejam em movimento em relação ao pano de fundo das estrelas, não há praticamente nenhum movimento perceptível de uma estrela em relação às outras. O céu visto hoje em dia com suas constelações de estrelas é essencialmente o mesmo céu visto pelos antigos gregos ou egípcios. Embora o conjunto das estrelas gire em relação à Terra, elas quase não se movem umas em relação às outras e por este motivo elas são usualmente chamadas de estrelas fixas. Aristarco de Samos previu ao redor de 200 a. C. a paralaxe estelar (movimento ou mudança de posição de uma estrela em relação às outras estrelas) que deveria surgir devido ao movimento anual da Terra ao redor do Sol. Apesar disto, a primeira observação desta paralaxe só foi feita por F. W. Bessel em 1838.

É a rotação diária do conjunto de estrelas ao redor da Terra que define seu eixo geográfico Norte-Sul. Esta rotação ocorre ao redor do eixo Norte-Sul geográfico terrestre. Ao tirarmos uma fotografia do céu noturno com uma longa exposição, observamos no hemisfério Norte que todas as estrelas giram aproximadamente ao redor da estrela polar Norte, que é uma estrela bem brilhante no céu, figura 9.1.

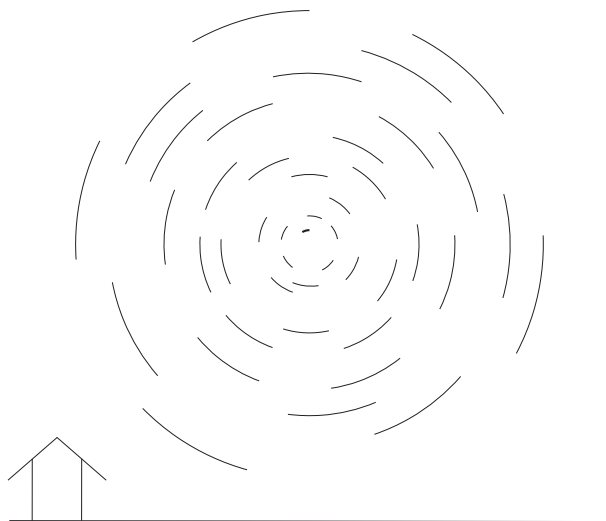



Figura 9.1: Estrelas girando aproximadamente ao redor da estrela polar Norte, como observadas em uma fotografia de longa exposição tirada no hemisfério Norte.

Existem dois pontos no céu, opostos em relação ao centro da Terra, ao redor dos quais as estrelas dão uma volta por dia. O cruzamento do eixo ligando estes pontos com a superfície da Terra define seus polos geográficos Norte e Sul.

Na figura 9.2 apresentamos qualitativamente o céu com as estrelas como visto por alguém que esteja parado no polo Norte. O retângulo representa uma parede presa ao solo. Em (a) vemos a parede alinhada com um conjunto de estrelas no instante inicial. Em (b) vemos a mesma situação 3 horas depois. Observa-se que as estrelas deslocam-se conjuntamente em relação ao solo.

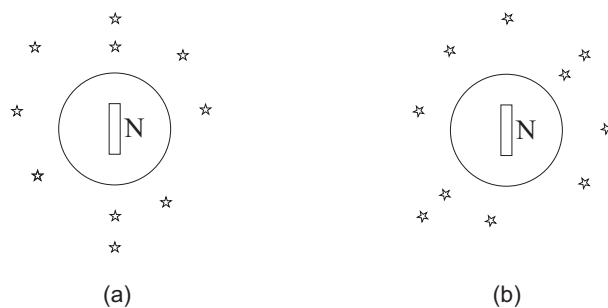



Figura 9.2: Estrelas vistas ao redor da Terra por alguém que está parado no solo, no polo Norte. (a) Situação das estrelas no instante inicial. (b) Situação das estrelas 3 horas mais tarde.

O intervalo de tempo ou período para que haja uma rotação completa entre a Terra e o conjunto de estrelas fixas, ou o intervalo de tempo para alguma estrela específica cruzar duas vezes o meridiano local, é chamado de dia sideral. Seu valor é de 23 horas, 56 minutos e 4 segundos, ou seja, 86.164 segundos.

Vamos representar a velocidade angular de rotação *cinemática* da Terra em relação às estrelas fixas por ω_c. O índice inferior c vem da inicial da palavra "cinemática." Esta é uma rotação da Terra em relação a corpos materiais externos à Terra (as estrelas, neste caso específico). Esta velocidade angular é então dada por

$$\omega_c = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{86.164} = 7,29 \times 10^{-5} \ \frac{rad}{s} \ . \tag{9.1}$$

9.1.2 Rotação em Relação ao Sol — Dia Solar

A variação entre o dia e a noite define o chamado dia solar. O intervalo de tempo ou período entre duas nascidas do Sol no horizonte, ou o intervalo de tempo para o Sol cruzar duas vezes o meridiano local, é chamado de dia solar.

Desde pelo menos a época de Ptolomeu (100-170 d.C.) os astrônomos consideravam o dia sideral como tendo uma duração constante e uniforme ao longo do ano, supondo também que ele não mudava ao longo dos séculos. Por milhares de anos este foi o relógio mais preciso que se conhecia. Quando comparado com o dia sideral, observa-se que o dia solar muda ao longo dos meses do ano. Isto já era conhecido desde Ptolomeu. Em sua obra *Almagesto* aparece a chamada "equação do tempo" descrevendo a variação do dia solar comparado com o dia sideral. Esta variação pode chegar a 16 minutos dependendo da época. O dia solar médio (obtido por uma média ao longo de todo o ano da duração dos dias solares) tem por definição 24 horas, ou seja, 86.400 segundos. Em um ano o Sol realiza essencialmente 365,25 voltas ao redor da Terra, enquanto que as estrelas dão 366,25 voltas ao redor da Terra.

Outra diferença entre os dias siderais e solares é que as estrelas sempre nascem no mesmo ponto do horizonte terrestre, enquanto que o Sol nasce em posições diferentes do horizonte ao longo dos meses, oscilando entre dois extremos localizados ao redor do Leste local. O intervalo de tempo entre duas nascidas do Sol em qualquer um destes extremos é o ano solar. Para uma discussão sobre os dias siderais e solares ver os trabalhos de Kuhn e Barbour.[1]

Newton mencionou a equação do tempo no Escólio ao final de suas definições no início do Livro I do *Principia*:[2]

> Tempo absoluto, em astronomia, é distinguido do tempo relativo, pela equação ou correção do tempo aparente. Porque os dias naturais são de fato desiguais, apesar de serem comumente considerados como iguais e usados como uma medida de tempo; os astrônomos corrigem essa desigualdade, para que possam medir os movimentos celestes por um tempo mais rigoroso. Pode ser que não haja algo como movimento uniforme, onde o tempo possa ser rigorosamente medido. Todos os movimentos podem ser acelerados e retardados, mas o fluxo de tempo absoluto não é passível de mudanças. A duração ou perseverança da existência das coisas permanece a mesma, sejam os movimentos rápidos ou lentos, ou até completamente nulos. E, portanto, essa duração deve ser distinguida daquelas que são apenas suas medidas perceptíveis, a partir das quais aquela é deduzida através da equação astronômica. A necessidade dessa equação para determinar os tempos de um fenômeno é evidenciada tanto a partir de experimentos com relógios de pêndulo, como pelos eclipses dos satélites de Júpiter.

Ao mencionar os relógios de pêndulo neste trecho, Newton está se referindo às experiências de Huygens publicadas em seu livro *O Relógio de Pêndulo*, de 1673.[3] Nestas experiências Huygens verificou que ao longo do ano um pêndulo realiza um mesmo número de oscilações em qualquer dia sideral. Por outro lado, o número de oscilações realizadas pelo pêndulo em cada dia solar dependia da época do ano. Esta dependência coincidia com a equação do tempo já conhecida pelos astrônomos. Por exemplo, vamos supor que contamos o número de oscilações que o pêndulo realiza ao longo do dia em três datas diferentes, 7 de janeiro, 23 de abril e 18 de setembro. Huygens encontrou que os números de oscilações vão ser sempre os mesmos, desde que elas sejam medidas nestas três datas ao longo de três dias siderais (ou seja, contar o número de oscilações entre duas passagens de uma certa estrela pelo meridiano local). Por outro lado, ao medir os números de oscilações nestas três datas utilizando três dias solares (ou seja, contar o número de oscilações entre duas passagens do Sol pelo meridiano local), estes números de oscilações não vão coincidir entre si.

---

[1] [Kuh57, págs. 9-10 e 266-268] e [Bar89, Seções 3.15 e 11.6].
[2] [New90, págs. 8-9].
[3] [Huy13, págs. 16-20], [Huy34, págs. 106-113] e [Huy86, págs. 23-27].

Também os períodos das órbitas dos satélites de Júpiter ao redor de Júpiter são uniformes ao longo dos meses quando comparados com os dias siderais, mas não são uniformes quando comparados com os dias solares. Mais uma vez a correção coincide com a equação do tempo. A relação dos eclipses dos satélites de Júpiter com a equação do tempo foi estudada pelo astrônomo John Flamsteed (1646-1719) que realizou as primeiras pesquisas modernas sobre a equação do tempo ao redor de 1672.[4]

9.1.3 Rotação em Relação às Galáxias Distantes

Hoje em dia também é possível descrever a rotação diária da Terra em relação ao conjunto de galáxias distantes. A realidade das galáxias externas foi estabelecida por Hubble em 1924 quando ele determinou (após encontrar estrelas cefeidas variáveis nas nebulosas) que as nebulosas são sistemas estelares fora da Via Láctea. Podemos então determinar cinematicamente nossas velocidades translacional e rotacional em relação ao sistema isotrópico de galáxias. Este é o sistema de referência em relação ao qual as galáxias não têm velocidade translacional ou rotacional como um todo, no qual as galáxias estão essencialmente em repouso umas em relação às outras e em relação a este referencial, a não ser pelas pequenas velocidades peculiares de uma galáxia em relação às outras. A velocidade angular de rotação da Terra em relação a este referencial das galáxias é essencialmente a mesma que a rotação diária da Terra em relação às estrelas fixas.

9.1.4 Rotação em Relação à Radiação Cósmica de Fundo

Outra rotação cinemática moderna da Terra é sua rotação diária em relação à radiação cósmica de fundo, também chamada de RCF ou CBR (iniciais das expressões em língua portuguesa, *radiação cósmica de fundo*, e em língua inglesa, *cosmic background radiation*). Esta radiação foi descoberta por Penzias e Wilson em 1965,[5] tendo um espectro de corpo negro com uma temperatura característica de $2,7\ K$. Ela é altamente isotrópica. Porém, desde 1969 foi medida uma anisotropia de dipolo nesta radiação, interpretada como sendo devida ao movimento de translação da Terra em relação à radiação cósmica de fundo.[6] Este movimento gera desvios Doppler que são detectados e medidos.

O referencial que não apresenta esta anisotropia de dipolo pode ser chamado de *referencial da radiação cósmica de fundo*, ou referencial da RCF.

Utilizando esta anisotropia de dipolo poderia ser medido, ao menos em princípio, a velocidade média de translação do sistema solar em relação à RCF. Medindo esta velocidade em intervalos de 6 meses, poderia ser obtida, a partir da diferença entre estes valores, a velocidade angular de rotação do sistema solar em relação à RCF. Medindo depois esta velocidade em lados opostos do equador terrestre, ou fazendo duas medidas desta velocidade no mesmo ponto do equador terrestre com um intervalo de 12 horas, poderia ser obtida, a partir da diferença entre estes valores, a velocidade angular de rotação da Terra em relação à RCF. Ou seja, quando houver precisão suficiente, poderá ser determinada a velocidade angular de rotação da Terra em relação a este referencial no qual a radiação cósmica de fundo é essencialmente isotrópica.

9.1.5 Equivalência entre os Sistemas Ptolomaico e Copernicano a Partir das Rotações Cinemáticas da Terra

A rotação cinemática entre a Terra e os corpos astronômicos pode ser interpretada de pelo menos duas maneiras distintas e equivalentes. Para exemplificar isto vamos considerar a rotação diária observada entre a Terra e o conjunto das estrelas fixas. Vamos considerar ainda um certo dia do ano em que o dia solar tem a mesma duração que o dia sideral, de tal forma que o Sol possa ser considerado em repouso em relação às estrelas fixas.

A primeira interpretação é considerar o ponto de vista de alguém que esteja parado na Terra. Neste caso a Terra fica parada, enquanto que o Sol e as estrelas giram ao redor do eixo Norte-Sul da Terra com o período de um dia sideral, figura 9.2. O retângulo indica uma parede presa ao polo Norte terrestre.

A segunda interpretação é considerar o ponto de vista de alguém que esteja parado em relação ao referencial das estrelas fixas. Neste caso estas estrelas são vistas em repouso, enquanto que a Terra gira ao redor de seu eixo Norte-Sul com um período de um dia sideral, figura 9.3.

[4][Bar89, pág. 633].
[5][PW65].
[6][Con69], [Bor88, Seção 2.5, págs. 80-87] e [Wes91, págs. 77-78].

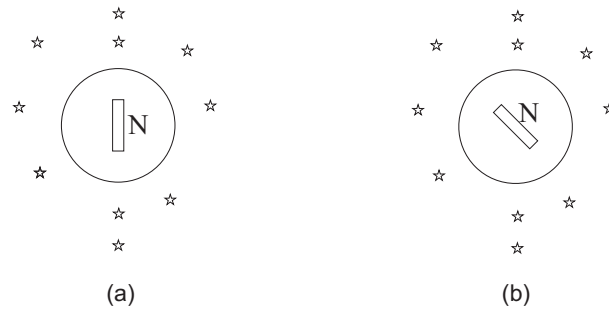



Figura 9.3: Terra vista por alguém que está parado em relação ao conjunto das estrelas fixas. (a) Situação da Terra no instante inicial. (b) Situação da Terra 3 horas mais tarde.

A configuração da figura 9.2 (b) pode ser obtida a partir da configuração da figura 9.3 (b) girando esta última configuração de 45º no sentido anti-horário ao redor do eixo Norte-Sul da Terra. Isto significa que estas duas configurações são visualmente ou cinematicamente indistinguíveis.

Na figura 9.4 apresentamos a equivalência entre estes dois sistemas de outra maneira. O retângulo indica uma parede presa ao polo Norte terrestre. Na figura 9.4 (a) temos o ponto de vista de alguém preso ao solo, com as estrelas e o Sol girando no sentido horário com uma velocidade angular ω_c e com um período de um dia sideral. Já em (b) temos o ponto de vista de alguém parado em relação ao conjunto das estrelas fixas. Neste caso o Sol e as estrelas ficam parados, enquanto que a Terra gira ao redor de seu eixo Norte-Sul no sentido anti-horário com um período de um dia sideral, figura 9.4 (b). Nesta figura o referencial representado pelo papel é considerado como estando em repouso em relação à pessoa que está observando os fenômenos.

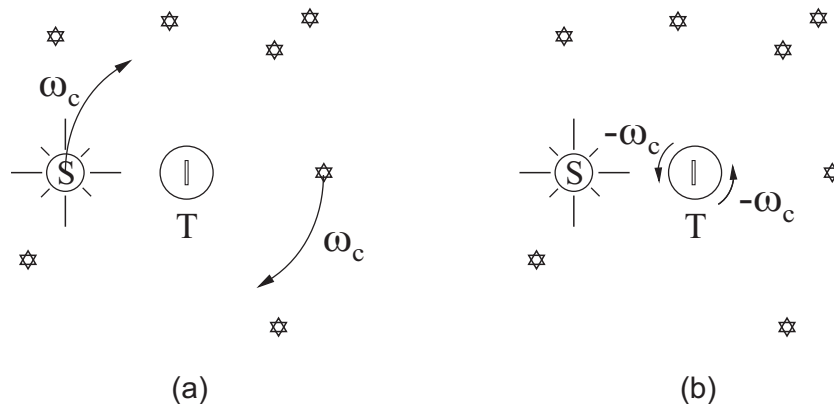



Figura 9.4: (a) Terra parada enquanto que o Sol e as estrelas giram ao redor do eixo Norte-Sul da Terra com uma velocidade angular ω_c. (b) Sol e estrelas parados enquanto que a Terra gira ao redor de seu eixo Norte-Sul com uma velocidade angular $-\omega_c$.

Do ponto de vista cinemático ou visual, há uma equivalência completa entre estas duas interpretações. O mesmo pode ser dito em relação aos sistemas copernicano e ptolomaico. No sistema copernicano o Sol e as estrelas são considerados em repouso, a Terra orbita ao redor do Sol com o período de um ano, ao mesmo tempo em que a Terra gira ao redor de seu eixo Norte-Sul com o período de um dia. No sistema ptolomaico a Terra é considerada em repouso, o Sol e as estrelas giram em relação ao eixo Norte-Sul da Terra com o período de um dia, enquanto que o Sol descreve uma órbita em relação às estrelas fixas com o período de um ano. Apenas observando os movimentos relativos entre a Terra, o Sol e as estrelas não se pode decidir qual destes dois sistemas do mundo é o correto ou verdadeiro. Tanto o sistema copernicano quanto o ptolomaico explicam igualmente bem os fenômenos observados, sendo cinematicamente equivalentes.

Podemos adicionar movimentos comuns para a Terra e para o Sol (como, por exemplo, uma rotação ou uma translação em relação ao espaço absoluto) sem alterar o movimento relativo entre ambos. É importante perceber aqui que a partir da rotação relativa observada entre o Sol e a Terra, não podemos determinar qual deles está realmente se movendo em relação ao espaço absoluto. A única coisa observada e medida neste caso é o movimento relativo entre ambos. Neste sentido os sistemas ptolomaico e copernicano são igualmente razoáveis e compatíveis com as observações. Escolher entre um ou outro sistema é puramente uma questão

de gosto considerando apenas este movimento relativo entre a Terra e os corpos astronômicos.

Indicamos aqui quatro rotações cinemáticas diferentes da Terra. Elas estão relacionadas com um movimento relativo entre a Terra e corpos astronômicos externos, ou entre a Terra e uma radiação externa. Não podemos determinar por quaisquer destes meios qual corpo está realmente girando, se a Terra ou se os corpos distantes. Até agora podemos adotar qualquer ponto de vista sem problemas adicionais, ou seja: a Terra está em repouso (em relação ao espaço absoluto de Newton, por exemplo) e estes corpos giram ao redor da Terra, ou estes corpos estão essencialmente em repouso e é a Terra que gira ao redor de seu eixo (em relação ao espaço absoluto de Newton, por exemplo).

Na Seção 9.2 veremos como distinguir entre estes dois pontos de vista dinamicamente.

9.2 Rotações Dinâmicas da Terra

Nesta Seção analisamos fenômenos que ocorrem com a Terra ou com corpos em suas proximidades e que permitem distinguir dinamicamente os sistemas copernicano e ptolomaico apresentados na Subseção 9.1.5. Dentro do ponto de vista da mecânica newtoniana existem fenômenos observáveis que só surgem quando a Terra gira diariamente ao redor de seu eixo em relação ao espaço absoluto, enquanto que as estrelas e os outros corpos astronômicos ao seu redor ficam parados no espaço absoluto. Estes fenômenos não surgiriam se a Terra estivesse parada em relação ao espaço absoluto, enquanto que as estrelas e os outros corpos astronômicos ao seu redor girassem diariamente ao redor da Terra. Embora estas duas situações sejam cinematicamente equivalentes, elas não são dinamicamente equivalentes na mecânica newtoniana.

9.2.1 Previsão de Newton para o Achatamento da Terra

Foi visto na Seção 8.4 que quando um balde com água gira em relação ao espaço absoluto, a água sobe pelas paredes do balde adquirindo um formato parabólico. De acordo com Newton, é esta tendência que os corpos possuem de se afastar do eixo de rotação que indica a rotação absoluta destes corpos. O planeta Terra é composto essencialmente de água. Logo, se a Terra estiver girando diariamente ao redor de seu eixo Norte-Sul em relação ao espaço absoluto com uma velocidade angular ω_d, a água que a compõe deve tender a se afastar deste eixo. Estamos representando a rotação *dinâmica* da Terra por ω_d. O índice inferior d vem da inicial da palavra "dinâmica." Esta rotação dinâmica é conceitualmente distinta da rotação *cinemática* da Terra, que foi indicada na Seção 9.1 pelo índice inferior c em ω_c. A Terra deve então ser achatada nos polos e expandida ao longo do equador, como indicado na figura 9.5, na qual consideramos o referencial do papel como estando em repouso em relação ao espaço absoluto.

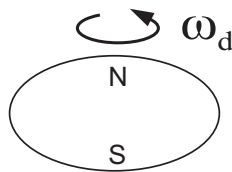



Figura 9.5: Achatamento da Terra devido à sua rotação diária em relação ao espaço absoluto.

Newton discutiu este achatamento dos planetas nas Proposições 18 e 19 do Livro III do *Principia*:[7]

Proposição 18. Teorema 16

> *Que os eixos dos planetas são menores do que os diâmetros traçados perpendicularmente aos eixos.*
>
> A gravitação igual das partes sobre todos os lados daria uma forma esférica aos planetas, se não fosse por suas revoluções diurnas num círculo. Por este este movimento circular acontece que as partes que se afastam do eixo tentam subir em direção ao equador. Portanto, se a matéria está num estado fluido, por sua subida em direção ao equador ela aumentará seus diâmetros, e por sua descida em direção aos polos ela vai encurtar o eixo. Assim o diâmetro de Júpiter (pelas observações coincidentes dos astrônomos) é encontrado menor de polo a polo do que de Leste a Oeste. E, pelo mesmo argumento, se nossa Terra não fosse mais alta no equador do que nos

[7] [New08b, págs. 213-216].

polos, os mares iriam abaixar nos polos e, subindo em direção ao equador, iriam inundar tudo por lá.

Proposição 19. Problema 3

Achar a proporção do eixo de um planeta para os diâmetros perpendiculares a ele.

[...], e, portanto, o diâmetro da Terra no equador está para o diâmetro de polo a polo assim como 230 está para 229. [...]

Esta previsão teórica de Newton para o achatamento da Terra (até sua época não havia nenhuma determinação deste fato) é bem precisa quando comparada com as determinações experimentais modernas.[8]

O motivo deste achatamento da Terra nos polos na mecânica newtoniana é a rotação da Terra em relação ao espaço absoluto ou em relação a um referencial inercial.

9.2.2 Cálculo do Achatamento da Terra

Nesta Subseção apresentamos as contas e a previsão teórica do achatamento da Terra. Quando dissermos que a Terra gira, estaremos nos referindo ao seu movimento em relação ao espaço absoluto ou em relação a um referencial inercial. Vamos fazer os cálculos considerando graus crescentes de complexidade no problema: (a) Terra parada, (b) Terra girando e supondo a força gravitacional por unidade de massa sendo devida a uma distribuição esfericamente simétrica de matéria, e (c) a solução real de uma Terra girando mas supondo agora a força gravitacional por unidade de massa sendo devida a uma distribuição elipsoidal de matéria.

Vamos usar um sistema de coordenadas esféricas $(r,\ \theta,\ \varphi)$ parado em relação ao referencial inercial e com origem no centro da Terra. Vamos supor o globo terrestre composto apenas de água com uma densidade de massa constante em todos os pontos de seu interior. De acordo com a equação (6.88), vamos representar tanto a densidade de massa inercial quanto a densidade de massa gravitacional pelo mesmo símbolo, que nesta Subseção será indicado pela letra ρ. Um elemento com volume infinitesimal dV possui uma massa inercial dm_i e uma massa gravitacional dm_g. De acordo com as equações (6.20) e (6.21), vamos representar estas duas quantidades infinitesimais de massa pelo mesmo símbolo, dm, tal que $dm = \rho dV$.

As forças que atuam sobre um elemento de massa dm na mecânica newtoniana são o peso deste elemento, $d\vec{P}$, e o empuxo exercido pelo restante do líquido ao seu redor, $d\vec{E}$. A força gravitacional pode ser escrita como $d\vec{P} = dm\vec{g}$, onde $\vec{g}$ é a força gravitacional por unidade de massa na região em que dm se localiza, sendo esta força exercida por todo o restante da massa terrestre. A força de empuxo sobre dm é devida ao gradiente de pressão no local em que dm se localiza. Representando esta pressão por p, a força de empuxo pode ser escrita como $d\vec{E} = -(\nabla p)dV$. A equação de movimento para este elemento de massa é dada por:

$$dm\vec{g} - (\nabla p)dV = dm\vec{a} \ , \tag{9.2}$$

onde $\vec{a}$ é a aceleração do elemento de massa dm em relação a um referencial inercial.

Cálculo da Força Gravitacional por Unidade de Massa Devida a uma Distribuição Esférica de Matéria em Repouso

Inicialmente vamos supor que a Terra (ou um planeta qualquer) está parada em relação ao referencial inercial, $\vec{a} = \vec{0}$.

Para resolver a equação (9.2) quando $\vec{a} = \vec{0}$ precisa-se da expressão da força gravitacional por unidade de massa, $\vec{g}$. Como Newton afirmou,[9] a gravitação igual das partes sobre todos os lados dá uma forma esférica a um planeta parado. Vamos supor então uma distribuição esfericamente simétrica de matéria de raio R e massa $M = 4\pi R^3\rho/3$. Utilizando a equação (1.15) pode-se mostrar facilmente que a força gravitacional por unidade de massa em um ponto $\vec{r}$ no interior desta distribuição esfericamente simétrica de massa é dada por:

$$\vec{g}(r < R) = -GMr\frac{\hat{r}}{R^3} \ . \tag{9.3}$$

Ou seja, a força gravitacional por unidade de massa no interior da Terra cresce linearmente com a distância r ao centro da Terra, apontando para este centro.

[8] [New34, págs. 427 e 664, nota 41] e [Mar89].

[9] [New08b, pág. 213].

O gradiente da pressão em coordenadas esféricas pode ser escrito como:

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial p}{\partial \varphi}\hat{\varphi} \ , \tag{9.4}$$

onde $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ e $\hat{\varphi}$ são os vetores unitários ao longo das direções r, θ e φ das coordenadas esféricas.

Aplicando as equações (9.3) e (9.4) na equação (9.2) no caso em que $\vec{a} = \vec{0}$ obtém-se:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{GM\rho}{R^3} r \ . \tag{9.5}$$

Integrando esta equação e impondo que $p(R) = p_o$, onde p_o é a pressão atmosférica, obtém-se a pressão em um ponto qualquer no interior do planeta sendo dada por:

$$p(r) = p_o + \frac{GM\rho}{2R} - \frac{GM\rho}{2R^3} r^2 \ . \tag{9.6}$$

Ou seja, a pressão no interior de um planeta parado cresce da superfície em direção ao centro, indo de p_o até $p_o + GM\rho/(2R)$. Enquanto que g cresce linearmente com r, a pressão varia quadraticamente com r, sendo r a distância de um ponto qualquer até o centro do planeta.

Cálculo do Formato da Terra Girando ao Supor uma Força Gravitacional por Unidade de Massa Devida a uma Distribuição Esférica de Matéria

Assumimos agora que a Terra gira com uma velocidade angular constante $\vec{\omega} = \omega_d \hat{z}$ em relação a um referencial inercial, onde escolhemos para simplificar a análise o eixo z como estando ao longo do eixo Norte-Sul de rotação terrestre. O índice inferior d indica a rotação dinâmica da Terra em relação ao espaço absoluto de Newton, ou em relação a um referencial inercial.

O vetor posição de um elemento de massa dm em coordenadas retangulares $(x,\ y,\ z)$, esféricas $(r,\ \theta,\ \varphi)$ e cilíndricas $(u,\ \varphi,\ z)$ é dado por:

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = r\hat{r} = u\hat{u} + z\hat{z} \ , \tag{9.7}$$

onde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ é a distância de dm até a origem do sistema de coordenadas, ou seja, até o centro da Terra, sendo $u = \sqrt{x^2 + y^2} = r \operatorname{sen}\theta$ a distância de dm ao eixo z de rotação. Além disso, $\hat{u} = \hat{r}\operatorname{sen}\theta + \hat{\theta}\cos\theta$ é o vetor unitário das coordenadas cilíndricas expresso em termos das coordenadas esféricas.

Como o único movimento de dm é uma órbita circular ao redor do eixo z, sua aceleração é simplesmente a centrípeta apontando para o eixo de rotação e sendo dada por

$$\vec{a} = \vec{\omega}_d \times (\vec{\omega}_d \times \vec{r}) = -\omega_d^2 u\hat{u} = -\omega_d^2 r \operatorname{sen}\theta(\hat{r}\operatorname{sen}\theta + \hat{\theta}\cos\theta) \ . \tag{9.8}$$

Para resolver este problema vamos usar como uma primeira aproximação que a força gravitacional por unidade de massa é devida a uma distribuição esférica de matéria.[10] Ou seja, vamos usar o valor da força por unidade de massa dada pela equação (9.3). Aplicando as equações (9.3), (9.4) e (9.8) na equação (9.2) obtêm-se as seguintes equações para as componentes $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$ da equação de movimento:

$$-\frac{GM\rho}{R^3} r - \frac{\partial p}{\partial r} = -\omega_d^2 \rho r \operatorname{sen}^2\theta \ , \tag{9.9}$$

e

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} = -\omega_d^2 \rho r \operatorname{sen}\theta\cos\theta \ . \tag{9.10}$$

A solução destas equações leva a:

$$p = -\frac{GM\rho r^2}{2R^3} + \frac{\rho\omega_d^2 r^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2} + C \ , \tag{9.11}$$

onde C é uma constante.

A superfície isobárica que está na pressão atmosférica p_o é caracterizada por uma equação relacionando r com θ dada por:

[10] Ver [Sym82, Exercício 7.10].

$$r^2 = \frac{2R^3}{\rho GM} \frac{C - p_o}{1 - \frac{\omega_d^2 R^3}{GM} \operatorname{sen}^2\theta} . \tag{9.12}$$

Chamando o raio polar quando $\theta = 0$ de $R_<$ obtém-se:

$$R_<^2 = \frac{2R^3}{\rho GM}(C - p_o) . \tag{9.13}$$

Chamando de $R_>$ ao raio equatorial quando $\theta = \pi/2\ rad$ obtém-se:

$$R_>^2 = \frac{2R^3}{\rho GM} \frac{C - p_o}{1 - \frac{\omega_d^2 R^3}{GM}} = \frac{R_<^2}{1 - \frac{\omega_d^2 R^3}{GM}} . \tag{9.14}$$

Como $R_>$ é maior do que $R_<$, observa-se que o simples fato da Terra girar ao redor de seu eixo Norte-Sul em relação a um referencial inercial faz com que ela assuma um formato elipsoidal se for composta de um fluido. Ou seja, em vez de ficar com a forma de uma esfera de raio R, a Terra passa a ficar achatada nos polos com um raio polar $R_<$ menor do que seu raio equatorial $R_>$. O formato da Terra está representado na figura 9.6.

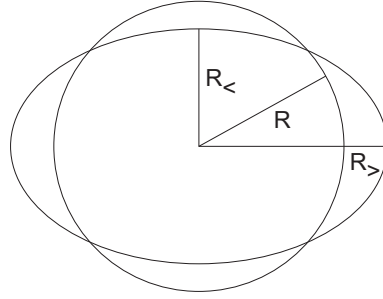



Figura 9.6: Achatamento da Terra.

No caso da Terra é válida a seguinte aproximação:

$$\frac{\omega_d^2 R^3}{GM} \ll 1 . \tag{9.15}$$

A equação (9.15) aplicada na equação (9.14) leva ao seguinte resultado, até primeira ordem em $\omega_d^2 R^3/(GM)$:

$$R_> \approx R_< \left(1 + \frac{\omega_d^2 R^3}{2GM}\right) . \tag{9.16}$$

Como estamos supondo um fluido incompressível, a densidade ρ e o volume total de água permanecem constantes. O volume de uma esfera de raio R é dado por $4\pi R^3/3$, enquanto que o volume de um elipsoide de raio menor $R_<$ ao longo do eixo z e de raio $R_>$ ao longo do plano equatorial xy é dado por $4\pi R_< R_>^2/3$. Igualando o volume desta esfera e deste elipsoide obtém-se:

$$R^3 = R_< R_>^2 . \tag{9.17}$$

A partir das equações (9.16) e (9.17) obtém-se, até primeira ordem em $\omega_d^2 R^3/(2GM)$:

$$R_> \approx R \left(1 + \frac{\omega_d^2 R^3}{6GM}\right) , \tag{9.18}$$

e

$$R_< \approx R \left(1 - \frac{\omega_d^2 R^3}{3GM}\right) . \tag{9.19}$$

Da equação (9.16) obtém-se que nesta aproximação o diâmetro da Terra no equador está para seu diâmetro de polo a polo assim como:

$$\frac{R_>}{R_<} \approx 1 + \frac{\omega_d^2 R^3}{2GM} \approx 1,0017 \ . \tag{9.20}$$

Para chegar neste número colocamos $\omega_d = 7,29 \times 10^{-5}$ rad/s, $R = 6,37 \times 10^6$ m, $G = 6,67 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2 e $M = 5,98 \times 10^{24}$ kg. O valor $\omega_d = 7,29 \times 10^{-5}$ rad/s que estamos assumindo aqui para a velocidade angular dinâmica da Terra coincide com o valor da velocidade angular cinemática da Terra, em relação às estrelas, correspondendo a um período de um dia sideral, ou seja, com $T = 86.164$ segundos.

O valor do achatamento da Terra dado pela equação (9.20) é aproximadamente metade do valor que se observa ao fazer as medidas sobre a Terra. O problema com este cálculo é que devido à rotação dinâmica da Terra, ela muda de forma, ficando aproximadamente elipsoidal. O valor da força gravitacional por unidade de massa tanto dentro quanto fora da Terra não é mais então aquele devido a uma esfera, dado pela equação (9.3). Para se chegar em um resultado mais preciso do que aquele fornecido pela equação (9.20), é necessário utilizar a força gravitacional por unidade de massa devida a um elipsoide.

Cálculo da Força Gravitacional por Unidade de Massa Devida a uma Distribuição Elipsoidal de Matéria em Repouso

Vamos supor agora um corpo elipsoidal em repouso em relação a um referencial inercial.

A força por unidade de massa devida a uma distribuição elipsoidal de matéria pode ser obtida seguindo, por exemplo, o caminho indicado por Symon.[11] Não vamos apresentar aqui todas as contas mas apenas os resultados a que chegamos seguindo estes cálculos.

Seja então um elipsoide parado em um referencial inercial, centrado na origem, e com semi-eixos a, b e c ao longos dos eixos x, y e z, respectivamente, de tal forma que $a = b = R_>$ e $c = R_< = R_>(1 - \eta)$ com $\eta \ll 1$. A equação deste elipsoide é dada por:

$$\frac{x^2}{R_>^2} + \frac{y^2}{R_>^2} + \frac{z^2}{R_<^2} = 1 \ . \tag{9.21}$$

Ele está representado no plano $y = 0$ na figura 9.7.

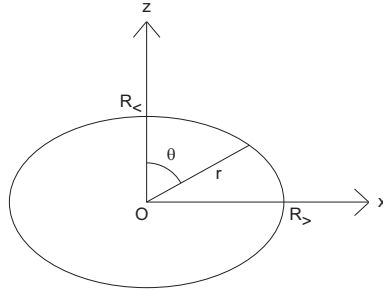



Figura 9.7: Terra no formato de um elipsoide de revolução.

Sendo $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, obtém-se que a equação descrevendo a superfície deste elipsoide no plano $y = 0$, até primeira ordem em η, é dada por:

$$r \approx R_>(1 - \eta \cos^2\theta) \approx R_<(1 + \eta - \eta\cos^2\theta) \approx R\left(1 + \frac{\eta}{3} - \eta\cos^2\theta\right) \ . \tag{9.22}$$

Vamos supor novamente uma densidade de massa gravitacional ρ constante em todos os pontos do elipsoide. Sendo M a massa gravitacional total do elipsoide e R seu raio médio obtém-se a seguinte relação ao igualar o volume da esfera e do elipsoide:

$$M = \frac{4\pi\rho R^3}{3} = \frac{4\pi\rho R_< R_>^2}{3} \ . \tag{9.23}$$

Combinando a equação (9.23) com $a = b = R_>$ e $c = R_< = R_>(1 - \eta)$ obtém-se, até primeira ordem em η:

$$R_> = a = b \approx R_<(1 + \eta) \approx R\left(1 + \frac{\eta}{3}\right) \ , \tag{9.24}$$

[11] [Sym82, exercícios 6.17 e 6.21].

$$R_< = c = R_>(1-\eta) \approx R\left(1 - \frac{2\eta}{3}\right) , \tag{9.25}$$

e

$$R \approx R_>\left(1 - \frac{\eta}{3}\right) \approx R_<\left(1 + \frac{2\eta}{3}\right) . \tag{9.26}$$

A energia potencial gravitacional U entre duas massas m_1 e m_2 separadas por uma distância r é dada por:

$$U = -\frac{Gm_1m_2}{r} \equiv m_1\Phi(\vec{r}_1) . \tag{9.27}$$

Nesta equação o potencial gravitacional $\Phi(\vec{r}_1)$ no ponto $\vec{r}_1$ onde está m_1, devido à massa m_2 localizada em $\vec{r}_2$, foi definido pela seguinte expressão:

$$\Phi(\vec{r}_1) \equiv -\frac{Gm_2}{r} = -\frac{Gm_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} . \tag{9.28}$$

Podemos calcular o potencial gravitacional em um ponto qualquer do espaço devido à massa do elipsoide ao integrar a equação (9.28) substituindo m_2 por um elemento infinitesimal de massa $dm_2 = \rho dV_2 = \rho r_2^2 \operatorname{sen}\theta_2 dr_2 d\theta_2 d\varphi_2$. O potencial gravitacional Φ que encontramos em um ponto dentro do elipsoide é (até primeira ordem em η):

$$\Phi \approx -\frac{GM}{2R^3}(3R^2 - r^2) - \frac{GM}{R^3}\frac{\eta r^2}{5}(1 - 3\cos^2\theta) . \tag{9.29}$$

Já o potencial fora do elipsoide é dado por (novamente até primeira ordem em η):

$$\Phi \approx -\frac{GM}{r}\left[1 + \frac{\eta R^2}{5r^2}(1 - 3\cos^2\theta)\right] . \tag{9.30}$$

A energia potencial dU de um elemento de massa dm interagindo com este elipsoide é dada por $dU = dm\Phi$. A força exercida pelo elipsoide sobre dm é dada por:

$$d\vec{F} = -\nabla(dU) = -dm\nabla\Phi = dm\vec{g} . \tag{9.31}$$

Aplicando esta equação nos resultados acima obtém-se que a força gravitacional por unidade de massa, $d\vec{F}/dm = \vec{g}$, no interior do elipsoide é dada por (novamente até primeira ordem em η):

$$\vec{g} \approx -\frac{GMr}{R^3}\left\{\left[1 - \frac{2}{5}\eta(1 - 3\cos^2\theta)\right]\hat{r} - \frac{6}{5}\eta \operatorname{sen}\theta\cos\theta\hat{\theta}\right\} . \tag{9.32}$$

O fato de que a força gravitacional no interior de um elipsoide, ao longo de cada eixo, cresce linearmente com a distância até a origem era bem conhecido de Newton.[12]

Já fora do elipsoide obtém-se analogamente:

$$\vec{g} \approx -\frac{GM}{r^2}\left\{\left[1 + \frac{3}{5}\frac{R^2}{r^2}\eta(1 - 3\cos^2\theta)\right]\hat{r} - \frac{6}{5}\frac{R^2}{r^2}\eta \operatorname{sen}\theta\cos\theta\hat{\theta}\right\} . \tag{9.33}$$

A força gravitacional por unidade de massa na superfície do elipsoide é dada por:

$$\vec{g} \approx -\frac{GM}{R_>^2}\left(1 + \frac{3\eta}{5} + \frac{\eta\cos^2\theta}{5}\right)\hat{r} + \frac{6}{5}\frac{GM}{R_>^2}\eta \operatorname{sen}\theta\cos\theta\hat{\theta} \approx -\frac{GM}{R_<^2}\left(1 - \frac{7\eta}{5} + \frac{\eta\cos^2\theta}{5}\right)\hat{r} + \frac{6}{5}\frac{GM}{R_<^2}\eta \operatorname{sen}\theta\cos\theta\hat{\theta}$$

$$\approx -\frac{GM}{R^2}\left(1 - \frac{\eta}{15} + \frac{\eta\cos^2\theta}{5}\right)\hat{r} + \frac{6}{5}\frac{GM}{R^2}\eta \operatorname{sen}\theta\cos\theta\hat{\theta} . \tag{9.34}$$

Da equação (9.34) obtém-se que a força sobre um elemento de massa na superfície do elipsoide no polo ($r = R_<$, $\theta = 0$) está para a força sobre um elemento de massa na superfície do elipsoide sobre o equador ($r = R_>$, $\theta = \pi/2\ rad$) assim como:

$$\frac{F_{polo}}{F_{equador}} \approx \frac{1 + 4\eta/5}{1 + 3\eta/5} \approx 1 + \frac{\eta}{5} . \tag{9.35}$$

[12] [New90, Livro I, Proposição 91, Problema 45, Corolário 3], ver também [Mar89].

Cálculo do Formato da Terra Girando ao Supor uma Força Gravitacional por Unidade de Massa Devida a uma Distribuição Elipsoidal de Matéria

Até aqui foi suposto um corpo elipsoidal em repouso em relação a um referencial inercial.

Vamos agora supor que este elipsoide está girando ao redor do eixo z em relação a um referencial inercial com uma velocidade angular constante $\vec{\omega} = \omega_d \hat{z}$. Neste caso a aceleração centrípeta de um elemento de massa dm descrevendo uma órbita circular ao redor do eixo z é dada pela equação (9.8). Pode-se agora aplicar as equações (9.4), (9.8) e (9.32) na equação (9.2). Neste caso não temos o valor de η, que ainda terá de ser determinado. Mas pela análise do caso anterior de uma Terra esférica girando, espera-se que η seja da mesma ordem de grandeza que $\omega_d^2 R^3/GM$. Com a equação (9.32) na equação (9.2) obtém-se a seguinte expressão para a pressão p em um ponto qualquer no interior da Terra fluida:

$$p = -\frac{G\rho M r^2}{2R^3}\left(1 + \frac{4}{5}\eta\right) + \left(\frac{\omega_d^2}{2} + \frac{3}{5}\eta\frac{GM}{R^3}\right)\rho r^2 \operatorname{sen}^2\theta + C \ , \tag{9.36}$$

onde C é uma constante.

Igualando a pressão no polo ($r = R_<$, $\theta = 0$) com a pressão no equador ($r = R_>$, $\theta = \pi/2\ rad$), usando $\eta \ll 1$, $\omega_d^2 R^3/GM \ll 1$ e que η é da mesma ordem de grandeza que $\omega_d^2 R^3/GM$, obtém-se

$$\eta = \frac{5\omega_d^2 R^3}{4GM} \ . \tag{9.37}$$

Isto é,

$$p = -\frac{G\rho M r^2}{2R^3}\left(1 + \frac{\omega_d^2 R^3}{GM}\right) + \frac{5}{4}\omega_d^2 \rho r^2 \operatorname{sen}^2\theta + C \ . \tag{9.38}$$

No plano $y = 0$ tem-se $r^2 = x^2 + z^2$ e $r \operatorname{sen}\theta = x$. Neste plano pode-se escrever a equação da superfície livre do fluido da seguinte forma:

$$\frac{x^2}{R_>^2} + \frac{z^2}{R_<^2} = 1 \ , \tag{9.39}$$

com

$$R_> = \sqrt{\left(1 + \frac{3}{2}\frac{\omega_d^2 R^3}{GM}\right)\frac{2(C - p_o)R^3}{\rho GM}} \ , \tag{9.40}$$

e

$$R_< = \sqrt{\left(1 - \frac{\omega_d^2 R^3}{GM}\right)\frac{2(C - p_o)R^3}{\rho GM}} \ . \tag{9.41}$$

A equação (9.39) é a equação de uma elipse, sendo este o formato da Terra no plano xz de acordo com estes cálculos. Usando mais uma vez que $\omega_d^2 R^3/GM \ll 1$ obtém-se:

$$\frac{R_>}{R_<} \approx \sqrt{\frac{1 + \frac{3\omega_d^2 R^3}{2GM}}{1 - \frac{\omega_d^2 R^3}{GM}}} \approx 1 + \eta \approx 1 + \frac{5\omega_d^2 R^3}{4GM} \ . \tag{9.42}$$

Para obter o valor da razão $R_>/R_<$ é necessário o valor de $G = 6,67 \times 10^{-11}\ m^3/(kgs^2)$, equação (1.8), a massa da Terra, $M = 5,98 \times 10^{24}\ kg$, e o raio médio da Terra, $R = 6,37 \times 10^6\ m$. Vamos supor ainda que a velocidade angular dinâmica da Terra, ω_d, tenha o mesmo valor que a velocidade angular da Terra em relação às estrelas fixas dado pela equação (9.1), a saber:

$$\omega_d = \omega_c = 7,29 \times 10^{-5}\frac{rad}{s} \ . \tag{9.43}$$

Utilizando estes valores de G, M, R e ω_d na equação (9.42) obtém-se:

$$\frac{R_>}{R_<} \approx 1 + \frac{5\omega_d^2 R^3}{4GM} \approx 1,0043 \ . \tag{9.44}$$

E este é essencialmente o valor dado por Newton, a saber:

$$\frac{R_>}{R_<} \approx \frac{230}{229} \approx 1,0044 \ . \tag{9.45}$$

É importante observar aqui duas coisas. A primeira é que para obtermos este resultado utilizamos conjuntamente a rotação da Terra e a força gravitacional por unidade de massa devida a um elipsoide (o resultado anterior, equação (9.20), não deu algo preciso pois foi suposto uma força gravitacional por unidade de massa devida a uma esfera). E o segundo ponto é que o ω_d que aparece na equação (9.42) é a velocidade angular dinâmica da Terra em relação ao espaço absoluto (ou em relação a um referencial inercial). Em princípio este ω_d não tem nada a ver com a velocidade angular ω_c cinemática da Terra em relação ao referencial das estrelas fixas que foi discutida na Seção 9.1. Só que para chegarmos no valor correto do achatamento da Terra como observado através de medidas do seu formato, é necessário que se tenha a igualdade entre ω_d e ω_c, como indicado pela equação (9.43).

Na figura 9.8 apresentamos a Terra girando em relação às estrelas com uma velocidade angular ω_c, estando a Terra achatada.

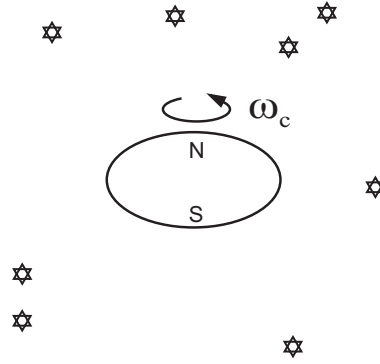



Figura 9.8: Terra achatada girando com uma velocidade angular ω_c em relação às estrelas.

Apresentamos agora outra maneira de chegar na equação (9.43). A partir da equação (9.42) obtém-se que a velocidade angular de rotação dinâmica da Terra é dada por:

$$\omega_d \approx \sqrt{\frac{4GM}{5R^3}\left(\frac{R_>}{R_<} - 1\right)} \ . \tag{9.46}$$

Utilizando na equação (9.46) o achatamento medido da Terra dado por $R_>/R_< \approx 1,0043$, juntamente com os valores medidos de G, M e R, obtém-se:

$$\omega_d \approx 7,29 \times 10^{-5} \frac{rad}{s} \ . \tag{9.47}$$

Ou seja, para obter o valor numérico de ω_d são necessários apenas os valores medidos da massa da Terra, de seu raio polar e de seu raio equatorial. Não é necessário olhar para as estrelas nem fazer qualquer medida relacionada com corpos astronômicos externos à Terra.

Curiosamente este valor de ω_d coincide com o valor da velocidade angular cinemática da Terra em relação às estrelas fixas dado pela equação (9.1).

O eixo z passando pelo centro da Terra e no qual o elipsoide terrestre tem seu menor raio $R_<$ pode ser chamado de *eixo de rotação dinâmica da Terra*. O plano xy passando pelo centro da Terra e normal ao eixo z é aquele no qual o elipsoide terrestre tem seu maior raio $R_>$. Ele pode ser chamado de *plano equatorial de rotação dinâmica da Terra*. Este eixo z e o plano xy normal a ele podem ser obtidos fazendo medidas sobre a Terra, sem olhar para as estrelas. Mas encontra-se na prática que este eixo de rotação dinâmica da Terra coincide com o eixo de rotação cinemática das estrelas ao redor da Terra com o período de um dia sideral. Ou seja, encontra-se na prática que este eixo z de rotação dinâmica da Terra obtido pelo seu achatamento coincide com o eixo geográfico Norte-Sul terrestre que já era conhecido há mais de dois mil anos pelos astrônomos ao observarem a rotação do conjunto de estrelas ao redor da Terra. Isto significa que a velocidade angular dinâmica da Terra tem não apenas o mesmo valor numérico da velocidade angular cinemática da Terra em relação ao conjunto de estrelas, como dado pela equação (9.43), mas que elas também coincidem espacialmente ou vetorialmente entre si, ou seja:

$$\vec{\omega}_d = \vec{\omega}_c \ . \tag{9.48}$$

A igualdade entre $\vec{\omega}_d$ e $\vec{\omega}_c$ dada pelas equações (9.43) e (9.48) não deve ser uma coincidência. A questão é encontrar uma ligação entre estas duas rotações da Terra que não têm relação conceitual entre si. Ou seja, é necessário encontrar algo que explique esta igualdade de duas rotações obtidas por métodos e procedimentos que são totalmente distintos entre si.

9.2.3 Qual Seria o Formato da Terra se Ela Ficasse Parada no Espaço e Todos os Outros Corpos Astronômicos Girassem ao Redor de Seu Eixo Norte-Sul com um Período de Um Dia?

Como visto na Subseção 9.2.1, a Terra fica achatada nos polos quando gira ao redor de seu eixo Norte-Sul com um período de um dia em relação ao espaço absoluto. Newton havia suposto que as estrelas fixas estavam paradas em relação ao espaço absoluto. Uma pergunta fundamental que pode ser feita é a seguinte. Vamos supor uma situação hipotética na qual a Terra esteja parada em relação ao espaço absoluto de Newton. Qual seria o formato adquirido pela Terra se fosse possível girar todos os outros corpos astronômicos ao redor do eixo Norte-Sul da Terra com um período de um dia? Em particular, vamos supor que a situação seja exatamente simétrica: Na primeira configuração temos a Terra girando do Ocidente para o Oriente em relação às estrelas paradas, enquanto que na segunda configuração temos todos os outros corpos astronômicos girando do Oriente para o Ocidente em relação à Terra parada. Ou seja, estamos supondo duas situações que sejam visualmente ou cinematicamente equivalentes, já que nos dois casos existe a mesma rotação *relativa* entre a Terra e o conjunto dos outros corpos astronômicos, tendo esta rotação o período de um dia.

Embora estas duas situações sejam cinematicamente equivalente, elas não são dinamicamente equivalentes na mecânica newtoniana. Enquanto que na primeira situação a Terra fica achatada nos polos, isto não ocorre na segunda situação, já que a Terra permaneceria com um formato esférico. Isto está ilustrado na figura 9.9, na qual supomos que o referencial do papel coincida com o referencial do espaço absoluto.

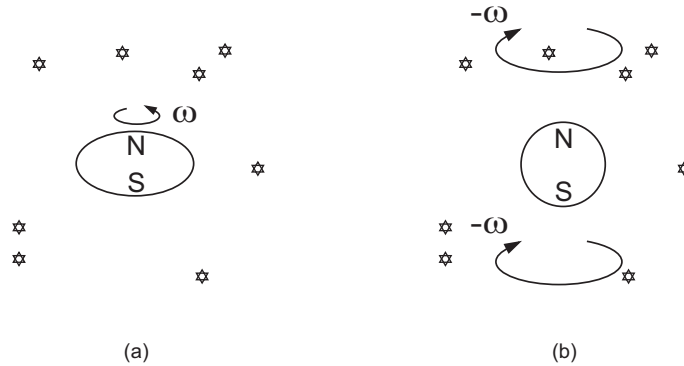



Figura 9.9: O referencial do papel coincide com o espaço absoluto. (a) Terra girando uma vez por dia ao redor de seu eixo Norte-Sul e achatada nos polos, enquanto as estrelas estão paradas. (b) Terra parada e esférica, enquanto as estrelas estão girando ao redor do eixo Norte-Sul da Terra com o período de um dia.

Na situação da figura 9.9 (a) temos a Terra girando em relação ao espaço absoluto com um período de um dia sideral, enquanto que as estrelas estão paradas. A Terra fica achatada, como calculado por Newton (ver a Subseção 9.2.1) e como observado na prática. Na situação da figura 9.9 (b) temos uma experiência de pensamento que apresenta uma situação cinematicamente equivalente. Agora a Terra está parada no espaço absoluto, enquanto que o conjunto das estrelas gira ao seu redor com o mesmo período de um dia sideral. Neste caso as únicas forças que atuam sobre qualquer elemento de volume da água compondo a Terra são a força gravitacional exercida pelo restante da massa da Terra e a força de empuxo devida ao gradiente de pressão. Estas duas forças se equilibram em qualquer ponto fazendo com que a Terra fique esférica quando está em repouso no espaço absoluto. Como as estrelas ao redor da Terra estão distribuídas mais ou menos uniformemente ao seu redor, elas não exercem uma força resultante sobre as moléculas da água, como provado por Newton na Proposição 70, Teorema 30, do Livro I do *Principia*, apresentado na Subseção 1.4.1. Como sua força gravitacional não depende da velocidade nem da aceleração entre os corpos, o resultado fornecido pela equação (1.15) vai continuar válido quando a casca esférica estiver girando no

espaço absoluto, como visto na equação (1.21). Isto significa que mesmo quando as estrelas estão girando ao redor da Terra, como na figura 9.9 (b), a força resultante que elas exercem sobre as moléculas da Terra pode ser desprezada. Não vai haver então nenhuma força que tenda a achatar a Terra nos polos. Logo ela vai permanecer esférica nesta situação hipotética.

Ou seja, embora as duas situações da figura 9.9 sejam cinematicamente equivalentes, elas não são dinamicamente equivalentes. Enquanto que na situação (a) ocorre um achatamento da Terra, o mesmo já não ocorre na situação (b).

O próprio Newton expressou claramente sua convicção de que a Terra não se achataria na situação da figura 9.9 (b) em um texto muito interessante denominado *O Peso e o Equilíbrio dos Fluidos*. Neste texto Newton está se colocando frontalmente contrário à concepção de movimento apresentada por Descartes (1596-1650) no livro *Princípios Filosóficos*, que havia sido publicado em 1644 e que Newton estudou enquanto estudante em Cambridge. Este texto de Newton foi publicado pela primeira vez apenas em 1962. Os primeiros que o publicaram, A. R. Hall e M. B. Hall, sugeriram que o texto de Newton pode ter sido escrito entre 1664 e 1668.[13] Já Betty Dobbs acredita que este texto tenha sido escrito entre 1679 e 1687.[14] Neste texto Newton afirmou o seguinte, nossa ênfase:[15]

> Em quarto lugar: das mesmas teses de Descartes segue que o próprio Deus não poderia gerar movimento em alguns corpos, mesmo que os impulsionasse com a maior força. Por exemplo, se Deus impulsionasse o céu estrelado juntamente com a parte mais longínqua do universo com uma força muito grande, de modo a fazê-lo girar em torno da Terra — suponhamos com um movimento diurno —, ainda assim a partir disso, na opinião de Descartes, só a Terra se moveria verdadeiramente, e não o céu (Parte Terceira, artigo 38).[16] Como se fosse a mesma coisa, se Deus, com uma força tremenda, fizesse o céu girar do Oriente para o Ocidente, ou fizesse a Terra girar na direção oposta. *Todavia, quem imaginará que as partes da Terra tendem a afastar-se do seu centro em virtude de uma força aplicada exclusivamente ao céu?* Não é porventura mais condizente pensar que, quando uma força aplicada ao céu o faz tender a afastar-se do centro da revolução assim produzida, ele é, por este motivo, o único corpo que se move no sentido próprio e absoluto? Não é mais condizente pensar que, quando uma força aplicada à Terra faz com que as suas partes tendam a afastar-se do centro de revolução assim produzida, ela é, por este motivo, o único corpo que se move em sentido próprio e absoluto, embora exista o mesmo movimento relativo dos corpos em ambos os casos? Por conseguinte, o movimento físico e absoluto deve ser definido a partir de considerações outras que o deslocamento, uma vez que tal deslocamento constitui uma designação puramente externa.

Acreditamos que este texto tenha sido escrito por Newton antes de ter sua formulação final da teoria da gravitação universal. Em particular, ele deve ter sido escrito antes que Newton tivesse provado que é nula a força gravitacional exercida por uma casca esférica sobre qualquer ponto material em seu interior, equação (1.15). Newton parece ter tido desde o início de seus estudos uma profunda convicção na existência do espaço absoluto desvinculado de qualquer tipo de matéria e que seria possível conceber a existência do movimento de um corpo qualquer em relação a este espaço vazio, mesmo que não existissem outros corpos no universo.

De qualquer forma, depois que ele obteve o resultado dado pela equação (1.15) ele passou a ter um argumento muito mais forte para negar qualquer possível influência das estrelas sobre a Terra. E foi exatamente isto que ele mencionou no *Principia* ao afirmar que:[17]

> [...] as estrelas fixas, dispersas promiscuamente por todo lado nos céus, destroem suas ações mútuas devido a suas atrações contrárias, pela Proposição 70, Livro I.

De qualquer forma, é incrível perceber que o próprio Newton chegou a considerar o ponto de vista relacional e a pensar na possibilidade de que ao girar o conjunto de estrelas ao redor de um corpo, poderiam surgir forças centrífugas sobre este corpo. Ele rejeitou esta ideia, mas não deixa de ser fascinante observar que ele considerou claramente esta possibilidade. Como o texto *O Peso e o Equilíbrio dos Fluidos* só foi publicado em 1962, não chegou a influenciar os autores que publicaram sobre os fundamentos da mecânica

---

[13] [HH62, pág. 90].
[14] [New99, págs. 47 e 58].
[15] [HH62, págs. 127-128], [New83, págs. 66-67] e [Ear89, pág. 63], nossa ênfase.
[16] [Nota de Hall e Hall:] Que, segundo a hipótese de Tycho, se diz que a Terra se move em torno do seu próprio eixo.
[17] [New08b, Corolário 2, Prop. 14, Teor. 14, Livro III, pág. 211].

nos 300 anos após a publicação do *Principia* em 1687. Foram necessários 200 anos até que Ernst Mach chegasse novamente a esta ideia de que ao girar o céu de estrelas ao redor de um corpo poderiam surgir forças centrífugas neste corpo, como será visto nas Seções 13.6 e 13.7.

9.2.4 Pêndulo de Foucault

A demonstração mais impressionante da rotação dinâmica da Terra foi obtida em 1851 por Foucault (1819-1868).[18] A importância desta experiência é que ela pode ser realizada em uma sala fechada, de tal forma que podemos obter a rotação da Terra sem olhar para o céu.

A experiência consiste em um pêndulo simples como aquele discutido na Seção 7.3, só que agora oscilando fora do equador terrestre. Vamos supor que ele esteja oscilando sobre o polo Norte, figura 9.10. O período de oscilação de um pêndulo simples de comprimento ℓ é dado por $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$, onde $g \approx 9,8\ m/s^2$, enquanto que sua frequência angular de oscilação é dada por $\omega_p = 2\pi/T = \sqrt{g/\ell}$.

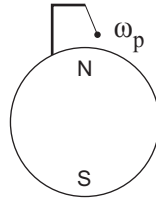



Figura 9.10: Pêndulo oscilando sobre o polo Norte com frequência angular ω_p.

Desprezando a resistência do ar, todas as forças atuando sobre o pêndulo são a atração gravitacional exercida pela Terra (o peso $\vec{P} = -mg\hat{r}$) e a tensão $\vec{T}$ no fio. Como o peso aponta para o centro da Terra e a tensão aponta ao longo do fio, estas duas forças formam um plano passando pelo centro da Terra. Logo, se o pêndulo for solto do repouso, ele vai oscilar sempre ao longo do plano formado por $\vec{P}$ e por $\vec{T}$. Mas ao realizar a experiência o que se observa é que o plano de oscilação do pêndulo vai girando em relação ao solo com uma velocidade angular Ω_{pT}, variando sua direção ao redor de 15° em cada hora, figura 9.11. O plano de oscilação gira no sentido horário quando visto de cima para baixo, ou seja, olhando do polo Norte em direção ao centro da Terra. Nesta figura o retângulo indica uma parede presa ao solo.

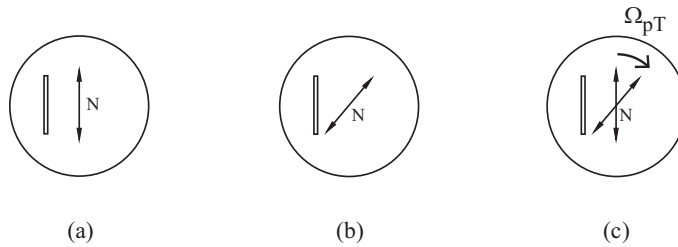



Figura 9.11: Pêndulo de Foucault sobre o polo Norte com seu plano de oscilação girando no sentido horário em relação ao solo. O retângulo indica uma parede presa ao solo. (a) Orientação do plano de oscilação no início da experiência. (b) Orientação do plano de oscilação depois de 3 horas. (c) O plano de oscilação do pêndulo gira no sentido horário em relação ao solo, com velocidade angular Ω_{pT}.

No polo Sul ocorre o mesmo fenômeno, só que agora o plano de oscilação gira no sentido anti-horário em relação ao solo, quando visto de cima para baixo, ou seja, olhando do polo Sul em direção ao centro terrestre, figura 9.12.

Não há qualquer outro corpo ou agente material que pareça estar fazendo com que o plano de oscilação do pêndulo gire desta forma através de uma interação física. Também não é evidente o motivo pelo qual ele gira no sentido horário no polo Norte e no sentido anti-horário no polo Sul. Não é clara a explicação do valor numérico do seu giro em relação ao solo, ou seja, que justifique esta precessão do plano de oscilação do plano de 15° em cada hora.

A interpretação desta experiência dada por Foucault e pela maioria dos físicos desde então é que de fato o plano de oscilação do pêndulo fica fixo no espaço, mas não em relação ao solo. Em particular, supõe-se que

[18] [Fou51a] e [Fou51b].

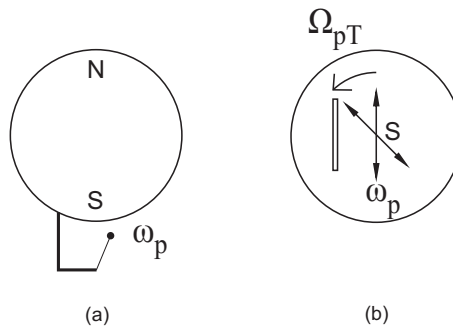



Figura 9.12: (a) Pêndulo sobre o polo Sul oscilando com frequência angular ω_p. (b) Seu plano de oscilação gira no sentido anti-horário em relação ao solo, com velocidade angular Ω_{pT}.

o plano de oscilação do pêndulo fique fixo em relação ao espaço absoluto de Newton, que é um referencial inercial. A Terra é que estaria girando com uma velocidade angular $\vec{\omega}_d$ em relação ao espaço absoluto, figura 9.13. Esta rotação seria ao redor do eixo Norte-Sul terrestre, no sentido anti-horário quando visto por alguém que está parado no espaço absoluto, olhando do Norte terrestre para o Sul.

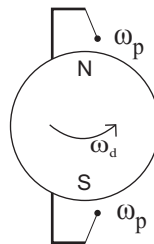



Figura 9.13: Terra girando em relação ao espaço absoluto.

Seria esta rotação da Terra em relação ao espaço absoluto, enquanto que o plano de oscilação ficaria parado em relação ao espaço absoluto, que explicaria a precessão do plano de oscilação do pêndulo em relação ao solo. Isto está ilustrado na figura 9.14, na qual o retângulo representa uma parede presa ao solo. Supõe-se que nesta figura o plano do papel coincida com o espaço absoluto. Em (a) e (b) temos o pêndulo oscilando no polo Norte, no início da experiência e depois de 3 horas, respectivamente. Em (c) e (d) temos o pêndulo oscilando no polo Sul, no início da experiência e depois de 3 horas, respectivamente. Nos dois casos os planos de oscilação do pêndulo ficam fixos em relação ao espaço absoluto.

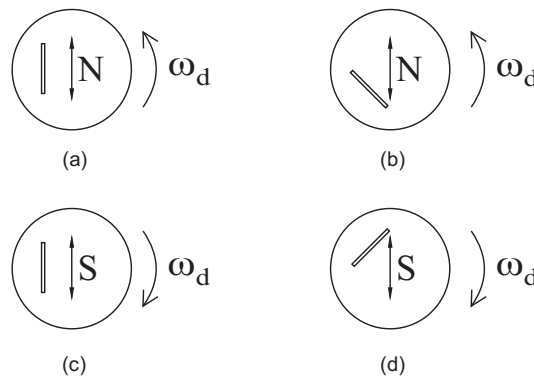



Figura 9.14: Terra girando no espaço absoluto, enquanto que os planos de oscilação dos pêndulos ficam fixos no espaço. O retângulo indica uma parede presa ao solo. (a) Situação vista por alguém parado no espaço absoluto, sobre o polo Norte, no início da experiência. (b) Situação depois de três horas. (c) Situação vista por alguém parado no espaço, sobre o polo Sul, no início da experiência. (d) Situação depois de três horas.

Esta interpretação está totalmente de acordo com a mecânica newtoniana e explica as rotações dos planos de oscilação do pêndulo, em relação ao solo, nos sentidos horário e anti-horário quando observados dos polos

Norte e Sul, respectivamente. O valor de 15° por hora para a velocidade angular dos planos de oscilação seria justificado pela suposição de que a Terra daria uma volta ao redor de seu eixo em relação ao espaço absoluto no intervalo de um dia.

Para que este efeito seja observado é necessário que o pêndulo fique oscilando por alguns minutos ou horas. Para isto é importante que os atritos sejam desprezíveis ou que haja algum mecanismo que mantenha as oscilações do pêndulo apesar das inevitáveis resistências com o ambiente e com os suportes do pêndulo. Foucault utilizou inicialmente um pêndulo com um comprimento de 2 metros e uma esfera de 5 kg oscilando harmonicamente, depois utilizou um outro pêndulo de 11 metros. Sua demonstração mais famosa ocorreu no Panteão de Paris, quando dependurou na cúpula uma esfera de chumbo com 28 kg oscilando em um fio de 67 metros. Para pêndulos de 5, 11 e 67 metros obtém-se $T = 4,5\ s$; $6,7\ s$ e $16,4\ s$, respectivamente.

Observa-se que nos polos o plano de oscilação do pêndulo gira em relação ao solo com um período de 86.164 segundos, ou seja, com $\Omega_{pT} = 7,29 \times 10^{-5}\ rad/s$. Este período coincide com o valor de um dia sideral, ou seja, com a rotação do conjunto de estrelas ao redor da Terra. No equador o plano de oscilação do pêndulo não gira em relação à Terra. Já em uma latitude α o plano de oscilação do pêndulo gira em relação ao solo com uma velocidade angular dada por:

$$\Omega_{pT} = 7,29 \times 10^{-5} (\operatorname{sen} \alpha) \frac{rad}{s} , \tag{9.49}$$

onde o ângulo α está indicado na figura 9.15. Foi o próprio Foucault quem determinou em seu artigo original de 1851 que o deslocamento angular do plano de oscilação do pêndulo era proporcional ao seno da latitude.

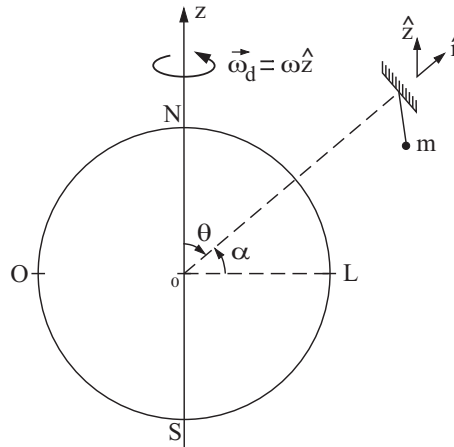



Figura 9.15: Pêndulo de Foucault oscilando na latitude α.

Foucault realizou suas experiências em Paris, que está a uma latitude $\alpha = 48^o 51'$, tal que $\operatorname{sen} \alpha = 0,75$, $\Omega_{pT} = 5,47 \times 10^{-5}\ rad/s$ e o período para uma volta completa era de $T = 2\pi/\Omega_{pT} = 114.866\ s = 31h\ 54m\ 26s$. Em uma hora o plano de oscilação do pêndulo gira em relação ao solo de um ângulo de $0,20\ rad = 11,3^o$.

As contas detalhadas para chegar ao resultado da equação (9.49) serão apresentadas na Subseção 10.4.2.

O pêndulo de Foucault pode ser usado para determinar o valor numérico e a direção da rotação dinâmica da Terra em relação ao espaço absoluto, sem ter de olhar para as estrelas ou para outros corpos astronômicos ao redor da Terra. Para isto realiza-se a experiência em diferentes locais da superfície da Terra. Observa-se que existem dois pontos nos quais o plano de oscilação do pêndulo realiza uma precessão em relação ao solo tendo seu valor máximo dado por $\Omega_{pT} = 7,29 \times 10^{-5}\ rad/s$. Estes dois pontos estão localizados em sentidos opostos em relação ao centro da Terra. A reta passando por estes dois pontos e pelo centro da Terra define o eixo de rotação dinâmica da Terra. Observa-se que ele coincide com o eixo de rotação dinâmica da Terra obtido pelo achatamento da Terra. Observa-se que os locais sobre a Terra nos quais o plano de oscilação do pêndulo de Foucault não precessa em relação ao solo definem um plano passando pelo centro da Terra que é ortogonal ao eixo de rotação dinâmica da Terra. Este plano coincide com o plano equatorial da rotação dinâmica da Terra obtido pelo seu formato achatado.

Ao se comparar a rotação dinâmica da Terra obtida com um pêndulo de Foucault, $\vec{\omega}_d$, com a rotação cinemática entre a Terra e o conjunto das estrelas, $\vec{\omega}_c$, observa-se que elas coincidem entre si numericamente e espacialmente ou vetorialmente, como dado pelas equações (9.43) e (9.48). Ou seja, os dois pontos sobre

a superfície terrestre nos quais a precessão do plano de oscilação do pêndulo em relação ao solo tem seu valor máximo coincidem com os polos geográficos Norte e Sul da Terra, em torno dos quais gira o conjunto de estrelas. Além disso, os planos de oscilação dos pêndulos colocados nestes dois pontos acompanham exatamente o movimento das estrelas ao redor da Terra.

Não é necessário mencionar a rotação cinemática da Terra em relação às estrelas para descrever o pêndulo de Foucault, já que esta experiência pode ser descrita e explicada usando apenas a Terra, o pêndulo e o espaço absoluto de Newton. Apesar disto, existem algumas coincidências muito sugestivas ao incluir as estrelas na descrição deste fenômeno.

É curioso observar Foucault descrevendo sua experiência. Às vezes ele falava da rotação da Terra em relação ao espaço, sendo que em outros trechos mencionava a rotação da Terra em relação às estrelas fixas (esfera celeste). Ou seja, ele não distinguiu estas duas rotações ou estes dois conceitos (rotação dinâmica da Terra em relação ao espaço absoluto e rotação cinemática da Terra em relação aos corpos celestes). Por exemplo, ele começou afirmando que o deslocamento do plano de oscilação do pêndulo provava a rotação diária da Terra. Para justificar esta interpretação do resultado experimental, ele imaginou um pêndulo colocado exatamente sobre o polo Norte oscilando para frente e para trás em um plano fixo, enquanto a Terra girava embaixo do pêndulo. Ele então afirmou (nossas ênfases):[19]

> Assim é gerado um movimento de oscilação em um arco de círculo cujo plano é determinado claramente, ao qual a inércia da massa fornece uma posição invariável *no espaço*. Caso estas oscilações continuem por um certo tempo, o movimento da Terra, que não para de girar de Oeste para Leste, vai se tornar perceptível por uma comparação com a imobilidade do plano de oscilação, *cujo traçado sobre o solo vai aparecer como tendo um movimento em conformidade com o movimento aparente da esfera celeste*; e se as oscilações pudessem continuar por vinte e quatro horas, o traçado de seu plano executaria neste tempo uma revolução completa ao redor da projeção vertical de seu ponto de suspensão.

Não enxergamos o espaço absoluto, já que ele não tem ligação com nenhum corpo material. Por outro lado, observa-se que a Terra gira ao redor de seu eixo Norte-Sul com um período de um dia sideral em relação ao pano de fundo das estrelas, que vamos considerar como sendo o referencial F das estrelas fixas. O pêndulo a ser considerado aqui está oscilando no polo Norte da Terra. Na figura 9.16 vemos o pêndulo sobre o polo Norte oscilando com uma frequência angular ω_p, enquanto que a Terra gira em relação às estrelas com período $T = 86.164\ s$ de um dia sideral e uma velocidade angular $\omega_{TF} = 7,29 \times 10^{-5}\ rad/s$.

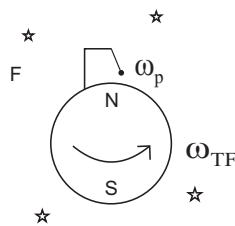



Figura 9.16: Pêndulo oscilando sobre o polo Norte com frequência angular ω_p enquanto que a Terra gira em relação ao referencial F das estrelas com uma velocidade angular ω_{TF}.

Observa-se que o plano de oscilação do pêndulo fica parado em relação a estas estrelas, figura 9.17. Nesta figura o referencial do papel coincide com o referencial no qual as estrelas estão em repouso. Vemos o pêndulo de cima para baixo sobre o polo Norte oscilando com uma frequência angular ω_p. O plano de oscilação do pêndulo fica fixo em relação às estrelas, enquanto que a Terra gira em relação a elas com uma velocidade angular ω_{TF}. A rotação da Terra está indicada nesta figura por uma parede retangular presa à Terra.

A situação da figura 9.17 vista por alguém que está parado sobre a Terra no polo Norte está ilustrada na figura 9.18. O retângulo representa uma parede presa ao solo. Neste caso a Terra está em repouso enquanto que o pêndulo oscila com uma frequência angular ω_p sobre o polo Norte. Neste referencial terrestre observa-se que o plano de oscilação do pêndulo gira em relação ao solo com uma velocidade angular $\Omega_{pT} = 7,29 \times 10^{-5}\ rad/s$. Esta é a mesma velocidade angular com a qual o conjunto das estrelas fixas, F, gira em relação à Terra, T. Vamos chamar esta velocidade angular do conjunto de estrelas em relação à Terra de ω_{FT}. Temos então: $\omega_{FT} = \Omega_{pT} = 7,29 \times 10^{-5}\ rad/s$. Ou seja, o plano de oscilação do pêndulo e o conjunto das estrelas fixas dão uma volta completa em relação à Terra com um período de um dia sideral.

[19][Fou51a] e [Fou51b].

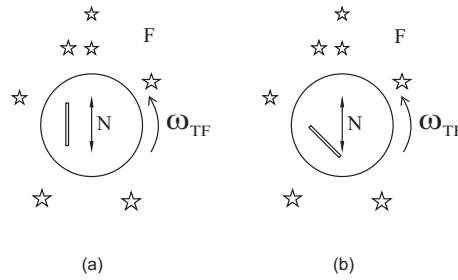



Figura 9.17: Situação vista no referencial F das estrelas fixas, sobre o polo Norte. O plano de oscilação do pêndulo fica fixo em relação às estrelas fixas. (a) Orientação inicial do plano de oscilação do pêndulo. (b) Orientação do plano de oscilação depois de 3 horas.

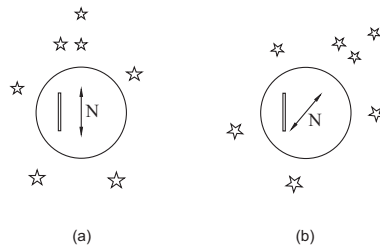



Figura 9.18: Situação da figura 9.17 vista da Terra.

Na figura 9.19 apresenta-se a mesma situação para um pêndulo oscilando sobre o polo Sul. O retângulo representa uma parede presa ao solo. Em (a) e (b) temos a situação vista no referencial F das estrelas fixas, no início da experiência e depois de 3 horas, respectivamente. Em (c) e (d) temos a situação vista no referencial terrestre, no início da experiência e depois de 3 horas, respectivamente.

As situações da figura 9.18, assim como as situações da figura 9.19 (c) e (d), são muito sugestivas. Elas indicam que a causa do plano de oscilação do pêndulo girar em relação ao solo pode estar relacionada com as estrelas. Em particular, pode ser que sejam as estrelas girando ao redor da Terra que façam com que o plano de oscilação do pêndulo de Foucault também gire junto com elas em relação ao solo. Isto seria o análogo da figura 7.16 na qual o plano de oscilação de um pêndulo eletrizado gira no mesmo sentido no qual uma casca esférica eletrizada está girando ao redor do pêndulo, sendo o giro do plano de oscilação causado pela rotação da casca eletrizada através de uma interação entre a carga Q da casca e a carga q do pêndulo.

Ou seja, pode ser que exista uma componente da força gravitacional que tenha o mesmo comportamento que a força magnética usual, mas atuando entre massas gravitacionais. Teríamos então uma explicação para o pêndulo de Foucault que seria baseada em interações físicas entre a massa oscilante do pêndulo e as massas dos corpos astronômicos girando ao seu redor. Isto daria uma explicação natural a dois aspectos muito curiosos: (I) A velocidade angular do plano de oscilação do pêndulo de Foucault localizado nos polos Norte e Sul, em relação ao solo, tem o mesmo valor que a velocidade angular do conjunto das estrelas fixas girando ao redor da Terra. (II) Tanto no polo Norte quanto no polo Sul o plano de oscilação do pêndulo segue o sentido de movimento das estrelas ao redor da Terra. Para saber se o plano de oscilação do pêndulo gira no sentido horário ou anti-horário em relação ao solo, basta olhar para as estrelas e ver o sentido em que estão girando, já que o plano de oscilação do pêndulo segue exatamente as estrelas. Isto não deve ser uma coincidência.

9.2.5 Giroscópios

Giroscópios Mecânicos

A palavra "giroscópio" foi criada por Foucault em 1852, sendo composta de dois termos gregos, *skopeein*, que significa "ver," e *gyros*, que significa "círculo" ou "rotação." Ele deu este nome a um aparelho que indicava a rotação diária da Terra:[20]

> Como todos estes fenômenos dependem do movimento da Terra e são manifestações variadas

[20][Fou52].

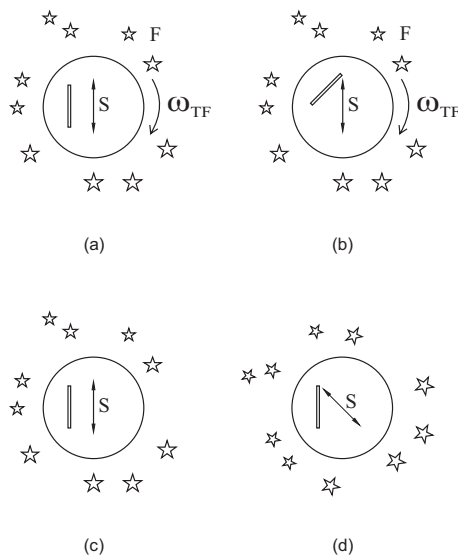



Figura 9.19: Pêndulo no polo Sul. (a) Situação inicial vista no referencial F das estrelas. (b) Situação depois de 3 horas. (c) Situação inicial vista no referencial terrestre. (d) Situação depois de 3 horas.

> deste movimento, proponho denominar de *giroscópio* ao instrumento único que me serviu para constatar estes fenômenos.

Este instrumento é constituído de um disco ou rotor que gira em relação ao solo ao redor do eixo de simetria do disco, com uma velocidade angular ω, figura 9.20.

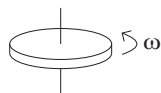



Figura 9.20: Giroscópio.

O eixo de simetria do disco é suspenso a um suporte formado por dois ou três círculos articulados, com juntas tipo cardan. Seu eixo de rotação possui então três eixos de liberdade, fazendo com que tenha liberdade de giro em todos os sentidos em relação ao solo. Após colocar o disco do giroscópio em rotação rápida, o que se observa é que podemos andar e girar com o suporte em relação ao solo, fornecendo giros independentes aos círculos articulados, sendo que o eixo de rotação do giroscópio não acompanha estes movimentos, permanecendo com sua orientação aproximadamente fixa em relação ao solo.

Além disso, caso o disco continue a girar por alguns minutos ou por algumas horas, observa-se que a orientação do eixo também muda em relação ao solo com uma velocidade angular ω_d. Na figura 9.21 apresentamos um giroscópio girando sobre o polo Norte, visto de um ponto de vista de um observador terrestre. Ele gira ao redor do eixo horizontal com uma grande velocidade angular ω. O retângulo à esquerda representa uma parede presa ao solo. Em (a) temos a situação inicial, com o eixo de rotação paralelo à parede. Em (b) vemos a situação após 3 horas, observando-se que agora o eixo de rotação girou (ao redor de um eixo vertical passando pelo centro do giroscópio) de um ângulo de 45º em relação à parede.

A interpretação dada a este fato, de acordo com Foucault e com a maioria dos outros pesquisadores desde então, é que o eixo de rotação do giroscópio permaneceria com sua orientação fixa em relação ao espaço absoluto de Newton. Em vez do espaço absoluto de Newton, pode-se também utilizar qualquer referencial inercial. Como o eixo de rotação do giroscópio não acompanharia a rotação diária da Terra em relação ao espaço absoluto, seria observada uma rotação do eixo de rotação do giroscópio em relação ao solo. Seria esta mudança de orientação do eixo de rotação do giroscópio em relação ao solo que permitiria que se pudesse "ver a rotação da Terra" em relação ao espaço. Na verdade o que se observa é a mudança de orientação do eixo do giroscópio em relação ao solo. Porém, como não se encontra um agente físico que ocasione esta mudança, ou seja, que a cause a partir de uma interação entre corpos, o fenômeno é interpretado como sendo ocasionado pela rotação da Terra em relação ao espaço absoluto, enquanto que o eixo do giroscópio não acompanharia esta rotação da Terra.

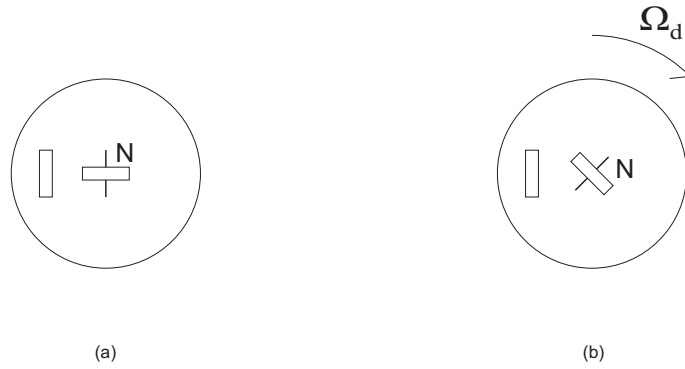



Figura 9.21: Situação vista da Terra. O retângulo à esquerda indica uma parede presa ao solo. Um giroscópio no polo Norte com seu eixo de rotação girando em relação a uma parede presa ao solo. (a) Situação inicial da experiência. (b) Configuração depois de 3 horas.

O aspecto mais interessante e que não apresenta uma explicação causal clara na mecânica newtoniana é que o eixo de rotação deste giroscópio permanece com sua orientação fixa em relação ao conjunto das estrelas fixas, enquanto que a Terra gira em relação às estrelas. Isto está indicado na figura 9.22 na qual temos um giroscópio sobre o polo Norte com seu eixo de rotação horizontal. O retângulo à esquerda de cada figura indica uma parede fixa na Terra. Em (a) e (b) temos a situação vista no referencial terrestre, com o eixo de rotação do giroscópio acompanhando a rotação das estrelas ao redor da Terra. Em (a) temos a situação no início da experiência, enquanto que em (b) temos a situação depois de 3 horas. Em (c) e (d) temos a situação vista no referencial F das estrelas, com o eixo de rotação do giroscópio parado em relação às estrelas, enquanto que a Terra gira abaixo dele. Em (c) temos a situação no início da experiência, enquanto que em (d) temos a situação depois de 3 horas.

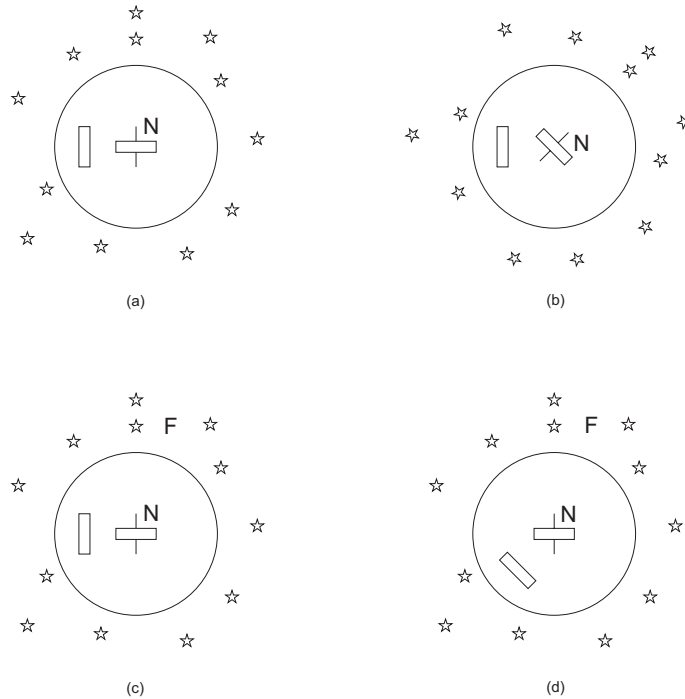



Figura 9.22: Giroscópio sobre o polo Norte. O retângulo à esquerda representa uma parede presa ao solo. (a) Situação inicial vista no referencial terrestre. (b) Situação depois de 3 horas. (c) Situação inicial vista no referencial F das estrelas fixas. (d) Situação vista depois de 3 horas.

Se quisermos ser mais precisos, podemos dizer que o eixo de rotação de um giroscópio sempre mantém uma orientação fixa em relação ao conjunto das galáxias, desde que possamos desprezar os atritos e outros torques externos que atuam no seu eixo de rotação. Isto é, se girarmos o disco do giroscópio com uma

grande velocidade angular e colocarmos seu eixo de rotação apontando para o centro da galáxia Andrômeda, ele vai sempre permanecer apontando para o centro de Andrômeda, não interessando os movimentos que os círculos articulados do giroscópio realizem em relação ao solo enquanto caminharmos com ele de forma aleatória em uma sala. Mesmo enquanto a Terra gira diariamente ao redor de seu eixo Norte-Sul, tal que as estrelas e galáxias pareçam estar girando uma vez por dia ao redor da Terra, ainda assim o eixo de rotação do giroscópio vai continuar apontando para o centro de Andrômeda, ao mesmo tempo em que este eixo vai se deslocando em relação ao solo. Se não houver atritos e o giroscópio ficar girando indefinidamente ao longo dos meses, seu eixo de rotação vai ficar se deslocando em relação ao solo, assim como as estrelas e galáxias. Mas ao longo de todos os dias e meses do ano o eixo de rotação do giroscópio vai permanecer apontando para o centro de Andrômeda. Ou seja, este eixo do giroscópio vai acompanhar o movimento de Andrômeda em relação ao solo.

É este fato que faz com que os giroscópios sejam muito utilizados hoje em dia em navios, aviões, foguetes, satélites etc. Eles servem para a orientação das espaçonaves, mesmo em situações de visibilidade nula. Vamos supor que se lance um foguete na direção da Lua. Sensores medem constantemente a orientação do eixo de rotação do giroscópio em relação aos círculos articulados do giroscópio, ou a orientação do eixo de rotação do giroscópio em relação às paredes da espaçonave. Quando muda o ângulo entre o eixo do giroscópio e uma parede da espaçonave, sabe-se, sem olhar para fora, que o foguete mudou de direção, não mais apontando para a Lua. São então acionados pequenos motores que expelem gases fazendo com que este ângulo volte ao seu valor inicial. A espaçonave volta então a seguir no rumo desejado.

Giroscópios Ópticos

Além dos giroscópios mecânicos, existem hoje em dia giroscópios ópticos. Eles são baseados em um efeito descoberto em 1913 por Georges Sagnac (1869-1928).[21] Na figura 9.23 apresentamos uma versão simplificada de sua experiência.

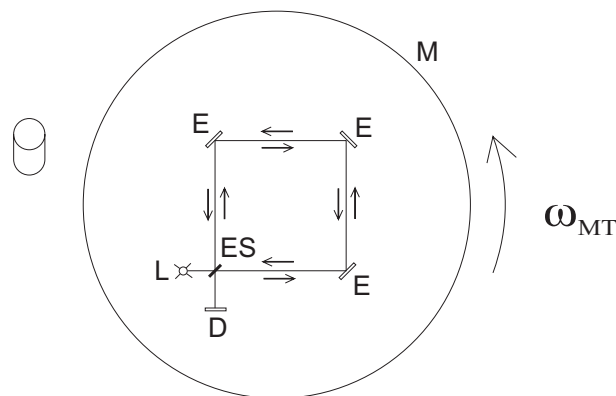



Figura 9.23: Efeito Sagnac.

Temos uma mesa circular M que pode girar em relação ao solo ao redor de um eixo vertical com uma velocidade angular ω_{MT}. O cilindro representa um objeto fixo em relação ao solo. Sobre a mesa coloca-se uma fonte de luz L, um espelho semi-transparente ES, três outros espelhos E, assim como um detector D. Todos estes objetos estão fixos sobre a mesa, de tal forma que quando ela gira, todos giram juntos em relação ao solo. O feixe de luz parte da fonte, é dividido no espelho semi-transparente, sendo que um feixe vai no sentido horário e outro no sentido anti-horário. Os dois feixes se encontram no detector. No caso de Sagnac a fonte de luz era uma pequena lâmpada elétrica e o detector era uma chapa fotográfica que registrava as franjas de interferência ocasionadas pelos dois feixes de luz. Sagnac girava a mesa no sentido horário em relação ao solo e obtinha padrões de interferência na chapa fotográfica. Depois girava a mesa no sentido anti-horário em relação ao solo, com uma velocidade angular de mesma magnitude que no caso anterior, obtendo outros padrões de interferência em uma segunda chapa fotográfica. O centro da franja central apresenta posições diferentes em cada uma destas chapas fotográficas. Ao sobrepor as duas chapas fotográficas, conseguia medir o deslocamento entre os centros dos dois conjuntos de padrões de interferência.

O deslocamento fracionário z entre os centros das franjas de interferência para as rotações nos sentidos horário e anti-horário, medido em termos da distância entre as franjas, é dado por

[21] [Sag13a] e [Sag13b].

$$z = \frac{8A\omega}{c\lambda} , \tag{9.50}$$

onde A é a área englobada pelos dois feixes luminosos que estão interferindo, $c = 2,998 \times 10^8$ m/s é a velocidade da luz no vácuo e λ é o comprimento de onda do feixe de luz. O significado da velocidade angular ω que aparece na equação (9.50) tem sido discutido ao longo do tempo. Sagnac interpretou o efeito medido em sua experiência como sendo devido a uma rotação de todo o sistema (fonte de luz, espelhos e detector) em relação ao éter luminoso. Hoje em dia interpreta-se o mesmo efeito como sendo uma rotação de todo o sistema em relação ao espaço absoluto de Newton, ou em relação a um referencial inercial. Este ω indicaria então a velocidade angular dinâmica de todo o sistema.

No caso de Sagnac ele obteve um valor medido de $z = 0,07$, utilizando a luz de cor índigo característica do arco de mercúrio da lâmpada elétrica ($\lambda = 4,36 \times 10^{-7}$ m e $f = c/\lambda = 6,88 \times 10^{14}$ Hz), com os feixes englobando uma área de 860 $cm^2 = 0,086$ m^2, sendo que a distância entre as franjas era de $0,5$ até 1 mm. Para estas medidas utilizou uma rotação da mesa em relação ao solo com o valor de duas voltas por segundo ($\omega_{MT} = 12,566$ rad/s). Utilizando na equação (9.50) os valores medidos de z, A, c e λ obtém-se $\omega = 13,3$ rad/s, que tem praticamente o mesmo valor que a velocidade angular da mesa em relação ao solo, isto é:

$$\omega = \omega_{MT} . \tag{9.51}$$

Como a rotação cinemática da Terra em relação às estrelas com uma velocidade angular de $\omega_c = \omega_{TF} = 7,29 \times 10^{-5}$ rad/s é muito menor do que a rotação da mesa em relação ao solo na experiência de Sagnac, para todos os efeitos pode-se considerar as estrelas paradas em relação ao solo na sua experiência. Com isto pode-se dizer que o ω obtido da equação (9.50) coincide com a rotação cinemática da mesa em relação ao referencial F das estrelas dada por ω_{MF}. Isto é:

$$\omega = \omega_{MT} = \omega_c = \omega_{MF} . \tag{9.52}$$

Sagnac chegou a prever que um efeito análogo deveria surgir em um interferômetro parado em relação ao solo, devido à rotação da Terra em relação ao éter luminoso. Supondo que o éter esteja parado em relação ao referencial das estrelas fixas, seu período de rotação ao redor da Terra é de um dia sideral, ou seja, 86.164 segundos. Sagnac afirmou que (nossas palavras entre colchetes):[22]

> em um circuito *horizontal*, localizado na latitude α, a rotação diurna da Terra deve, se o éter estiver imóvel, produzir um giro relativo do éter com o valor de $4\pi \operatorname{sen}\alpha/T$ ou $4\pi \operatorname{sen}\alpha/86.164$ radianos por segundo. Este valor é bem menor do que o limite superior de $1/1000$ [radianos/segundo] que estabeleci para um circuito vertical. Espero ser capaz de determinar se este pequeno efeito devido ao giro óptico correspondente existe ou não.

Ele nunca chegou a determinar experimentalmente este pequeno efeito devido à rotação terrestre. Como seus cálculos mostraram, seria necessário um interferômetro com uma área bem grande para poder determinar um efeito tão pequeno, já que a velocidade angular da Terra em relação às estrelas fixas é de apenas $7,29 \times 10^{-5}$ rad/s. Os primeiros a determinar a rotação da Terra utilizando o efeito Sagnac em um interferômetro parado em relação ao solo foram A. A. Michelson (1852-1931) e Henry G. Gale (1874-1942) em 1925.[23] Neste caso o deslocamento em franjas, expresso como uma fração de uma franja, na latitude α é dado por

$$z = \frac{4A\omega \operatorname{sen}\alpha}{c\lambda} . \tag{9.53}$$

Michelson e Gale utilizaram um interferômetro fixo em relação ao solo em uma latitude $\alpha = 41^o46'$, ou seja, com $\operatorname{sen}\alpha = 0,666$. Era um retângulo com 2.010 pés por 1.113 pés ($A = 2,078 \times 10^5$ m^2). Como fonte de luz utilizaram um arco de carbono ($\lambda = 5,700 \times 10^{-7}$ m e $f = c/\lambda = 5,26 \times 10^{14}$ Hz). Eles compararam as franjas de interferência obtidas usando este grande retângulo, com as franjas de interferência obtidas usando um retângulo muito menor que não produzia um deslocamento mensurável das franjas. Isto significa que mediram de fato os deslocamentos entre as franjas centrais dos dois conjuntos de medida (um conjunto com a área grande que produzia um deslocamento e outro conjunto com a área desprezível que não gerava deslocamento). Por este motivo encontraram o valor 4 que aparece na equação (9.53), enquanto

[22] [Sag13a].
[23] [MG25].

que Sagnac encontrou o valor 8 que aparece na equação (9.50) pois estava comparando as franjas devidas a uma rotação no sentido horário com as franjas devidas a uma rotação no sentido anti-horário. Caso Sagnac tivesse comparado as franjas de uma situação sem rotação com as franjas devidas a uma rotação em um único sentido, também obteria o fator 4 como apresentado por Michelson e Gale.

O valor que Michelson e Gale mediram, expresso como uma fração de uma franja, foi de $z = 0,230 \pm 0,005$. Por outro lado, supondo que a velocidade angular que aparece na equação (9.53) seja a rotação diária da Terra em relação às estrelas fixas, $\omega_c = 7,29 \times 10^{-5}\ rad/s$, Michelson e Gale obtiveram que o valor calculado era de $z = 0,236 \pm 0,002$. Como concluído por eles:[24]

> Devido à dificuldade das observações, isto significa que os desvios observado e calculado coincidem dentro dos limites do erro observacional.

Ou seja, Michelson e Gale obtiveram que

$$\omega = \omega_c = \omega_{TF} = 7,29 \times 10^{-5}\ rad/s\ . \tag{9.54}$$

Ou seja, na experiência de Michelson-Gale conclui-se que o deslocamento entre as franjas de interferência é diretamente proporcional à velocidade angular entre a Terra e o referencial das estrelas fixas.

9.2.6 Não Há Equivalência entre os Sistemas Ptolomaico e Copernicano a Partir das Rotações Dinâmicas da Terra

Como visto na Subseção 9.1.5, as rotações cinemáticas da Terra, como por exemplo sua rotação em relação ao conjunto das estrelas fixas, podem ser interpretadas de duas maneiras equivalentes: (A) a Terra está parada enquanto que as estrelas giram ao redor do eixo Norte-Sul da Terra com um período de um dia sideral; e (B) a Terra gira ao redor de seu eixo Norte-Sul com um período de um dia enquanto que as estrelas ficam paradas. Estas duas interpretações são igualmente válidas ou verdadeiras, já que explicam igualmente bem as aparências vistas no céu.

Ao contrário do que ocorre com as rotações cinemáticas da Terra, dentro da mecânica newtoniana é possível distinguir entre estas duas interpretações a partir de efeitos dinâmicos observados sobre a própria Terra ou sobre corpos que estão em suas proximidades.

O formato da Terra evidencia a falta de equivalência dinâmica entre os sistemas ptolomaico e copernicano, como visto na Subseção 9.2.3. De acordo com a mecânica newtoniana, o achatamento da Terra devido à sua rotação diária só ocorre quando a própria Terra está girando em relação ao espaço absoluto, enquanto que as estrelas ficam paradas no espaço. No caso contrário em que a Terra fica parada no espaço absoluto, enquanto que o conjunto das estrelas dá uma volta diária ao redor do eixo Norte-Sul terrestre, não ocorreria o achatamento da Terra.

Esta falta de equivalência dinâmica também ocorre com o pêndulo de Foucault, figura 9.24.

Nos quatro casos desta figura o plano do papel coincide com o espaço absoluto de Newton. O pêndulo está sobre o polo Norte terrestre. O retângulo representa uma parede presa ao solo. Em (a) e (b) temos a Terra girando em relação ao espaço absoluto, enquanto que o conjunto das estrelas fixas está parado no espaço absoluto. Em (a) temos a situação no início da experiência, em (b) temos a situação depois de 3 horas. O período de rotação entre as estrelas e a Terra é de um dia sideral. O plano de oscilação do pêndulo permanece parado no espaço absoluto e, portanto, gira em relação a uma parede presa ao solo, completando uma volta em um dia sideral. Em (c) e (d) temos uma experiência de pensamento com a Terra parada no espaço absoluto, enquanto que o conjunto das estrelas gira ao seu redor com um período de um dia sideral. Em (c) temos a situação no início da experiência, em (d) temos a situação depois de 3 horas. Esta situação é cinematicamente equivalente aos casos (a) e (b), já que em ambos os casos existe a mesma rotação relativa entre a Terra e as estrelas. Porém, o plano de oscilação do pêndulo permanece parado em relação ao espaço absoluto em (c) e (d), já que o conjunto de estrelas girando ao redor do pêndulo não exerce qualquer força gravitacional sobre ele, devido à Proposição 70, Teorema 30, do Livro I do *Principia* apresentada na Seção 1.4. Ver, em particular, a Subseção 1.4.3 e a equação (1.21). Portanto, o plano de oscilação do pêndulo também permanece parado em relação a uma parede presa ao solo. A situação representada por (c) e (d) é então dinamicamente diferente dos casos (a) e (b). Embora a rotação entre a Terra e as estrelas seja a mesma tanto em (a-b) quanto em (c-d), o mesmo já não ocorre para a rotação entre a Terra e o plano de oscilação do pêndulo.

[24][MG25].

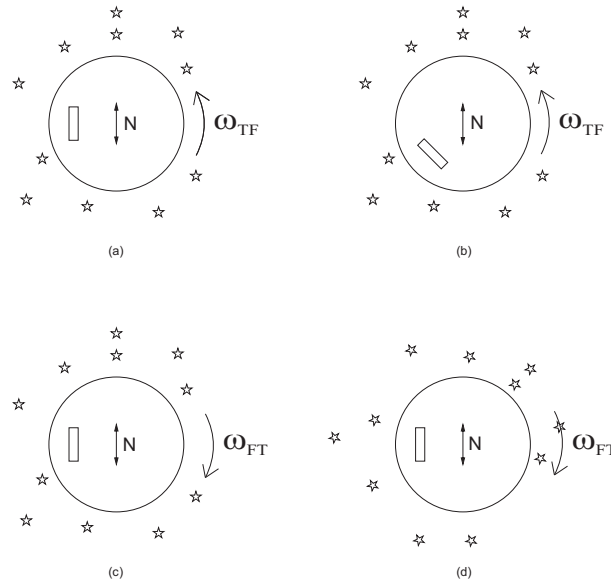



Figura 9.24: O referencial do papel coincide com o espaço absoluto. (a) e (b): Terra girando com velocidade angular ω_{TF}, estrelas paradas, e plano de oscilação do pêndulo permanecendo parado. (a) Início da experiência. (b) Situação depois de 3 horas. (c) e (d): Terra parada, estrelas girando com velocidade angular ω_{FT}, e plano de oscilação do pêndulo permanecendo parado. (c) Situação inicial. (d) Situação depois de 3 horas.

9.2.7 O que Aconteceria com o Plano de Oscilação do Pêndulo de Foucault se, com Exceção da Terra, Todos os Outros Corpos Astronômicos Desaparecessem?

Existem outras maneiras de perceber que na mecânica newtoniana não há uma relação causal entre as estrelas fixas e o pêndulo de Foucault. O motivo para esta falta de conexão causal entre as estrelas e o pêndulo está sempre relacionado à Proposição 70, Teorema 30 do Livro I do *Principia*, apresentado na Subseção 1.4.1. Ou seja, como as estrelas estão distribuídas mais ou menos isotropicamente ao redor da Terra, elas cancelam suas atrações mútuas exercidas sobre qualquer corpo sobre a Terra. Vamos imaginar a situação da figura 9.18. Vamos supor que a Terra está girando em relação ao espaço absoluto com um período de um dia sideral. O plano de oscilação de um pêndulo no polo Norte gira em relação ao solo com este mesmo período de um dia. O que aconteceria se todas as estrelas e galáxias fossem aniquiladas do universo? Nesta situação hipotética o plano de oscilação de um pêndulo sobre o polo Norte continuaria a girar em relação ao solo com um período de um dia, como mostrado na figura 9.25, considerada no referencial do espaço absoluto.

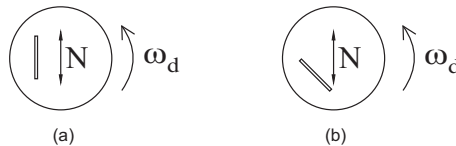



Figura 9.25: O plano do papel coincide com o espaço absoluto. O retângulo representa uma parede presa ao solo. Mesmo desaparecendo com as estrelas e galáxias, a Terra poderia girar em relação ao espaço absoluto com uma velocidade angular ω_d. Neste caso o plano de oscilação do pêndulo permaneceria fixo no espaço. (a) Situação inicial. (b) Situação depois de 3 horas.

A mesma situação da figura 9.25 considerada agora de um ponto de vista terrestre aparece na figura 9.26.

Pelo mesmo motivo obtém-se que em uma situação hipotética na qual a Terra continuasse a girar em relação ao espaço absoluto com um período de um dia, mas na qual o conjunto de estrelas e galáxias passasse a girar ao redor da Terra com um período de 3 dias, mantendo suas posições relativas entre si, o plano de oscilação do pêndulo de Foucault continuaria a girar em relação ao solo com um período de um dia.

Esta falta de equivalência dinâmica também ocorre com os giroscópios, figura 9.27.

Nos quatro casos desta figura o plano do papel coincide com o espaço absoluto de Newton. O giroscópio

Figura 9.26: Situação da figura 9.25, mas vista do referencial terrestre. Mesmo desaparecendo com as estrelas e galáxias, o plano de oscilação do pêndulo de Foucault continuaria a girar em relação ao solo.

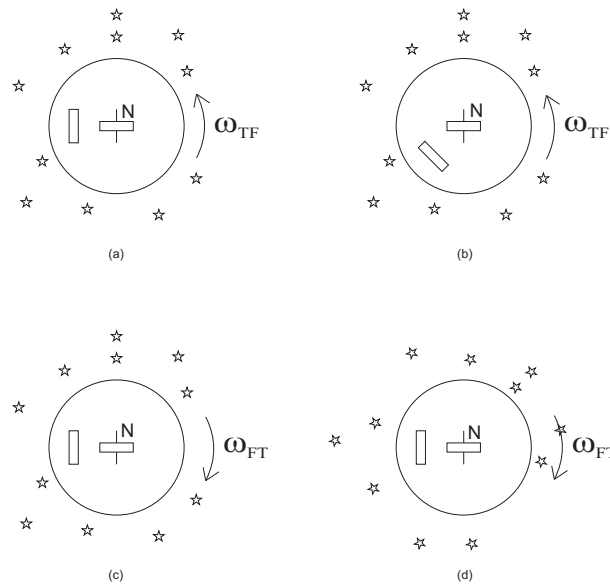



Figura 9.27: O referencial do papel coincide com o espaço absoluto. O retângulo da esquerda representa uma parede presa ao solo. (a) e (b): Terra girando ao redor de seu eixo, estrelas e galáxias paradas, e eixo de rotação do giroscópio permanecendo parado. (a) Situação inicial. (b) Situação depois de 3 horas. (c) e (d): Terra parada, estrelas e galáxias girando juntas ao redor da Terra, e eixo de rotação do giroscópio permanecendo parado. (c) Situação inicial. (d) Situação depois de 3 horas.

está sobre o polo Norte terrestre, com seu eixo de rotação horizontal. O retângulo à esquerda de cada figura representa uma parede presa ao solo. Em (a) e (b) temos a Terra girando ao redor de seu eixo em relação ao espaço absoluto, enquanto que o conjunto das estrelas fixas e das galáxias está parado no espaço absoluto. Em (a) temos a situação inicial, enquanto que em (b) temos a situação depois de 3 horas. O período de rotação entre as estrelas e a Terra é de um dia sideral. O eixo de rotação do giroscópio permanece parado no espaço absoluto e, portanto, gira em relação a uma parede presa ao solo, completando uma volta em um dia sideral. Em (c) e (d) temos uma experiência de pensamento com a Terra parada no espaço absoluto, enquanto que o conjunto das estrelas e galáxias gira ao redor da Terra com um período de um dia sideral. Em (c) temos a situação inicial, enquanto que em (d) temos a situação depois de 3 horas. Esta situação é cinematicamente equivalente aos casos (a) e (b), já que em ambos os casos existe a mesma rotação relativa entre a Terra e o conjunto de estrelas e galáxias. Porém, o eixo de rotação do giroscópio permanece parado em relação ao espaço absoluto em (c) e (d), já que o conjunto de estrelas e galáxias girando ao redor do giroscópio não exerce qualquer força gravitacional sobre ele, devido à Proposição 70, Teorema 30, do Livro I do *Principia* apresentada na Seção 1.4. Portanto, o eixo de rotação do giroscópio também permanece parado em relação a uma parede presa ao solo. A situação representada por (c) e (d) é então dinamicamente diferente dos casos (a) e (b). Embora a rotação entre a Terra e o conjunto das estrelas e galáxias seja a mesma tanto em (a-b) quanto em (c-d), o mesmo já não ocorre para a rotação entre a Terra e o eixo do giroscópio.

Pelo mesmo motivo obtém-se que em uma situação hipotética na qual a Terra continuasse a girar em relação ao espaço absoluto com um período de um dia, mas na qual o conjunto de estrelas e galáxias passasse a girar ao redor da Terra com um período de 3 dias, mantendo suas posições relativas entre si, o eixo de rotação do giroscópio continuaria a girar em relação ao solo com um período de um dia.

Veremos que as previsões para estas situações hipotéticas na mecânica relacional são diferentes das previsões da mecânica newtoniana.

Capítulo 10

Sistemas de Referência Não Inerciais e as Forças Fictícias

Como vimos nas Seções 1.2 e 1.7, a segunda lei do movimento de Newton na forma das equações (1.3) e (1.4) é válida apenas no espaço absoluto ou em sistemas de referência que se deslocam com uma velocidade translacional constante com relação ao espaço absoluto. Isto estava claro para Newton, como pode ser visto no seu quinto Corolário relacionado com as três leis do movimento, Corolário este apresentado na Seção 1.2. Estes referenciais nos quais são válidos a segunda lei de Newton na forma das equações (1.3) e (1.4) são chamados de *sistemas de referência inerciais*, também denominados de *referenciais inerciais*, que representamos por S.

Nos casos de massas inerciais constantes que estão sendo analisados neste livro pode-se escrever a lei fundamental da dinâmica na forma da equação (1.4), a saber:

$$\vec{F} = m_i \vec{a} \ , \tag{10.1}$$

onde $\vec{a} = d\vec{v}/dt$ é a aceleração do corpo em relação a qualquer referencial inercial. A força $\vec{F}$ que aparece na equação (10.1) é a força resultante devida às interações do corpo de massa inercial m_i com os outros corpos ao seu redor. Ela é a somatória das forças reais atuando sobre m_i. Isto é, são forças de interação entre m_i e outros corpos, forças estas que dependem das posições e dos movimentos destes outros corpos em relação ao corpo m_i. Elas podem ter origem gravitacional, elétrica, magnética, elástica, nuclear, de atrito etc.

Quando o sistema de referência está acelerado em relação a um referencial inercial, aparecem alguns problemas com a aplicação das leis do movimento de Newton. Analisamos estas situações aqui. Vamos representar por S' um sistema de referência que esteja acelerado em relação ao referencial inercial S. Este referencial S' é chamado de *sistema de referência não inercial*, sendo também denominado de *referencial não inercial*.

10.1 Corpos em Repouso sobre a Terra

O referencial terrestre pode ser considerado um bom referencial inercial para descrever o movimento de corpos quando os deslocamentos dos corpos em relação ao solo são pequenos comparados com o raio da Terra e quando estes deslocamentos ocorrem em intervalos de tempo curtos comparados com 1 minuto. Por exemplo, é possível considerar a Terra como sendo um referencial inercial S para estudar durante alguns segundos o lançamento de projéteis, a vibração de uma mola, a oscilação de um pêndulo ou a colisão de duas bolas de bilhar.

Na figura 10.1 temos a situação na qual um bloco de massa inercial m_i está parado sobre o solo. A força peso P exercida pela Terra sobre o corpo é contrabalançada pela força normal N exercida pelo solo sobre o corpo.

Vamos supor que neste referencial inercial terrestre S uma pessoa esteja deslocando-se para a direita com uma aceleração constante $\vec{a} = a\hat{x}$, sendo $a \equiv |\vec{a}|$ o módulo de sua aceleração em relação ao solo, figura 10.1. Vamos supor que esta pessoa tente analisar este problema utilizando a segunda lei de Newton na forma da equação (10.1), ou seja, utilizando a seguinte expressão:

$$\vec{F} = m_i \vec{a}\,' \ , \tag{10.2}$$

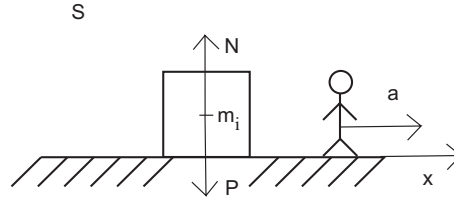



Figura 10.1: Corpo de massa inercial m_i parado sobre uma mesa. A força peso exercida pela Terra sobre o bloco é contrabalançada pela força normal exercida pela mesa sobre ele.

onde $\vec{a}\,'$ é a aceleração de m_i em relação ao referencial não inercial S' que está acelerado junto com esta pessoa em relação ao solo. O referencial S' está sempre parado em relação a esta pessoa. Como a força peso atuando para baixo está contrabalançada pela força normal atuando para cima, esta pessoa concluiria que $\vec{a}\,' = \vec{0}$. Mas esta é a resposta errada, já que esta pessoa observa o bloco sendo acelerada para a esquerda com uma aceleração $\vec{a}\,' = -a\hat{x}'$, figura 10.2 (a). Esta pessoa também vê a Terra acelerada para a esquerda com a mesma aceleração do bloco, ou seja, $\vec{a}_T\,' = -a\hat{x}'$.

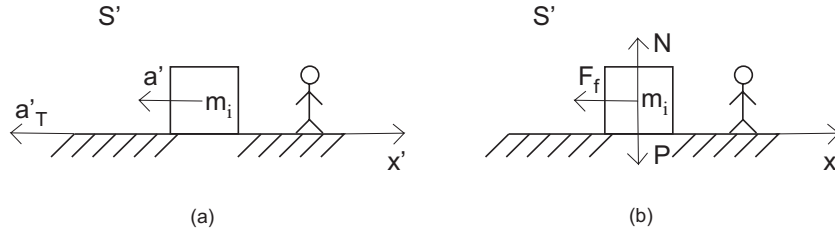



Figura 10.2: (a) Aceleração $\vec{a}\,'$ do corpo em relação ao referencial não inercial S'. (b) Neste referencial, além das forças reais $\vec{P}$ e $\vec{N}$, é necessário introduzir a força fictícia $\vec{F}_f$ para explicar a aceleração $\vec{a}\,'$ do corpo.

Para explicar esta aceleração do bloco, esta pessoa tem de usar a segunda lei de Newton na forma

$$\vec{F} - m_i\vec{a}_o = m_i\vec{a}\,' \ , \tag{10.3}$$

onde $\vec{a}_o$ é a aceleração do referencial não inercial S' em relação ao referencial inercial S. Neste caso estamos considerando S como sendo o referencial terrestre, enquanto que a pessoa está acelerada em relação ao solo com uma aceleração $\vec{a} = a\hat{x} = \vec{a}\hat{x}\,'$. Isto significa que $\vec{a}_o = a\hat{x}\,'$. Ao aplicar a equação (10.3), juntamente com o fato de que a força vertical resultante sobre o bloco é nula, $\vec{F} = \vec{P} + \vec{N} = \vec{0}$, a pessoa concluiria corretamente que:

$$\vec{a}\,' = -\vec{a}_o = -a\hat{x}\,' \ . \tag{10.4}$$

A força $-m_i\vec{a}_o$ que teve de ser introduzida na equação (10.3) é chamada usualmente[1] de *força fictícia* ou de *pseudo-força*, sendo representada por $\vec{F}_f$. A denominação "fictícia" surge do fato de não se encontrar, na mecânica clássica, um agente material que a cause. A força peso é uma força de origem gravitacional exercida por toda a Terra sobre o bloco, enquanto que a força normal é uma força de contato exercida pelo solo sobre o bloco. Por outro lado, não se encontra quem causa a força fictícia $\vec{F}_f \equiv -m_i\vec{a}_o$. Também não se encontra a origem desta força (ela não tem origem magnética, gravitacional, elétrica, nuclear etc.).

Isto resolve a análise deste problema no referencial não inercial S'.

O mesmo procedimento é necessário para analisar a situação de um corpo parado em relação ao solo enquanto está dependurado por uma mola vertical colocada acima dele, como na figura 10.3 (a). No referencial inercial terrestre temos que a força peso $\vec{P} = -m_g g\hat{z}$ apontando verticalmente para baixo é contrabalançada pelo força elástica $\vec{F}_e = k(\ell - \ell_0)\hat{z}$ apontando verticalmente para cima, figura 10.3 (b). Ao aplicar a equação (10.1) obtém-se uma aceleração nula, $\vec{a} = \vec{0}$.

Vamos agora analisar este problema do ponto de vista de uma pessoa que está acelerada horizontalmente em relação ao solo no sentido do eixo x, como na figura 10.1. Neste referencial não inercial S' observa-se o bloco acelerado para a esquerda com uma aceleração $\vec{a}\,' = -a\hat{x}'$, como na figura 10.4 (a). A Terra é vista

[1] [FLS63, Seção 12-5: Pseudo forces, págs. 12-14 até 12-16], [Fre71, pág. 499], [Sym82, págs. 304-305] e [Cur09, pág. 101].

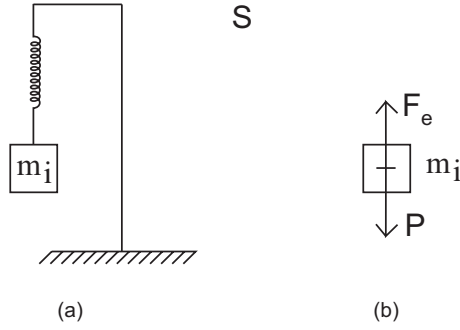



Figura 10.3: (a) Corpo parado no solo dependurado por uma mola, como visto no referencial inercial S. (b) A força peso $\vec{P}$ é contrabalançada pela força elástica $\vec{F}_e$.

com uma aceleração $\vec{a}_T\,'$, enquanto que a mola também é vista com uma aceleração $\vec{a}_m\,'$. Todos estes corpos têm a mesma aceleração $\vec{a}\,'$, isto é, $\vec{a}_T\,' = \vec{a}_m\,' = \vec{a}\,' = -a\hat{x}'$. Para explicar esta aceleração do bloco, a pessoa tem de introduzir a força fictícia $\vec{F}_f$ apontando para a esquerda, como indicado na figura 10.4 (b).

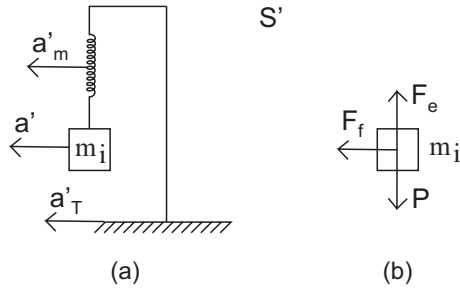



Figura 10.4: (a) Aceleração do corpo dependurado pela mola da figura 4.4, como visto no referencial não inercial S' que está acelerado para a direita em relação ao solo. (b) Neste referencial não inercial S' é necessário introduzir a força fictícia $\vec{F}_f$, além da força peso $\vec{P}$ e da força elástica $\vec{F}_e$.

Ao aplicar a equação (10.3) com $\vec{a}_o = a\hat{x}\,'$ obtém-se a resposta correta neste referencial não inercial S', a saber, $\vec{a}\,' = -a\hat{x}\,'$.

A mesma análise pode ser aplicada ao problema do balde com fluido parado em relação ao solo discutido na Seção 4.3. Ou seja, ao analisar este problema em um referencial não inercial S' que tem uma aceleração horizontal constante em relação ao solo, a água será vista com uma aceleração constante. Para explicar esta aceleração da água será necessário introduzir em S' a força fictícia $\vec{F}_f = -m_i\vec{a}_o$, como dado pela equação (10.3).

10.2 Movimento Retilíneo com Aceleração Constante sobre a Terra

Novamente vamos considerar a Terra como sendo um referencial inercial S nesta Seção. Vamos analisar aqui situações nas quais um corpo de prova tem uma aceleração constante em relação ao solo, com esta aceleração sendo devida à aplicação de uma força resultante constante sobre ele. Mas ao contrário do Capítulo 6, analisaremos estes problemas a partir do referencial não inercial S' que está acelerado junto com o corpo de prova em relação ao solo.

10.2.1 Queda Livre

A primeira situação é a de queda livre. No referencial inercial terrestre S temos uma maçã caindo em queda livre com uma aceleração $\vec{a} = -g\hat{z}$ em direção ao solo, com $g \equiv |\vec{a}| = 9,81\ m/s^2$. Vamos supor que um observador também esteja caindo em direção ao solo com a mesma aceleração da maçã, figura 10.5.

No referencial S' não inercial que está caindo junto com a maçã em direção ao solo, observa-se a maçã parada, isto é, $\vec{a}\,' = \vec{0}$, figura 10.6 (a). Observa-se ainda que a Terra está acelerada em direção à maçã com uma aceleração $\vec{a}_T\,' = (9,81\ m/s^2)\hat{z}'$.

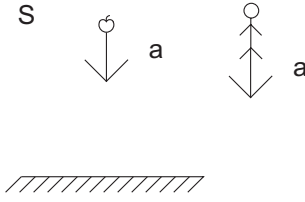



Figura 10.5: Uma maçã e uma pessoa caem com a mesma aceleração em direção ao solo.

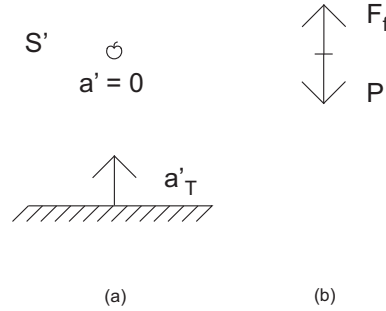



Figura 10.6: (a) A maçã está em repouso em um referencial não inercial S' que cai junto com ela em direção ao solo. (b) Força peso real $\vec{P}$ e força fictícia $\vec{F}_f = -m_i\vec{a}_o$ atuando sobre a mação neste referencial não inercial.

Se tentássemos aplicar no referencial não inercial S' a lei de Newton na forma da equação (10.2), com $\vec{F} = \vec{P} = m_g g\hat{z}'$, chegaríamos na resposta errada de que $\vec{a}\,' = g\hat{z}' = (9,81\ m/s^2)\hat{z}'$. Para chegar na resposta correta de que $\vec{a}\,' = \vec{0}$, temos de incluir neste referencial S' uma força fictícia $\vec{F}_f \equiv -m_i\vec{a}_o$ atuando para cima sobre a maçã, figura 10.6 (b). A equação de movimento a ser utilizada neste referencial S' tem de ser a equação (10.3).

No caso da figura 10.6 (a) temos que a aceleração do referencial S' em relação ao referencial S é dada por $\vec{a}_o = \vec{g} = -g\hat{z}'$. Utilizando a equação (10.3) e o fato de que $\vec{F} = m_g\vec{g} = -m_g g\hat{z}'$, chegaríamos que a aceleração $\vec{a}\,'$ da maçã em relação a este referencial não inercial S' seria dada por (como sempre usando também que $m_i = m_g$):

$$\vec{a}\,' = \frac{\vec{F}}{m_i} - \vec{a}_o = -g\hat{z}' - (-g\hat{z}') = \vec{0}\ . \tag{10.5}$$

E esta é a resposta correta no sistema de referência não inercial S'.

Mais uma vez temos que a força $-m_i\vec{a}_o$ é chamada de *força fictícia* (isto é, uma pseudo-força). O motivo para este nome é que todas as outras forças que aparecem no $\vec{F}$ da equação (10.3) têm uma origem física. Isto é, elas surgem de interações do corpo de prova com outros corpos, como a interação gravitacional entre ele e a Terra, uma interação elástica com uma mola, uma interação elétrica com uma outra carga, uma interação magnética com um ímã, uma força de atrito devida à interação do corpo com um meio resistivo etc. Por outro lado, na mecânica clássica a força $-m_i\vec{a}_o$ não tem origem física, isto é, ela não é devida a uma interação do corpo de prova com qualquer outro corpo. Ela só aparece em sistemas de referência não inerciais que estão acelerados em relação ao espaço absoluto. Esta é a interpretação das forças fictícias na mecânica newtoniana.

Apesar deste caráter fictício, esta força $-m_i\vec{a}_o = m_i g\hat{z}'$ é essencial em sistemas de referência não inerciais para se chegar aos resultados corretos utilizando as leis do movimento de Newton. Na figura 10.6 (b) apresentamos as forças atuando sobre a maçã de acordo com um referencial S' que esteja parado em relação à maçã. Temos a força peso P atuando em direção ao solo devida à atração terrestre, além da força fictícia $-m_i a_o$ atuando para cima e contrabalançando a força peso.

10.2.2 Corpo sendo Acelerado em Relação ao Solo enquanto está Dependurado em um Fio

O segundo exemplo analisado aqui é o de um corpo acelerado em relação ao solo enquanto está dependurado em um fio. Mais uma vez fazemos a aproximação de que a Terra é um bom referencial inercial nesta situação, representado por S. Na Seção 6.5 analisamos o movimento do corpo e a inclinação do fio em um sistema de referência fixo em relação à Terra. Agora analisamos o mesmo problema em um sistema de referência fixo no vagão acelerado, ou seja, do ponto de vista de um passageiro que está viajando dentro do vagão, figura 10.7. Este é o referencial S' não inercial.

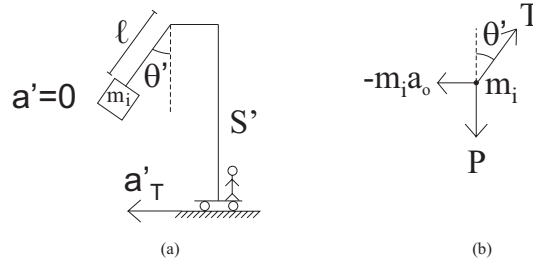



Figura 10.7: (a) Vagão acelerado em relação ao solo, com o fio inclinado de um ângulo $\theta' = \theta$ em relação à vertical. O corpo de massa inercial m_i não está acelerado em relação ao referencial S', $\vec{a}\,' = \vec{0}$, enquanto que a Terra tem uma aceleração para a esquerda, $\vec{a}\,'_T = -a\hat{x}'$. (b) Forças reais, P e T, juntamente com a força fictícia, $-ma_o$, atuando sobre o corpo, consideradas do ponto de vista do passageiro.

Aplica-se uma força horizontal ao vagão fazendo com que ele se desloque em relação ao solo com uma aceleração constante $\vec{a} = a\hat{x}$, com $a = |\vec{a}|$. Observa-se que o fio fica inclinado de uma ângulo $\theta' = \theta$ em relação à vertical, figura 10.7.

Neste caso, do ponto de vista do passageiro ou do referencial não inercial S', o corpo de massa m e peso P ligado ao fio de comprimento ℓ está em repouso em relação ao vagão e ao passageiro, $\vec{a}\,' = \vec{0}$. Já a Terra está acelerada para a esquerda neste referencial S' com uma aceleração dada por $\vec{a}\,'_T = -a\hat{x}'$.

Se o passageiro aplicasse a segunda lei de Newton para o corpo de massa m na forma da equação (1.4), chegaria na mesma conclusão que as equações (6.62), (6.63) e (6.64), ou seja:

$$a' = g\frac{m_g}{m_i}\tan\theta' \neq 0 \ . \tag{10.6}$$

Mas obviamente esta é a resposta errada neste sistema de referência do vagão. Afinal de contas o pêndulo não está se movendo em relação ao vagão ou ao passageiro na situação de equilíbrio que está sendo analisada aqui, de tal forma que o passageiro deveria chegar em $a' = 0$. Ele só pode chegar neste resultado com a equação (10.3). Isto é, ele precisa introduzir a força fictícia $-m_i\vec{a}_o$ para chegar na resposta correta em seu referencial. No caso que está sendo analisado aqui temos $\vec{a}_o = a\hat{x}'$. Esta força fictícia equilibra a força gravitacional exercida pela Terra e a força exercida pelo fio, de tal forma a não produzir movimento do pêndulo em relação ao vagão ou ao passageiro e para mantê-lo inclinado em relação à vertical, como representado na figura 10.7 (b).

A equação de movimento no referencial do passageiro deve então ser escrita como:

$$\vec{P} + \vec{T} - m_i\vec{a}_o = m_i\vec{a}\,' \ , \tag{10.7}$$

onde $\vec{a}_o$ é a aceleração do passageiro em relação ao referencial inercial. Neste caso: $\vec{a}_o = a\hat{x}'$.

Aplicando as forças representadas na figura 10.7 (b) obtém-se que o corpo fica parado em relação ao passageiro, ou seja:

$$\vec{a}\,' = \vec{0} \ . \tag{10.8}$$

Este resultado está compatível com a figura 10.7 (a). Neste sistema de referência S' a componente vertical da tensão no fio é equilibrada pelo peso do corpo, enquanto que $-m_i\vec{a}_o$ equilibra a componente horizontal da tensão no fio. Isto mantém o corpo de massa m em repouso em relação ao vagão.

Mais uma vez na mecânica newtoniana não há uma origem física para esta força $-m_i\vec{a}_o$. Mas é essencial utilizá-la no sistema de referência acelerado do vagão para chegar aos resultados corretos.

É também possível inverter o procedimento. Ou seja, é dada a equação (10.7) com $\vec{a}_o = a\hat{x}'$ e procura-se o valor da tração $\vec{T}$ e o ângulo de inclinação θ' do fio em relação à vertical como dado pela figura 10.7. Para encontrar este ângulo utiliza-se a imposição de que não haja aceleração do corpo de massa m em relação ao vagão, isto é, impõe-se $\vec{a}\,' = \vec{0}$. Usando que $\vec{P} = -m_g g\hat{z}'$ e que $\vec{T} = T_x\hat{x} + T_z\hat{z}$ obtém-se que:

$$T_x = m_i a = T \operatorname{sen}\theta' \ , \tag{10.9}$$

e

$$T_z = m_g g = T\cos\theta' \ . \tag{10.10}$$

Com isto voltamos aos resultados newtonianos dados pelas equações (6.55) e (6.56).

10.2.3 Recipiente Acelerado sobre o Solo, com um Fluido em seu Interior

Na Seção 6.7 analisamos o problema de um recipiente com um fluido em seu interior. Consideramos a situação do recipiente acelerado em relação ao solo, de um ponto de vista de alguém parado na Terra, figura 6.24. Analisaremos agora o mesmo problema de um ponto de vista de alguém que está sendo acelerado junto com o recipiente em relação ao solo, ou seja, a partir do referencial S' não inercial representado na figura 10.8. Um elemento de massa dm com volume dV está parado neste referencial, ou seja, $a' = 0$.

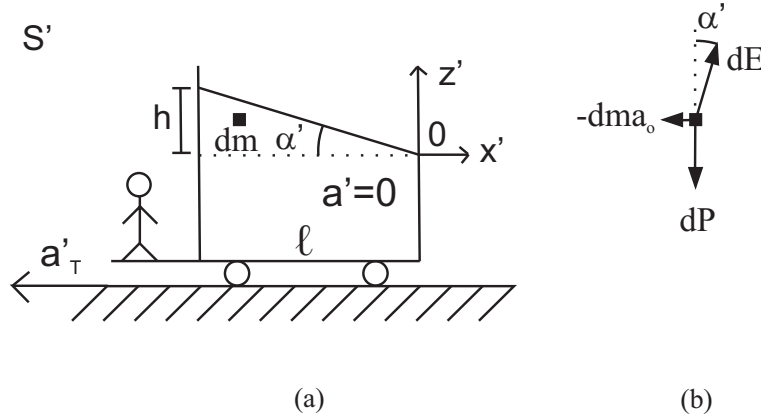



Figura 10.8: (a) Referencial não inercial S' parado em relação ao recipiente, enquanto que o recipiente está acelerado em relação ao solo. A água está parada neste referencial, $a\,' = 0$, enquanto que a Terra desloca-se para a esquerda com uma aceleração $\vec{a}\,'_T = -a\hat{x}'$. (b) Forças reais, dP e dE, juntamente com a força fictícia, $-dma_o$, atuando no referencial S'.

Neste caso a pessoa vê a superfície da água inclinada de um ângulo $\alpha' = \alpha$ em relação à horizontal, apesar da água estar parada em relação a esta pessoa. As únicas forças de interação que parecem atuar sobre um elemento de massa da água são seu peso, $d\vec{P} = dm\vec{g} = -dmg\hat{z}'$, e a força de empuxo $d\vec{E}$ devida ao gradiente de pressão p no fluido, $d\vec{E} = -(\nabla' p)dV$. Este gradiente de pressão é normal à superfície livre do fluido. Se a pessoa utilizasse a segunda lei de Newton na forma da equação (9.2), chegaria ao seguinte resultado:

$$dm\vec{g} - (\nabla' p)dV = dm\vec{a}\,' \ . \tag{10.11}$$

A pressão no fluido foi encontrada pela equação (6.80), a saber:

$$p(x',\ y',\ z') = -\rho a_{fT}x' - \rho g z' + p_o \ , \tag{10.12}$$

onde a_{fT} é a aceleração do fluido em relação à Terra e p_o é a pressão atmosférica. Para chegar neste resultado usamos ainda que $\rho_i = \rho_g \equiv \rho$ pela equação (6.88). O empuxo sobre um elemento de massa dm é então dado por:

$$d\vec{E} = -(\nabla' p)dV = dma_{fT}\hat{x}' + dmg\hat{z}' \ . \tag{10.13}$$

Utilizando a equação (10.13) na equação (10.11), a pessoa que está sendo acelerada junto com o recipiente concluiria que:

$$\vec{a}\,' = a_{fT}\hat{x}' \ . \qquad (10.14)$$

Só que esta é a resposta errada. No referencial que está acelerado em relação ao solo juntamente com o recipiente, a água está em repouso, de tal forma que a resposta correta é dada por: $\vec{a}\,' = \vec{0}$. Para chegar na resposta correta, a segunda lei de Newton neste referencial não inercial S' precisa ser escrita na forma da equação (10.3), ou seja:

$$dm\vec{g} - (\nabla' p)dV - dm\vec{a}_o = dm\vec{a}\,' \ , \qquad (10.15)$$

onde $\vec{a}_o = \vec{a}_{fT} = a_{fT}\hat{x}'$ é a aceleração do referencial não inercial S' em relação ao solo. A Terra pode ser considerada um bom referencial inercial neste caso.

Utilizando então $d\vec{P} = -dmg\hat{z}'$ e a equação (10.13), juntamente com $-dm\vec{a}_o = -dma_{fT}\hat{x}'$, a pessoa chegaria finalmente a partir da equação (10.15) na resposta correta em seu referencial não inercial, a saber:

$$\vec{a}\,' = \vec{0} \ . \qquad (10.16)$$

Apesar da aceleração da água ser nula neste referencial não inercial, a superfície da água fica inclinada em relação à horizontal, como mostrado na figura 10.8 (a). Na figura 10.8 (b) apresentam-se as forças reais dP e dE, juntamente com a força fictícia $-dma_o$. É necessário introduzir esta força no referencial não inercial S' para explicar o formato inclinado da superfície da água. Neste sentido pode-se dizer que esta força fictícia tem um efeito real. Apesar disto, ela é chamada de fictícia pois não se encontra um agente material que a cause. A força peso é devida à interação gravitacional entre o elemento de massa dm e a Terra, enquanto que a força de empuxo dE surge devida ao gradiente de pressão no fluido. Por outro lado não se encontra, na mecânica newtoniana, o agente responsável pela força fictícia $-m_i\vec{a}_o$.

Também é possível inverter o procedimento. Ou seja, começamos com a equação (10.15) e fornecemos a força peso $d\vec{P} = dm\vec{g} = -dmg\hat{z}'$ e a força fictícia $-dm\vec{a}_o = -dma_{fT}\hat{x}'$. Pergunta-se então qual tem de ser o valor da pressão em todos os pontos do fluido de tal forma que ele fique em repouso neste referencial S', ou seja, tal que $\vec{a}\,' = \vec{0}$. Resolvendo a equação (10.15) obtêm-se equações para $p(x',\ y',\ z')$ análogas às equações (6.73) a (6.75). A solução destas equações é dada pela equação (6.80) em termos das variáveis $(x',\ y',\ z')$. A equação satisfeita pelas superfícies isobáricas é dada pela equação (6.82). Ou seja, estas superfícies isobáricas são planos paralelos ao plano da superfície livre do fluido dado por

$$z' = -(\tan\alpha')x' \ , \qquad (10.17)$$

onde

$$\tan\alpha' = \frac{a_{fT}}{g} \ . \qquad (10.18)$$

Ou seja, ao inverter o procedimento, obtemos mais uma vez que a superfície livre do fluido fica inclinada de um ângulo α' em relação à horizontal. A tangente deste ângulo é dada pela razão entre a aceleração do fluido em relação ao solo e a aceleração da gravidade. Neste referencial não inercial S', a responsável pela inclinação do fluido é a força fictícia $-dm\vec{a}_o$ apontando para a esquerda, como indicado na figura 10.8 (b). Neste referencial não inercial esta força pode ser considerada real, já que causa a inclinação do fluido. Apesar disto, ela é chamada de fictícia por não se encontrar o agente material que a cause.

10.3 Movimento Circular Uniforme e a Força Centrífuga

Nesta Seção analisamos alguns problemas do Capítulo 8, mas agora no sistema de referência dos corpos que giram, de tal forma que estes corpos estejam em repouso neste novo sistema de referência.

10.3.1 Órbita Circular de um Planeta

Começamos com o planeta orbitando ao redor do Sol. Novamente vamos considerar apenas o caso particular de órbita circular. No sistema de referência inercial S considerado na Seção 8.2, com a massa do Sol sendo muito maior do que a massa do planeta, o Sol foi considerado essencialmente em repouso e o planeta estava orbitando ao redor dele, figura 10.9. A aplicação das equações (1.4) e (1.7) resultou em uma aceleração centrípeta dada por $a_{cp} = Gm_s/\rho^2$, sendo ρ a distância do planeta ao Sol.

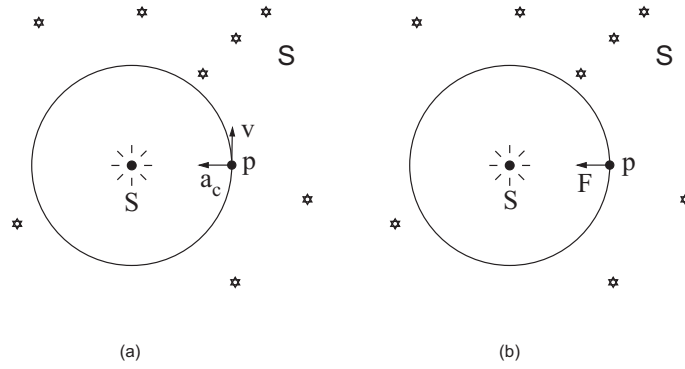



Figura 10.9: Referencial inercial S com o planeta descrevendo uma órbita circular ao redor do Sol. (a) Velocidade e aceleração do planeta. (b) Força gravitacional atuando sobre o planeta.

Analisamos agora este problema em um sistema de referência não inercial S' no qual o Sol e o planeta estão em repouso, figura 10.10. Ou seja, em um sistema de referência S' centrado no Sol mas que gira junto com o planeta em relação ao conjunto das estrelas fixas.

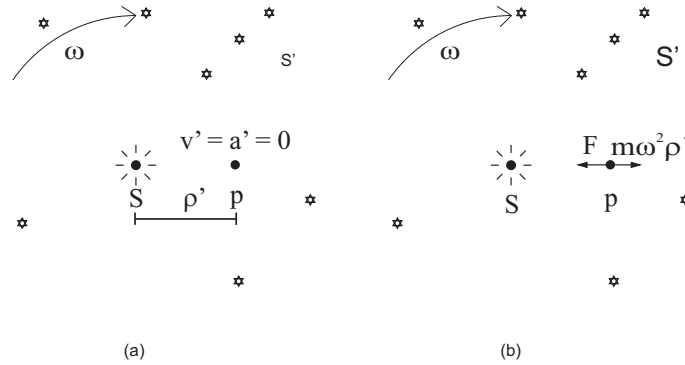



Figura 10.10: (a) Sistema não inercial S' com o planeta parado em relação ao Sol, $v' = 0$ e $a' = 0$, enquanto que o conjunto de estrelas gira ao redor do Sol e da Terra com uma velocidade angular ω. (b) Força gravitacional real F atuando sobre o planeta sendo contrabalançada pela força centrífuga fictícia $m\omega^2\rho'$ atuando no referencial S'.

Ao fazer as contas neste sistema deveríamos concluir que o planeta não está acelerado, isto é, que $a' = 0$. Mas este não é o caso se aplicarmos a segunda lei de Newton na forma da equação (1.4).

Como podemos explicar neste novo sistema de referência o fato de que o planeta permanece em repouso apesar da atração gravitacional do Sol? Como pode o planeta manter uma distância essencialmente constante em relação ao Sol? Para chegar ao resultado correto de que o planeta não está acelerado neste novo sistema de referência e para explicar porquê a distância entre o planeta e o Sol permanece constante, precisamos introduzir uma nova força fictícia. Neste caso, esta força fictícia tem um nome especial, *força centrífuga*. Ela é dada por:

$$\vec{F}_c = -m_i\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') , \tag{10.19}$$

onde $\vec{r}\,'$ é o vetor posição do corpo de prova em relação à origem do sistema de referência não inercial e $\vec{\omega}$ é o vetor velocidade angular do sistema de referência não inercial em relação ao espaço absoluto, ou em relação a qualquer sistema de referência inercial. A segunda lei de Newton neste sistema de referência não inercial S' deve então ser escrita da seguinte forma:

$$\vec{F} - m_i\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') = m_i\vec{a}\,' . \tag{10.20}$$

No Capítulo 8 consideramos o referencial inercial S centrado no Sol. Neste referencial S o planeta orbitava ao redor do Sol com uma velocidade angular ω. O sistema de referência não inercial S' considerado aqui também é centrado no Sol, mas ele gira em relação ao referencial S com a mesma velocidade angular do planeta ao redor do Sol, figura 10.11, tal que o planeta fique parado em S'.

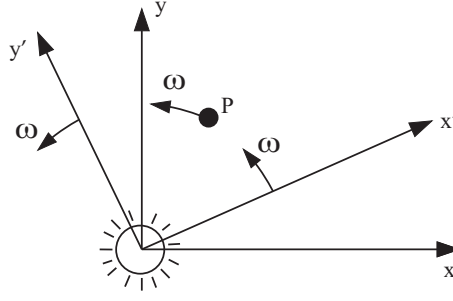



Figura 10.11: Sistema de referência S' girando junto com o planeta em relação ao referencial S.

Temos que $\vec{\omega}$ é a velocidade angular do referencial S' em relação ao referencial S. Da figura 10.11 obtém-se que $\vec{\omega} = \omega\hat{z}'$. Desta forma a força centrífuga fica dada por

$$\vec{F}_c = -m_i\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') = m_i\omega^2\rho'\hat{\rho}' \ , \tag{10.21}$$

onde ρ' é a distância do Sol ao planeta, sendo $\hat{\rho}'$ o vetor radial apontando do Sol ao planeta. Esta força aponta radialmente para fora do Sol, como indicado na figura 10.10 (b). Se o planeta fosse a Terra, o período de rotação do referencial S' em relação ao referencial S seria $T = 2\pi/\omega = 1$ ano.

Esta força fictícia, que aparece apenas em um sistema de referência não inercial S', mas que não aparece no sistema de referência inercial S, tem uma propriedade de apontar para fora do centro. Este é o motivo do nome "força centrífuga," cunhado por Huygens. Ela está indicada na figura 10.12. Newton cunhou o termo "força centrípeta" para se opor a Huygens. Na mecânica newtoniana a única força real neste exemplo atuando sobre o planeta é a força gravitacional exercida pelo Sol, sendo que esta força aponta para o centro da órbita do planeta, como indicado na figura 10.9 (b). Já a força centrífuga não tem uma origem física, isto é, ela não surge na mecânica newtoniana como uma interação entre o planeta e os outros corpos do universo. Ela só aparece neste referencial não inercial S' da figura 10.12, não surgindo no referencial inercial S da figura 10.9.

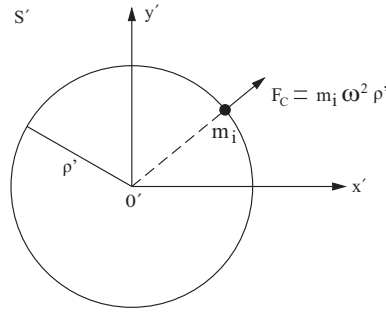



Figura 10.12: Força centrífuga no referencial não inercial S'.

Para se chegar em respostas corretas neste sistema de referência não inercial S', a segunda lei de Newton deve ser escrita da seguinte forma:

$$\vec{F} + \vec{F}_c = m_i\vec{a}\,' \ . \tag{10.22}$$

Aqui $\vec{F}$ é a força resultante devida à interação física de m_i com todos os outros corpos, $\vec{F}_c$ é a força fictícia centrífuga dada pela equação (10.19), enquanto que $\vec{a}\,'$ é a aceleração de m_i em relação a este sistema de referência não inercial. A força real $\vec{F}$ é devida a interações gravitacionais, elétricas, magnéticas, nucleares, de atrito, elásticas etc. Estas interações ocorrem entre o corpo de prova m_i e todos os outros corpos do universo.

No referencial S' o planeta fica a uma distância constante do Sol, figura 10.13.

Utilizando que $\vec{a}\,' = \vec{0}$ neste sistema de referência, juntamente com a força gravitacional newtoniana dada pela equação (1.7), obtém-se a força centrífuga, ou seja

$$\vec{F}_c = -m_{ip}\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') = G\frac{m_{gS}m_{gp}}{\rho'^2}\hat{\rho}' \ . \tag{10.23}$$

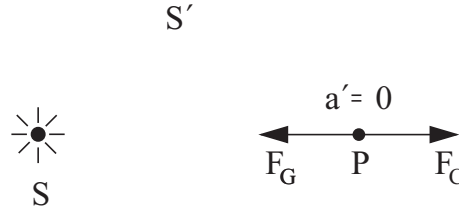



Figura 10.13: Planeta "orbitando" ao redor do Sol, como visto em S'.

Desta equação obtém-se: $\omega = \sqrt{Gm_{gS}/\rho'^3}$.

Alternativamente, poderíamos utilizar que $\omega = \sqrt{Gm_{gS}/\rho'^3}$ para obter que $\vec{a}\,' = \vec{0}$ no sistema de referência S' no qual o planeta e o Sol estão em repouso.

Mais uma vez não há uma origem física para esta força centrífuga, isto é, não se encontra o agente que a cause. Já a força gravitacional neste caso vem da atração entre o Sol e o planeta. O agente que causa esta força no planeta é o Sol, sendo a interação de origem gravitacional. No caso da força centrífuga não se conhece o agente que a causa, nem o tipo de interação que dá origem a esta força.

Mas como visto na figura 10.10 (b), é necessário introduzir esta força centrífuga no referencial não inercial S'. Ela equilibra a força gravitacional exercida sobre o planeta pelo Sol, fazendo com que o planeta fique parado neste referencial a uma distância constante do Sol, como indicado na figura 10.10 (a).

10.3.2 Dois Globos Girando Presos por uma Corda

Discutimos agora brevemente a experiência dos dois globos descrita por Newton. Vamos considerar a Terra como sendo o referencial inercial S neste caso, figura 10.14. O quadrado representa a mesa sem atrito sobre a qual giram os dois globos de massas inerciais m_i com uma velocidade angular constante ω ao redor do centro O, sendo ρ a distância de cada globo ao centro. A corda esticada fica com uma tensão T, sendo esta a força que ela exerce sobre cada globo, apontando para o centro das órbitas, figura 10.14 (b).

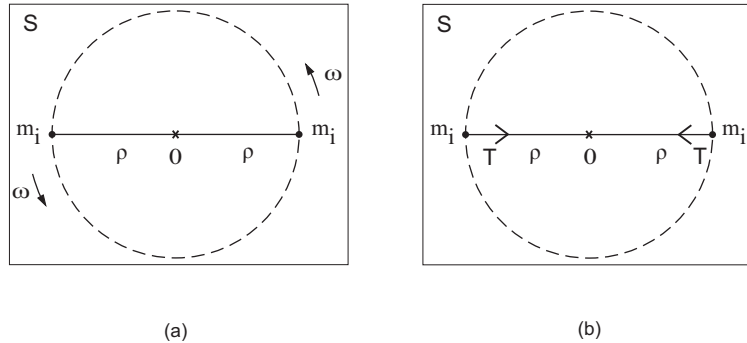



Figura 10.14: Situação vista no referencial inercial terrestre S. (a) Dois globos girando sobre uma mesa sem atrito presos a uma corda. (b) Forças de tração exercidas pela corda tensionada sobre cada globo.

Em um sistema de referência S' que gira com os globos centrado no centro de massa do sistema, temos a situação representada na figura 10.15. Agora eles são vistos em repouso. A força de tração exercida pela corda tensionada sobre cada um deles é contrabalançada neste referencial não inercial pela força centrífuga $m\omega^2\rho'$.

Neste sistema de referência não há movimento dos globos, apesar da tensão T na corda esticada. A força centrípeta devida a esta tensão na corda é equilibrada por uma força centrífuga dada por $m_i\omega^2\rho'$ e atuando em cada corpo 1 e 2, figura 10.15 (b):

$$F_{c1} = m_1\omega^2\rho_1' = T \ , \tag{10.24}$$

e

$$F_{c2} = m_2\omega^2\rho_2' = T \ . \tag{10.25}$$

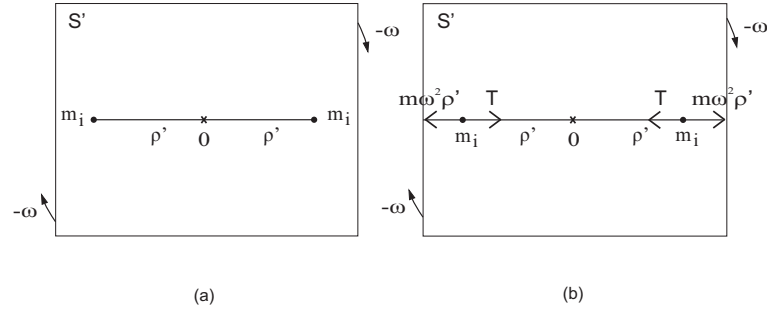



Figura 10.15: (a) Dois globos parados vistos no referencial S' que gira com eles em relação ao solo. (b) Força real T e força centrífuga fictícia $m\omega^2\rho'$ atuando sobre cada globo neste referencial.

Há duas interpretações para este equilíbrio: (a) Podemos dizer que a tensão na corda é equilibrada pela força centrífuga, que não deixa os corpos se aproximarem; ou (b) podemos dizer que a força centrífuga gera a tensão na corda.

10.3.3 A Experiência do Balde de Newton

Consideramos agora a experiência do balde. Vamos nos concentrar na situação em que o balde e a água giram juntos com uma velocidade angular constante ω em relação a um sistema de referência inercial S. Mais uma vez vamos supor a Terra como um bom referencial inercial neste caso. Na figura 10.16 temos em (a) o balde girando em relação ao solo com uma velocidade angular ω, enquanto que em (b) aparecem as forças peso, dP, e de empuxo, dE, atuando sobre um elemento de massa dm do fluido.

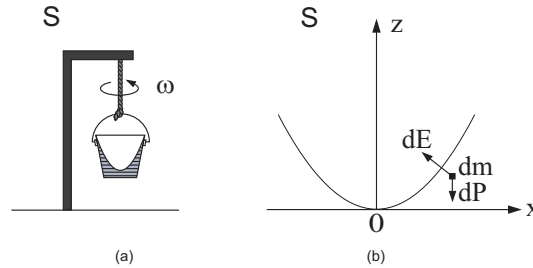



Figura 10.16: Referencial inercial S. (a) Balde girando com velocidade angular ω em relação ao solo. (b) Forças atuando sobre um elemento de massa dm e volume dV.

Em um sistema de referência não inercial S' que gira junto com o balde, não há movimento da água, $a' = 0$, figura 10.17.

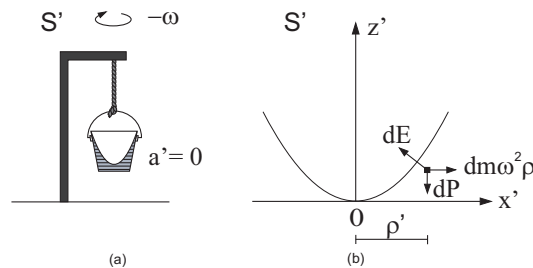



Figura 10.17: Sistema de referência não inercial S' que gira junto com o balde em relação ao solo. (a) Neste referencial o formato da água é côncavo, embora a água esteja parada, $a' = 0$. A Terra e as estrelas giram ao redor do eixo do balde com uma velocidade angular $-\omega$. (b) Forças reais, dP e dE, juntamente com a força centrífuga fictícia, $dm\omega^2\rho'$, atuando sobre um elemento de massa dm e volume dV.

Neste referencial S' observa-se que a Terra, as estrelas e os outros corpos astronômicos giram ao redor do eixo do balde com uma velocidade angular $-\omega$. Como qualquer elemento de água de volume dV está parado

em S', a força resultante sobre ele deve ser considerada nula, se levarmos em conta a força centrífuga fictícia. As equações (10.19) e (10.20) se reduzem a (usando que a força real é dada por $d\vec{F} = -(\nabla' p)dV - dm_g g\hat{z}'$ e que $\vec{\omega} = \omega\hat{z}'$):

$$-(\nabla' p)dV - dm_g g\hat{z}' + dm_i\omega^2\rho'\hat{\rho}' = dm_i\vec{a}\,' = \vec{0}\ . \tag{10.26}$$

E isto gera os mesmos resultados obtido anteriormente na Seção 8.4, lembrando que $dm_i = dm_g$ e que estamos utilizando aqui $\rho'\hat{\rho}'$ ao invés de $u'\hat{u}$ ou de $x'\hat{x}'$ para representar a distância ao eixo de rotação.

É importante enfatizar tanto neste exemplo do balde, quanto nos exemplos anteriores da órbita circular do planeta e dos dois globos presos a uma corda, que esta força centrífuga não tem origem física na mecânica newtoniana. Ela só aparece em sistemas de referência não inerciais e neste sentido pode-se dizer que elas são reais (equilibram a força de atração do Sol, geram a tensão na corda no problema dos dois corpos, empurram a água para os lados do balde etc.). Por outro lado, ao contrário de todas as forças físicas reais como a atração gravitacional exercida pelo Sol ou pela Terra, a força elétrica exercida pelas cargas, a força magnética exercida por ímãs ou por fios com corrente, ou a força elástica exercida por molas ou por fios tensionados, não podemos localizar o corpo material responsável pelas forças centrífugas ou pelas forças fictícias em geral.

Vamos mostrar isto no caso da experiência do balde (uma análise similar pode ser feita para os outros exemplos discutidos anteriormente). A Terra será considerada como sendo um referencial inercial S. Vamos considerar a situação na qual o balde e a água estão girando juntos em relação à Terra e às estrelas fixas com uma velocidade angular constante ω ao redor do eixo vertical. Analisamos agora este problema no sistema de referência não inercial S' que está girando junto com o balde, de tal forma que neste referencial a superfície da água é côncava, embora a água esteja em repouso, figura 10.17. Qual corpo material é responsável pela concavidade da água? Esta concavidade é devida a algum tipo de interação física entre a água e os corpos ao seu redor? Vamos analisar os três suspeitos materiais que existem ao redor da água, a saber, o balde, a Terra e o conjunto dos outros corpos astronômicos (estrelas e galáxias).

É o balde o responsável por esta concavidade da água? Não, afinal de contas o balde está em repouso em relação à água no referencial S'. Logo a força exercida pelo balde sobre uma molécula da água é a mesma força que ele exercia no referencial inercial S quando a água e o balde estavam parados entre si e em relação ao solo, com a superfície da água sendo plana, figura 8.10 (a). Do mesmo jeito que o balde não causava uma concavidade da água no caso da figura 8.10 (a), ele vai continuar não causando esta concavidade na situação da figura 10.17, já que o balde continua em repouso em relação à água.

É a Terra responsável por esta concavidade da água no referencial S'? Mais especificamente, é a rotação da Terra em relação à água, ao balde e a este sistema de referência S' a responsável pela força centrífuga? Mais uma vez a resposta na mecânica newtoniana é não. Como vimos no Capítulo 1, a força gravitacional exercida por uma casca esférica em partículas materiais localizadas fora dela aponta em direção ao centro da casca. Como a lei de Newton da gravitação não depende da velocidade nem da aceleração entre os corpos, ela vai permanecer válida quando a casca esférica está girando. Isto significa que mesmo quando a Terra está girando em relação a um certo conjunto de corpos ou sistema de referência, ela vai continuar exercendo apenas a força gravitacional usual apontando para seu centro, sem qualquer força horizontal, equação (1.21). Ou seja, embora a Terra seja vista girando ao redor do eixo do balde neste referencial S', não é ela que exerce a força centrífuga horizontal que empurra as moléculas da água para fora do eixo do balde.

São as estrelas e galáxias as responsáveis por esta concavidade da água no referencial S'? Mais especificamente, a rotação das estrelas fixas (ou das galáxias distantes) em relação à água, ao balde e a este sistema de referência não inercial S' é a responsável pela força centrífuga? A resposta é negativa mais uma vez, devida à Proposição 70, Teorema 30 do Livro I do *Principia* de Newton apresentada na Seção 1.4 e ao resultado dado pela equação (1.21). Isto é, distribuições esfericamente simétricas de matéria não exercem forças gravitacionais resultantes em quaisquer partículas internas, não interessando a rotação ou movimento destas distribuições esféricas em relação às partículas internas. Isto continua válido não importando a rotação ou o movimento destas distribuições esféricas em relação a quaisquer sistemas de referência. Isto significa que na mecânica newtoniana as estrelas fixas e as galáxias distantes podem desaparecer sem causar qualquer influência sobre a concavidade da água.

Como veremos, a mecânica relacional dará uma resposta diferente nesta e em outras situações.

É devido a este fato de não se encontrar um agente material responsável pela força centrífuga que ela recebeu o nome de fictícia. Nos referenciais não inerciais esta força fictícia tem efeitos reais já que, por exemplo, é a responsável pela concavidade da água no referencial S' da figura 10.17. Por outro lado, como não se encontra o corpo que causa esta força centrífuga, ela é chamada de fictícia.

Max Born discutiu diversos exemplos de corpos em rotação e os efeitos dinâmicos que aparecem nestes casos, apresentando a conclusão fundamental da mecânica newtoniana em termos bem simples e claros:[2]

> Parece assim que a ocorrência das forças centrífugas é universal e não pode ser devida a interações.

10.4 Rotação da Terra

10.4.1 Achatamento da Terra no Referencial Terrestre

Vamos agora analisar o formato da Terra de um ponto de vista de um referencial S' preso ao solo. Caso se utilizasse a segunda lei de Newton na forma da equação (9.2) obteríamos:

$$dm\vec{g} - (\nabla' p)dV = dm\vec{a}\,' \ , \tag{10.27}$$

onde $\vec{a}\,'$ é a aceleração do elemento de massa dm em relação ao referencial S'. Nesta equação dV é o volume infinitesimal do elemento de massa do fluido, $\vec{g}$ é a força gravitacional por unidade de massa atuando sobre ele, enquanto que p é a pressão em cada ponto do fluido.

Ao aplicar que $\vec{a}\,' = \vec{0}$ na equação (10.27) obtém-se uma Terra esférica, com a pressão dada pela equação (9.6). Esta não é a solução correta do problema, já que a Terra tem um formato aproximadamente elipsoidal.

Por outro lado, caso seja fornecido a força gravitacional por unidade de massa devida a uma distribuição elipsoidal de matéria dada pela equação (9.32), juntamente com a pressão conhecida pela solução deste problema dada pela equação (9.36), então a solução da equação (10.27) fica dada por $\vec{a}\,' = -\omega_d^2\rho'\hat{\rho}'$. Novamente esta não é a solução correta do problema, já que neste referencial não inercial S' a Terra é vista parada. Ou seja, a aceleração correta no referencial terrestre é dada por $\vec{a}\,' = \vec{0}$.

Para chegar na resposta correta que fornece $\vec{a}\,' = \vec{0}$, é necessário introduzir na equação (10.27) a força fictícia centrífuga dada pela equação (10.19). A segunda lei de Newton no referencial não inercial S' fica então como a equação (10.20):

$$dm\vec{g} - (\nabla' p)dV - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') = dm\vec{a}\,' \ , \tag{10.28}$$

onde $\vec{\omega}$ é a velocidade angular do referencial S' em relação ao referencial S, ou seja, $\vec{\omega} = \vec{\omega}_d$, onde $\vec{\omega}_d$ é a velocidade angular da Terra em relação ao espaço absoluto de Newton, ou em relação a um referencial inercial.

Ao resolver esta equação fornecendo as equações (9.32), (9.36) e $\vec{\omega} = \vec{\omega}_d$, obtém-se a resposta correta no referencial terrestre, a saber:

$$\vec{a}\,' = \vec{0} \ . \tag{10.29}$$

É possível também inverter o procedimento. Ou seja, é fornecida a equação (9.32), e também é dado que $\vec{\omega} = \vec{\omega}_d$. Ao resolver a equação (10.28) obtém-se então a pressão dada pela equação (9.36).

10.4.2 Cálculo da Precessão do Plano de Oscilação do Pêndulo de Foucault no Referencial Terrestre Utilizando a Força de Coriolis

Nesta Subseção vamos calcular a velocidade angular de precessão do plano de oscilação do pêndulo de Foucault em relação ao solo. O pêndulo será considerado com massa inercial m_i, massa gravitacional m_g, além de comprimento ℓ. Estas contas serão feitas no referencial não inercial S' que está parado na Terra. Caso se aplicasse a segunda lei de Newton neste referencial S' na forma da equação (1.4), obteríamos que o plano de oscilação do pêndulo deveria ficar parado em relação ao solo, já que as únicas forças que atuam sobre a massa m_i são a força gravitacional terrestre e a tensão no fio. Como estas duas forças formam um plano, o pêndulo deveria sempre ficar oscilando neste plano ao ser solto do repouso. Mas não é isto o que acontece. O plano de oscilação muda lentamente com o tempo em relação à superfície da Terra, com uma velocidade angular Ω_{pT}. Na mecânica newtoniana isto é explicado, no referencial não inercial terrestre, introduzindo na segunda lei de Newton uma outra força fictícia dada por:

$$\vec{F}_{\text{Coriolis}} = -2m_i\vec{\omega} \times \vec{v}\,' \ , \tag{10.30}$$

[2] [Bor65, págs. 78-85, ver especialmente a pág. 84].

onde $\vec{\omega}$ é a velocidade angular do sistema de referência não inercial S' em relação ao sistema de referência inercial S. Além disso, $\vec{v}\,'$ é a velocidade da massa m_i em relação ao referencial não inercial S'. Coriolis (1792-1843) descobriu esta força em 1831 enquanto realizava seu doutoramento sob a orientação de Poisson (1781-1840).[3] Ela foi apresentada em um artigo de 1835 no qual Coriolis se refere ao movimento dos planos coordenados "em relação ao espaço."[4] Podemos considerar os planos coordenados de Coriolis como sendo referenciais ou sistemas de referência. Ele denominou esta força de "força centrífuga composta," mas hoje em dia esta expressão é chamada de *força de Coriolis*.

Vamos resolver este problema no referencial não inercial S' que está parado na Terra, ou seja, no referencial terrestre. Neste caso $\vec{\omega} = \vec{\omega}_d$, onde $\vec{\omega}_d$ é a velocidade angular dinâmica da Terra em relação ao espaço absoluto. Vamos desprezar a resistência do ar. A força centrífuga não muda o plano de oscilação e assim não a consideramos aqui para simplificar a análise. O pêndulo simples será considerado em uma latitude $\alpha' = \alpha$, figura 10.18.

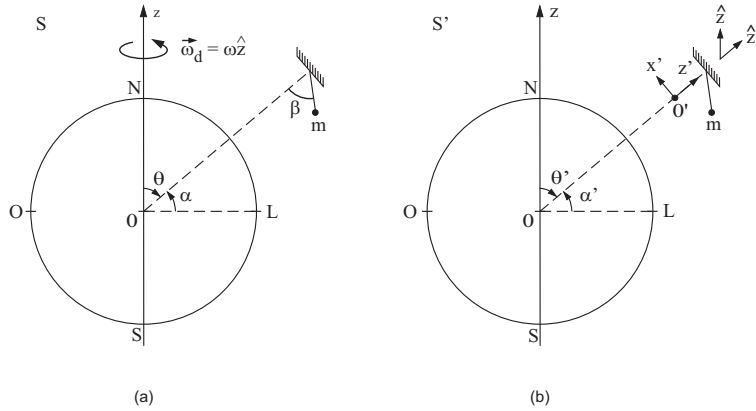



Figura 10.18: (a) Pêndulo de Foucault no referencial S do espaço absoluto, com a Terra girando com uma velocidade angular $\vec{\omega}_d$. (b) Referencial terrestre S'.

A equação de movimento no referencial não inercial da Terra é então dada por:

$$\vec{T} + m_g\vec{g} - 2m_i\vec{\omega}_d \times \vec{v}\,' = m_i\vec{a}\,' \ . \tag{10.31}$$

Aqui $\vec{T}$ é a tensão no fio. A novidade comparada com a equação de movimento do pêndulo simples em um referencial inercial é a introdução da força de Coriolis $-2m_i\vec{\omega}_d \times \vec{v}\,'$.

Escolhemos um sistema de coordenadas $(x',\ y',\ z')$ parado em relação à Terra. Sua origem O' é escolhida no ponto mais baixo da oscilação do pêndulo, ou seja, na posição onde a massa m_i fica parada quando não está oscilando. Escolhe-se ainda o eixo z' apontando verticalmente para cima neste local, ou seja, com $\hat{z}' = \hat{r}$, onde $\hat{r}$ aponta do centro da Terra para o ponto do apoio do pêndulo como indicado na figura 10.18. O eixo x' é escolhido de tal forma que o pêndulo oscilaria completamente no plano $x'z'$, se não houvesse a presença da força de Coriolis. Vamos usar ainda a igualdade entre a massa inercial e a massa gravitacional, equação (6.21).

As forças reais e fictícias atuando sobre o pêndulo no referencial S' estão indicadas na figura 10.19. Como forças de interação temos o peso $\vec{P} = m_g\vec{g}$ e a tração $\vec{T}$ no fio. Além disso, no referencial S' existe também a força fictícia de Coriolis, $-2m_i\vec{\omega}_d \times \vec{v}\,'$, que nesta figura está entrando no papel.

A Terra gira em relação ao referencial inercial S com uma velocidade angular $\vec{\omega}_d = \omega_d\hat{z}$, onde $\omega_d = |\vec{\omega}_d|$. Esta também é a velocidade angular do sistema de referência terrestre S' em relação ao referencial S:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_d = \omega_d\hat{z} = \omega_d \operatorname{sen}\theta'\hat{x}' + \omega_d\cos\theta'\hat{z}' \ . \tag{10.32}$$

O ângulo de oscilação do pêndulo com a vertical a partir do ponto de suporte é chamado de β', figura 10.19. Para $\beta' \ll 1\ rad$ podemos usar a aproximação de pequenas amplitudes de oscilação. Neste caso a equação de movimento gera a solução aproximada (não levando em conta por hora a força de Coriolis): $\beta' = \beta_o'\cos\omega_o t$, onde $\omega_o = \sqrt{g/\ell}$ é a frequência natural de oscilação do pêndulo e β_o' é o ângulo no qual o pêndulo foi solto do repouso. Como temos pequenas amplitudes de oscilação, o movimento do pêndulo é

[3][Cra90].
[4][Cor35].

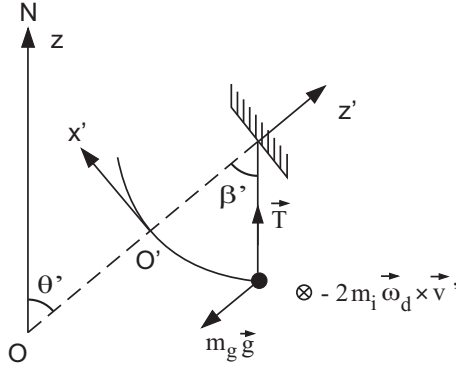



Figura 10.19: Forças reais, $m_g\vec{g}$ e $\vec{T}$, juntamente com a força fictícia de Coriolis, $-2m_i\vec{\omega}_d \times \vec{v}\,'$, atuando no pêndulo de Foucault no referencial S'.

essencialmente horizontal com $x' \approx \ell\beta'$, de tal forma que $\vec{v}\,' \approx -\dot{x}'\hat{x}' = \ell\beta_o'\omega_o \operatorname{sen}\omega_o t\hat{x}'$. A única componente da força na direção y' é dada pela força de Coriolis $-2m_i\vec{\omega}_d \times \vec{v}\,'$. Com os valores anteriores para $\vec{\omega}_d$ e $\vec{v}$ obtemos que a equação de movimento na direção y' fica na forma:

$$\ddot{y}' = -2(\omega_d \cos\theta')\ell\beta_o'\omega_o \operatorname{sen}\omega_o t \ . \tag{10.33}$$

Integrando esta equação duas vezes e utilizando que $\dot{y}'(t=0) = 0$ e $y'(t=0) = 0$ obtém-se o seguinte resultado:

$$y' = 2\omega_d \cos\theta'\ell\beta_o' \left(\frac{\operatorname{sen}\omega_o t}{\omega_o} - t \right) \ . \tag{10.34}$$

Entre $t = 0$ e $t = T/2 = \pi/\omega_o$ a massa do pêndulo moveu-se na direção y' de $\Delta y' = -2\omega_d \cos\theta'\ell\beta_o'\pi/\omega_o$. Durante este tempo o movimento na direção x' foi de $\Delta x' = 2\ell\beta_o'$, figura 10.20.

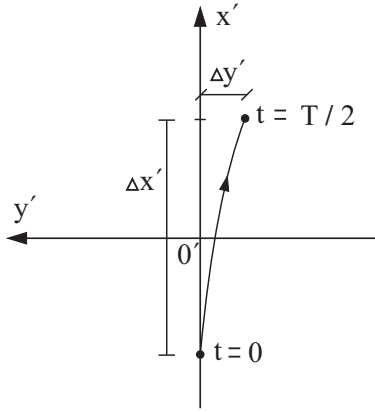



Figura 10.20: Precessão do plano de oscilação.

Isto significa que o plano de oscilação do pêndulo moveu-se por um ângulo de $\Delta y'/\Delta x' = -\pi\omega_d \cos\theta'/\omega_o$. A velocidade angular Ω_{pT} do plano de oscilação em relação ao solo é esta quantidade dividida pelo intervalo de tempo $\Delta t = T/2 - 0 = \pi/\omega_o$, a saber:

$$\Omega_{pT} = \frac{\Delta y'/\Delta x'}{\Delta t} = -\omega_d \cos\theta' = -\omega_d \cos(\pi/2 - \alpha') = -\omega_d \operatorname{sen}\alpha' = -\omega_d \operatorname{sen}\alpha \ . \tag{10.35}$$

Estas contas da precessão do plano de oscilação do pêndulo de Foucault geraram então a equação (10.35). Elas foram análogas às contas da precessão do plano de oscilação de um pêndulo carregado eletricamente na presença de um ímã que produzia um campo magnético $\vec{B}$, gerando uma velocidade angular de precessão dada por $\Omega_B = -qB/2m_i$, equação (7.47). A diferença é que neste último caso estávamos em um referencial inercial e a precessão foi devida à interação do pêndulo carregado com o ímã. Por outro lado, no pêndulo de Foucault temos um pêndulo neutro eletricamente e não encontramos o agente material (análogo ao ímã do

outro exemplo) que causou a precessão do plano de oscilação. A força de Coriolis $-2m_i\vec{\omega}_d \times \vec{v}\,'$ é chamada de fictícia pois só aparece em referenciais não inerciais que giram em relação ao espaço absoluto. Por outro lado, a força magnética $q\vec{v} \times \vec{B}$ é devida a uma interação real entre a carga q e a fonte do campo magnético (que pode ser um ímã, solenoide, casca esférica eletrizada girando, etc.). No referencial terrestre vemos o conjunto de estrelas e galáxias distantes girando ao redor do eixo Norte-Sul da Terra com um período de um dia. O eixo Norte-Sul da Terra coincide aproximadamente com o eixo ligando o centro da Terra à estrela polar Norte. Na mecânica newtoniana este conjunto de cascas esféricas girando ao redor da Terra não gera nenhuma força resultante sobre o pêndulo, esteja ele parado ou em movimento em relação à Terra, como foi visto na equação (1.21). Seria possível pensar que este conjunto de cascas esféricas compostas de estrelas e galáxias, ao girarem ao redor da Terra, gerariam uma espécie de campo magnético-gravitacional $\vec{B}_g$ que explicaria a força de Coriolis por uma interação gravitacional análoga à força magnética, isto é, com uma força do tipo $m_g\vec{v} \times \vec{B}_g$. Porém, isto não acontece na mecânica newtoniana. Veremos que existe um termo análogo ao termo $m_g\vec{v} \times \vec{B}_g$ na teoria da relatividade geral de Einstein, mas que não tem o mesmo valor que a força de Coriolis. Por outro lado, na mecânica relacional vai aparecer um termo análogo ao termo $m_g\vec{v} \times \vec{B}_g$, com o valor preciso da força de Coriolis.

10.4.3 Comparação da Rotação Cinemática com a Rotação Dinâmica da Terra

Analisamos aqui estas duas rotações da Terra. A rotação cinemática é uma rotação relativa entre a Terra e os corpos que a circundam como o Sol, as estrelas fixas, as galáxias distantes e a radiação cósmica de fundo. O período de rotação diário da Terra em relação às estrelas fixas é de 86.164 s. Este período corresponde a uma velocidade angular cinemática da Terra em relação às estrelas fixas com o valor de $\omega_c = 2\pi/T \approx 7,29 \times 10^{-5}\ rad/s$. A direção desta rotação diária da Terra é o eixo Norte-Sul geográfico terrestre (isto é, apontando aproximadamente do centro da Terra em direção à estrela polar Norte no hemisfério Norte). Esta rotação cinemática pode ser igualmente atribuída na mecânica clássica a dois motivos opostos: (I) a rotação do conjunto de corpos externos ao redor da Terra, enquanto a Terra permanece em repouso; ou (II) a um giro da Terra ao redor de seu eixo, enquanto os corpos externos permanecem essencialmente em repouso. Visualmente estas duas interpretações são equivalentes.

Uma rotação completamente diferente da Terra é obtida por seu formato achatado nos polos e pelo pêndulo de Foucault. A rotação obtida dinamicamente por estes meios é uma rotação da Terra em relação a um sistema de referência inercial. De acordo com a mecânica newtoniana, estes efeitos dinâmicos (deformação da forma esférica da Terra ou precessão do plano de oscilação do pêndulo em relação ao solo) só podem ser explicados por uma rotação da Terra em relação ao espaço absoluto ou a um referencial inercial. Estes efeitos não apareceriam se a Terra estivesse em repouso em relação ao espaço absoluto e se os corpos que a circundam (as estrelas fixas e galáxias distantes) estivessem girando na direção oposta em relação ao espaço absoluto. A rotação cinemática seria a mesma neste último caso, mas os efeitos dinâmicos não apareceriam. Veremos que E. Mach tinha um ponto de vista diferente. Para ele, se duas situações fossem cinematicamente equivalentes, elas também teriam de ser dinamicamente equivalentes. Em particular, sempre que duas situações visuais são as mesmas, os efeitos dinâmicos têm de aparecer nos dois casos. A mecânica relacional implementa esta ideia de Mach quantitativamente.

As medidas das rotações cinemática e dinâmica da Terra coincidem entre si. Isto é, a rotação determinada ao se observar as estrelas cinematicamente girando ao redor da Terra, acontece de ter o mesmo valor e direção que a rotação determinada em uma sala fechada com um pêndulo de Foucault. Na mecânica clássica isto é uma grande coincidência, não se encontrando uma explicação para este fato impressionante. Newton deu uma justificativa a este fato ao postular que as estrelas estão paradas em relação ao espaço absoluto, como visto na Subseção 1.6.3. Mas mesmo com esta suposição, continua não havendo uma relação causal entre estas duas rotações. As estrelas e galáxias não exercem qualquer influência sobre os corpos que estão deslocando-se na superfície da Terra, nem sobre a própria Terra, nem sobre o sistema solar. Em princípio elas poderiam ser aniquiladas, desaparecendo do universo, que mesmo assim a Terra continuaria achatada nos polos, o plano de oscilação do pêndulo de Foucault continuaria precessando em relação ao solo, etc.

Da mesma forma, a mecânica clássica não oferece uma explicação do motivo pelo qual $m_i = m_g$, ou seja, não há uma explicação para a proporcionalidade entre a massa inercial e a massa gravitacional de qualquer corpo. Classicamente podemos apenas dizer que a natureza acontece de ser assim, mas um entendimento mais profundo não é obtido. A massa inercial de um corpo não precisava estar relacionada com sua massa gravitacional. Ela poderia ser uma propriedade completamente independente do corpo sem qualquer relação com m_g ou com qualquer outra propriedade do corpo, seja ela elétrica, magnética, elástica, nuclear etc. Ou então ela poderia depender de uma propriedade química ou nuclear do corpo mas não de m_g, sem que

isto entrasse em conflito com qualquer lei da mecânica clássica. Apenas acontece de experimentalmente se encontrar a massa inercial de um corpo proporcional a seu peso, ou $m_i = m_g$.

Uma situação similar acontece com a igualdade entre as rotações cinemática e dinâmica da Terra. Este fato indica que o universo como um todo não gira em relação ao espaço absoluto ou em relação a qualquer sistema de referência inercial. A Terra gira diariamente ao redor de seu eixo, em relação ao pano de fundo das estrelas fixas, com um período de um dia sideral ($T = 8,6164 \times 10^4$ s), ou com uma velocidade angular $\omega = 2\pi/T = 7,29 \times 10^{-5}$ rad/s. A Terra orbita ao redor do Sol, em relação ao pano de fundo das estrelas fixas, com um período de um ano ($T = 365^{\mathrm{d}}\ 6^{\mathrm{h}}\ 9^{\mathrm{m}} = 3,156 \times 10^7$ s), ou com uma velocidade angular $\omega = 2\pi/T = 2,0 \times 10^{-7}$ rad/s. O sistema planetário orbita ao redor do centro de nossa galáxia, em relação ao pano de fundo das galáxias distantes, com um período de $2,5 \times 10^8$ $anos$, ($T = 7,9 \times 10^{15}$ s), ou com uma velocidade angular $\omega \approx 7,9 \times 10^{-16}$ rad/s. A maior parte dos corpos astronômicos do universo gira, exceto o universo como um todo. Por que o universo como um todo não gira em relação ao espaço absoluto? Não há explicação para este fato na mecânica clássica. Este é um dado observacional, mas nada na mecânica clássica obriga a natureza a se comportar assim. As leis da mecânica continuariam a valer se o universo como um todo estivesse girando em relação ao espaço absoluto. Apenas precisaríamos levar em conta este efeito ao fazer os cálculos. Esta eventual rotação do conjunto de galáxias em relação ao espaço absoluto ocasionaria um achatamento na distribuição de galáxias, similar ao achatamento dos polos da Terra devido à sua rotação diária, ou a forma essencialmente plana do sistema solar ou de nossa galáxia devida à rotação dos planetas ao redor do Sol, ou das estrelas ao redor do centro da Via Láctea.

Estas duas coincidências da mecânica clássica ($m_i = m_g$ e $\vec{\omega}_c = \vec{\omega}_d$) formam a principal base empírica que leva ao princípio de Mach.

10.5 Força Fictícia Geral

Em um sistema de referência inercial S escrevemos a segunda lei de Newton como:

$$\vec{F} = m_i \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} , \tag{10.36}$$

onde $\vec{r} = (x,\ y,\ z)$ é o vetor posição da partícula de massa inercial m_i em relação à origem O do referencial S. A força $\vec{F}$ que aparece na equação (10.36) é a força resultante atuando sobre m_i devida à sua interação com os outros corpos do universo. Ou seja, são forças reais de origem gravitacional, elétrica, magnética, nuclear, elástica, de atrito, etc.

Suponha agora que temos um sistema não inercial S' no qual representamos o vetor posição de uma partícula de massa inercial m_i por $\vec{r}\,' = (x',\ y',\ z')$. Para que a segunda lei de Newton leve a resultados corretos no sistema de referência não inercial S', ela não pode ser escrita na forma da equação (10.36). Isto é, ela não deve ser escrita na forma

$$\vec{F} = m_i \frac{d^2\vec{r}\,'}{dt^2} . \tag{10.37}$$

Para que a segunda lei de Newton leve a resultados corretos no referencial não inercial S', ela tem de ser escrita levando em conta as “forças fictícias.” Vamos representar a força resultante de todas as interações físicas de m_i com os outros corpos do universo por $\vec{F}$, e a resultante das forças fictícias por $\vec{F}_f$. A maneira correta de escrever a segunda lei de Newton em qualquer referencial não inercial S' é dada por:

$$\vec{F} + \vec{F}_f = m_i \frac{d^2\vec{r}\,'}{dt^2} . \tag{10.38}$$

Vamos supor que a origem O' do referencial S' esteja localizada por um vetor $\vec{h}$ em relação à origem O do referencial S. Temos então $\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{h}$, figura 10.21.

Vamos supor ainda que a origem de S' está se deslocando em relação à origem de S com uma velocidade translacional $d\vec{h}/dt$ e com uma aceleração translacional $d^2\vec{h}/dt^2$. Suponha ainda que os eixos $(x',\ y',\ z')$ de S' giram com uma velocidade angular $\vec{\omega}$ em relação aos eixos $(x,\ y,\ z)$ de S.

No caso geral que está sendo considerado aqui, a força fictícia é dada por:[5]

$$\vec{F}_f = -m_i\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') - 2m_i\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}\,'}{dt} - m_i\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}\,' - m_i\frac{d^2\vec{h}}{dt^2} . \tag{10.39}$$

[5][Sym82, Capítulo 7].

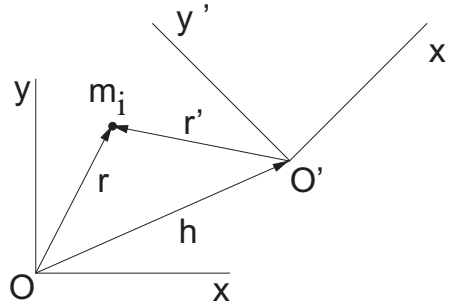



Figura 10.21: Sistema de referência inercial S e sistema de referência não inercial S'.

Combinando as equações (10.38) e (10.39) obtém-se a seguinte equação de movimento descrevendo o movimento da partícula de massa inercial m_i no referencial não inercial S':

$$\vec{F} - m_i\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') - 2m_i\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}\,'}{dt} - m_i\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}\,' - m_i\frac{d^2\vec{h}}{dt^2} = m_i\frac{d^2\vec{r}\,'}{dt^2} \ . \tag{10.40}$$

O segundo termo à esquerda da equação (10.40), $-m_i\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$, é chamado de força centrífuga. O terceiro termo à esquerda, $- 2m_i\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}\,'}{dt}$, é chamado de força de Coriolis. Já o quarto e o quinto termos não têm nomes especiais. Todas estas são "forças fictícias" na mecânica newtoniana, que só aparecem nestes referenciais não inerciais. Embora os efeitos gerados por estas forças nestes referenciais não inerciais sejam reais (achatamento da Terra, forma côncava da água na experiência do balde, precessão do plano de oscilação do pêndulo de Foucault em relação ao solo, etc.), não conseguimos encontrar uma origem física para estas forças. Isto é, não conseguimos encontrar o corpo responsável por elas nem o tipo de interação que as causa (se gravitacional, elétrica, magnética, elástica etc). Com certeza na mecânica clássica estas forças fictícias não são causadas pelas estrelas fixas ou pelas galáxias distantes, já que estas estrelas e galáxias poderiam desaparecer ou não existir (ou mesmo dobrar de número e massa) que estas forças continuariam a existir em qualquer referencial acelerado em relação ao espaço absoluto. Na mecânica clássica as estrelas fixas e as galáxias distantes não podem causar as forças fictícias devido à Proposição 70, Teorema 30 do livro I do *Principia* de Newton, discutida na Subseção 1.4.1. Estas forças só precisam ser introduzidas em referenciais não inerciais. Além disso, na mecânica newtoniana elas não são devidas a interações reais entre o corpo de prova e os outros corpos do universo. Devido a isto elas receberam o nome de forças "fictícias," apesar dos efeitos reais provocados por elas nestes referenciais não inerciais.

Parte III

Problemas com a Mecânica Newtoniana

Capítulo 11

Paradoxo Gravitacional

Discutimos aqui o paradoxo gravitacional.[1]

11.1 Newton e o Universo Infinito

As concepções cosmológicas de Isaac Newton foram analisadas claramente por E. Harrison em um artigo muito interessante.[2] Este artigo mostra que nos primeiros anos da década de 1660 Newton acreditava que o espaço se estendia infinitamente em todas as direções e era eterno em duração. O mundo material, por outro lado, era para ele de uma extensão finita. Isto é, ele ocupava um volume finito de espaço e estava envolto por um espaço infinito vazio de matéria.

Após sua completa formulação da gravitação universal na década de 1680, Newton ficou ciente de que as estrelas fixas atraíam umas às outras com uma força gravitacional. No Escólio Geral ao fim do *Principia* ele disse:[3]

> Este sistema belíssimo do Sol, planetas e cometas só pode ter surgido do conselho e domínio de um Ser inteligente e poderoso. E se as estrelas fixas são centros de outros sistemas similares, estes, sendo formados por um conselho sábio semelhante, devem estar todos sujeitos ao domínio de Alguém, especialmente porque a luz das estrelas fixas é da mesma natureza que a luz do Sol, e de cada sistema a luz passa para todos os outros sistemas. E para evitar que os sistemas das estrelas fixas caíssem um sobre o outro por suas gravidades, ele colocou estes sistemas a imensas distâncias entre si.

Contudo, esta solução de colocar as estrelas fixas muito distantes umas das outras não evita o problema de que se o universo existiu por um tempo infinito, então uma quantidade finita de matéria, ocupando um volume finito, iria finalmente colapsar para seu centro devido à atração gravitacional da matéria interior.

Em uma correspondência com o teólogo Richard Bentley (1662-1742) em 1692-1693, Newton percebeu este fato e mudou sua visão cosmológica. Isto é, ele abandonou a ideia de um universo material finito circundado por um vazio infinito e defendeu a ideia de um mundo material infinito espalhado pelo espaço infinito. Vejamos o que ele escreveu em sua primeira carta a Bentley:[4]

> Em relação à sua primeira questão, parece a mim que se a matéria de nosso Sol e planetas e toda a matéria do universo fosse espalhada uniformemente por todo o céu e toda partícula tivesse uma gravidade inata em direção a todo o restante e todo o espaço através do qual esta matéria estivesse espalhada fosse porém finito, então a matéria da parte externa deste espaço tenderia, devido a sua gravidade, em direção a toda matéria do interior e, como consequência, cairia para o meio de todo o espaço lá compondo uma grande massa esférica. Mas, se a matéria fosse distribuída uniformemente por todo um espaço infinito, ela nunca poderia se juntar em uma massa, mas parte dela se juntaria em uma massa e outra parte em outra [massa], de tal forma a formar um

[1] [Nor65, Capítulo 2 (Cosmological difficulties with the newtonian theory of gravitation), págs. 16-23], [Jam93, págs. 194-195] e [Jam10, pág. 237], [Ron85, Capítulo 8], [Jak90, Capítulo 8 (The gravitational paradox of an infinite universe), págs. 189-212], [Ass92f], [Ass93c], [Ass94, Capítulo 7, págs. 203-222] e [Cin96].

[2] [Har86].

[3] [New08b, pág. 328].

[4] [Coh78, pág. 281].

> número infinito de grandes massas, espalhadas a grande distância, umas das outras, por todo este espaço infinito. E assim poderiam ser formados o Sol e as estrelas fixas, supondo que a matéria fosse de uma natureza lúcida.

Isto é, com uma quantidade infinita de matéria distribuída mais ou menos homogeneamente por todo o espaço infinito, haveria aproximadamente a mesma quantidade de matéria em todas as direções. Com isto não haveria um centro do mundo no qual toda a matéria colapsaria.

Porém, duzentos anos depois de Newton, algumas pessoas acharam uma situação paradoxal com este modelo cosmológico. Este é o assunto das próximas Seções.

11.2 O Paradoxo Baseado na Força

Há um paradoxo simples e profundo que aparece com a lei de Newton da gravitação, em um universo infinito que contém uma quantidade infinita de matéria. A maneira mais simples de apresentar este paradoxo é a seguinte: Suponha um universo infinito sem fronteiras contendo uma distribuição homogênea de matéria. Representamos sua densidade constante e finita de massa gravitacional por ρ. Para simplificar a análise, lidamos aqui com uma distribuição contínua de matéria se estendendo uniformemente para o infinito em todas as direções. Calculamos então a força gravitacional exercida por este universo infinito em uma partícula teste com massa gravitacional m (ou massa gravitacional $dm = \rho dV$, sendo dV seu volume infinitesimal) localizada em um ponto P, ver a figura 11.1.

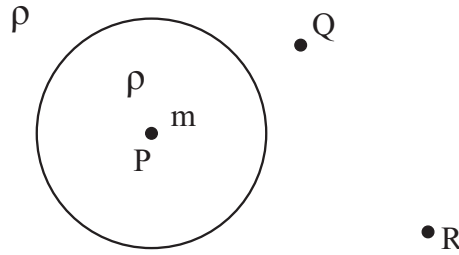



Figura 11.1: Universo infinito e homogêneo.

Se calcularmos a força com o sistema de coordenadas centrado em P, todo o universo será equivalente a uma série infinita de cascas esféricas centradas em P. Pela equação (1.15) obteremos que não vai haver força resultante atuando em m. Isto era esperado por questão de simetria.

Agora vamos calcular a força em m utilizando um sistema de coordenadas centrado em um outro ponto Q, figura 11.2.

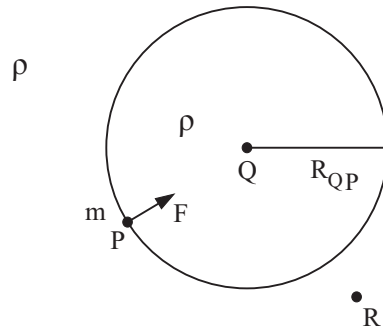



Figura 11.2: Força em m calculada a partir de Q.

Para calcular a força resultante dividimos o universo em duas partes centradas em Q. A primeira parte é uma esfera de raio R_{QP} centrada em Q e passando por P. A massa desta esfera é $M = \rho 4\pi R_{QP}^3/3$. Ela atrai a massa m com uma força dada por $GMm/R_{QP}^2 = 4\pi G\rho m R_{QP}/3$ apontando de P para Q. A segunda parte é o restante do universo. Este restante é composto de uma série de cascas esféricas externas centradas em Q contendo a partícula teste interna m. Pela equação (1.15) esta segunda parte não exerce força em

m. Isto significa que a força resultante sobre m exercida por todo o universo calculando desta maneira é proporcional à distância R_{QP} e aponta de P para Q.

Seguindo um procedimento similar mas usando um sistema de coordenadas centrado em outro ponto R, figura 11.3, obteríamos que a força resultante exercida por todo o universo sobre m seria proporcional à distância entre P e R, apontando de P para R, e com uma intensidade dada por $F = 4\pi G\rho m R_{RP}/3$.

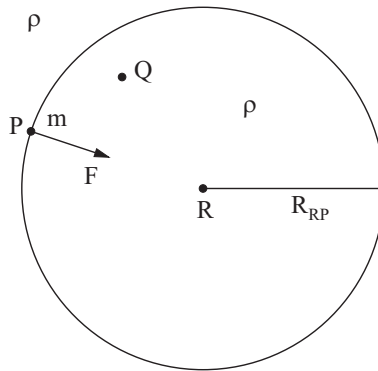



Figura 11.3: Força sobre m calculada a partir de R.

Isto significa que dependendo de como fazemos os cálculos, obtemos um resultado diferente. Certamente isto não é satisfatório.

Contudo, o problema não está com a matemática. Por exemplo, se calcularmos a força exercida por uma distribuição *finita* de matéria (ou seja, com uma quantidade finita de matéria distribuída ao longo de um volume finito) atuando sobre uma partícula teste m utilizando a lei de Newton da gravitação, o resultado será sempre o mesmo, não importando como calcularmos esta força ou onde centrarmos o sistema de coordenadas. Por exemplo, suponhamos o corpo curvo de volume finito e densidade de massa gravitacional constante ρ representado na figura 11.4. Ele está cercado por um espaço vazio infinito. Se calcularmos a força gravitacional resultante exercida por este corpo sobre uma de suas partículas de massa gravitacional m (ou de massa gravitacional $dm = \rho dV$, sendo dV seu volume infinitesimal) localizada em T, obteremos sempre uma força de mesma intensidade apontando de T para S. Ou seja, podemos fazer as contas colocando o sistema de coordenadas centrado em S, em T, em U, em V ou em qualquer outro ponto que o resultado vai ser sempre uma força de mesma grandeza apontando de T para S.

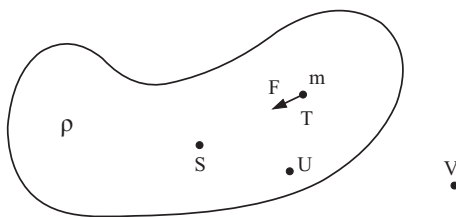



Figura 11.4: Corpo finito atraindo uma de suas partículas.

Uma outra maneira de apresentar o paradoxo é considerar a força sobre m localizado em P calculada a partir de uma origem Q, figura 11.2. Como já vimos, a força resultante sobre m aponta de P para Q e é proporcional à distância PQ. Isto significa que a força resultante sobre uma partícula material localizada em P torna-se infinita se ela está localizada a uma distância infinita de Q.

Este é o chamado paradoxo gravitacional. Ele foi descoberto por Hugo Johann Seeliger (1849-1924) e Carl Neumann (1832-1925) no final do século passado, entre 1895 e 1896.[5] Embora o tenhamos apresentado aqui utilizando uma distribuição contínua de matéria em um universo homogêneo e perfeitamente uniforme, não acreditamos que o paradoxo seria evitado considerando massas localizadas em pontos materiais distribuídos uniformemente no espaço, ao invés de espalhadas uniformemente por todo o lado de maneira contínua. Também não acreditamos que o paradoxo seria evitado levando em conta as anisotropias locais de matéria observadas no mundo.

[5] [See95], [Neu96].

11.3 O Paradoxo Baseado no Potencial

Ao invés de calcular a força, poderíamos também calcular o potencial gravitacional ou a energia potencial gravitacional.

O potencial gravitacional $\Phi(\vec{r}_o)$ em um ponto $\vec{r}_o$ devido a N massas gravitacionais m_{gj} localizadas em $\vec{r}_j$ é definido por:

$$\Phi(\vec{r}_o) \equiv -\sum_{j=1}^{N} G\frac{m_{gj}}{r_{oj}} \ , \tag{11.1}$$

onde $r_{oj} \equiv |\vec{r}_o - \vec{r}_j|$.

Utilizando a equação (11.1), calculamos agora o potencial gravitacional em um ponto $\vec{r}_o = r_o\hat{z}$ devido a uma distribuição esfericamente simétrica de matéria de raio $R > r_o$, espessura dR e massa $dM_g = 4\pi R^2 dR\rho_g$ (com ρ_g sendo a densidade volumétrica de massa gravitacional da casca), figura 11.5.

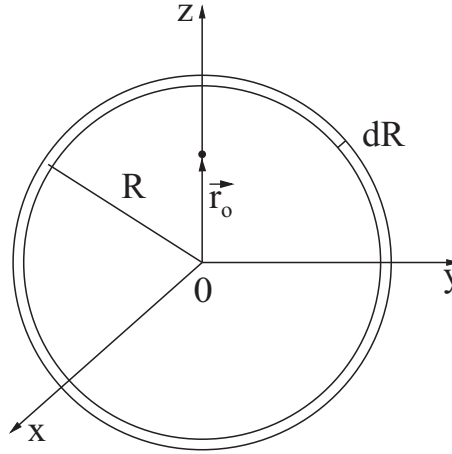



Figura 11.5: Casca esférica de raio R e espessura dR.

Substituindo a somatória por uma integral de superfície sobre toda a casca e substituindo m_{gj} por $d^3M_g = \rho_g R^2 dRd\varphi \operatorname{sen}\theta d\theta$ leva ao resultado bem conhecido dado por:

$$d\Phi(r_o < R) = -G\rho_g R^2 dR \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\theta d\theta d\varphi}{\sqrt{R^2 + r_o^2 - 2Rr_o\cos\theta}}$$

$$= -\frac{GdM_g}{R} = -4\pi G\rho_g RdR \ . \tag{11.2}$$

Isto é, a contribuição da casca é proporcional ao seu raio. Isto significa que se integrarmos a equação (11.2) de $R = 0$ (ou a partir de $R = r_o$) até o infinito, obteremos um resultado infinito. Isto foi obtido por Seeliger e Neumann.

A energia potencial gravitacional de uma partícula material m_{go} localizada em $\vec{r}_o$ interagindo com estas N massas é dada por $U = m_{go}\Phi$. Isto significa que a energia potencial gravitacional de uma partícula pontual interagindo com este universo homogêneo infinito também diverge. A força $\vec{F}_o$ sobre a partícula teste pode ser obtida como o negativo do gradiente desta energia potencial, $\vec{F}_o = -\nabla U_o$. Como a energia potencial tem um valor infinito, o valor da força $\vec{F}_o$ fica indeterminado ou indefinido.

Existe ainda uma outra maneira de apresentar o paradoxo. A equação satisfeita pelo potencial gravitacional na presença da matéria é conhecida como a equação de Poisson, obtida em 1813:

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho_g \ . \tag{11.3}$$

Podemos obter esta equação observando que $\nabla^2(1/r) = -4\pi\delta(\vec{r})$, onde $\delta(\vec{r})$ é a função delta de Dirac, usando que $\Phi = -Gm_g/r$ e utilizando que $m_g\delta(\vec{r}) = \rho_g(\vec{r})$.

Se tivermos um universo homogêneo com uma densidade de massa constante, esperaríamos obter um potencial Φ constante. Mas supondo que Φ é constante e usando a equação de Poisson, obtém-se que $\rho_g = 0$. Só que isto é contrário à suposição inicial de uma densidade constante e finita diferente de zero. Ou seja,

não há uma solução da equação de Poisson de tal forma que tanto Φ quanto ρ_g sejam constantes finitas não nulas.

11.4 Soluções do Paradoxo

Existem três maneiras principais de resolver o paradoxo. Em cada uma destas maneiras é necessário fazer uma suposição diferente, a saber: (I) O universo tem uma quantidade finita de matéria. (II) A lei de Newton da gravitação deve ser modificada. (III) Existem dois tipos de massa gravitacional no universo, positiva e negativa. Vamos analisar cada uma destas soluções nas próximas Subseções.

11.4.1 Suposição I: O Universo Tem uma Quantidade Finita de Matéria

Na primeira solução do paradoxo gravitacional, mantemos a lei de Newton da gravitação e também os constituintes do universo como usualmente conhecidos. Apenas supomos a existência de uma quantidade finita de matéria no universo para com isto evitar o paradoxo. Por exemplo, vamos supor que o universo tenha uma massa gravitacional total finita M_g distribuída uniformemente ao redor de um centro O de raio R, figura 11.6.

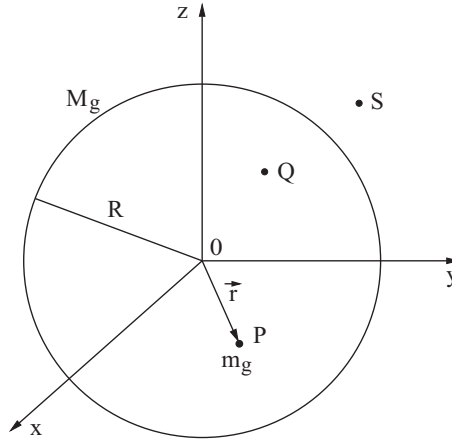



Figura 11.6: Universo com uma quantidade finita M_g de massa gravitacional.

A densidade de massa gravitacional ρ_g deste universo hipotético é uma constante dada por $\rho_g = 3M_g/(4\pi R^3)$. Seja m_g a massa gravitacional de uma partícula teste localizada no vetor posição $\vec{r}$ em relação à origem O deste universo, tal que $r < R$, com $r \equiv |\vec{r}|$. A força resultante $\vec{F}$ exercida sobre esta partícula é dada simplesmente por:

$$\vec{F} = -\frac{Gm(4\rho\pi r^3/3)}{r^2}\hat{r} = -\frac{4\pi G\rho m r}{3}\hat{r} \ . \tag{11.4}$$

Esta força sempre aponta para o centro O do universo, não interessando como fazemos os cálculos. Podemos colocar o sistema de coordenadas centrado na origem O do universo, no ponto P em que se encontra a partícula teste, ou em quaisquer outros pontos tais como Q ou S da figura 11.6, que o resultado final dos cálculos será sempre o mesmo.

Contudo, esta solução gera outros problemas. Como já vimos, Newton abandonou este modelo cosmológico do universo porque ele leva a uma situação de colapso. Isto é, a matéria externa tende a se concentrar no centro devido à atração gravitacional da matéria interna.

Para evitar este problema precisaríamos supor que o universo está girando em relação ao espaço absoluto. Para entender esta solução, podemos pensar no sistema planetário. Apesar da atração exercida pelo Sol sobre os planetas, os planetas não caem no centro do Sol devido ao movimento tangencial que possuem, já que orbitam ao redor do Sol. No caso de um movimento circular uniforme, a força centrípeta exercida pelo Sol é equilibrada por $-m_i\vec{a}$. No caso de um sistema de referência não inercial que gira junto com algum planeta ao redor do Sol, diz-se que a força gravitacional exercida pelo Sol é equilibrada por uma força centrífuga atuando sobre o planeta, como visto nas figuras 10.10 e 10.13. Mas já vimos anteriormente na Subseção 10.4.3 que o universo como um todo não gira em relação ao espaço absoluto. Esta conclusão foi obtida a

partir do fato de que o melhor sistema de referência inercial que temos é aquele no qual as galáxias distantes são vistas sem rotação como um todo. Este ponto também será discutido com dados quantitativos na Seção 13.3. Isto significa que esta solução proposta para o paradoxo gravitacional, na qual o universo como um todo estaria girando em relação ao espaço absoluto, é refutada pelas observações.

Teríamos então de postular algum tipo de força repulsiva desconhecida até o momento para evitar este colapso gravitacional de um universo com uma quantidade finita de matéria. Esta última sugestão nos leva de certa forma à segunda solução deste paradoxo gravitacional.

11.4.2 Suposição II: A Lei de Newton da Gravitação Deve Ser Modificada

A segunda solução do paradoxo foi proposta por Seeliger e C. Neumann em 1895-1896. Seeliger, em particular, propôs modificar a lei de Newton da gravitação pela seguinte expressão:[6]

$$F = -\frac{Gmm'}{r^2}e^{-\alpha r} \ . \tag{11.5}$$

Aqui α seria uma constante não nula com dimensão do inverso do comprimento.

Em vez de modificar a força gravitacional diretamente, uma outra alternativa foi proposta por C. Neumann em 1896, isto é, alterar o potencial gravitacional Φ da mecânica clássica. No caso da mecânica newtoniana o valor do potencial a uma distância r de uma massa gravitacional m_g é dado pela equação (11.1). Em vez deste potencial gravitacional, Neumann propôs a seguinte expressão:[7]

$$\Phi = -\frac{Gm_g e^{-\alpha r}}{r} \ . \tag{11.6}$$

Nesta equação α é uma constante que tem dimensão do inverso de comprimento. O inverso de α, ou seja, $1/\alpha$, fornece o intervalo típico de interação, isto é, a ordem de grandeza de até onde a gravitação é realmente efetiva. Deve ser enfatizado que este potencial foi proposto por Neumann bem antes de Yukawa (1907-1981) sugerir na década de 1930 uma lei similar descrevendo as interações nucleares.

No caso de dois corpos m_{g1} e m_{g2} interagindo entre si, separados por uma distância $r = r_{12}$, a energia potencial gravitacional entre eles é dada por

$$U = -G\frac{m_{g1}m_{g2}}{r_{12}}e^{-\alpha r_{12}} \ . \tag{11.7}$$

Daqui para a frente apresentamos nossos próprios cálculos. Utilizando que $\vec{F} = -\nabla U$, podemos obter a força exercida por m_{g2} sobre m_{g1}. Supondo α ser uma constante obtemos:

$$\vec{F} = -\nabla_1 U = -G\frac{m_{g1}m_{g2}}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}(1+\alpha r_{12})e^{-\alpha r_{12}} \ . \tag{11.8}$$

Integramos agora esta equação supondo um universo com densidade de massa gravitacional constante ρ_2. A partícula teste de massa gravitacional m_{g1} está localizada sobre o eixo z a uma distância d_1 da origem do sistema de coordenadas centrado em O, $\vec{r}_1 = d_1\hat{z}$. Consideramos um elemento de massa dm_{g2} localizado em $\vec{r}_2 = r_2\hat{r}_2$. Mais uma vez dividimos o universo em duas partes centradas em O: A primeira parte está localizada em $r_2 > d_1$, enquanto que a segunda parte está localizada em $r_2 < d_1$, figura 11.7.

Integramos agora a força gravitacional exercida por uma casca esférica de raio r_2 sobre m_{g1} utilizando coordenadas esféricas $(r_2,\ \theta_2,\ \varphi_2)$, com φ_2 indo de zero a 2π *rad* e com θ_2 indo de zero a π *rad*. Com $r_2 > d_1$ obtemos:

$$d\vec{F} = \frac{2\pi G m_{g1}\rho_2 r_2 e^{-\alpha r_2}dr_2\hat{z}}{d_1^2\alpha}\left[(1+\alpha d_1)e^{-\alpha d_1} - (1-\alpha d_1)e^{\alpha d_1}\right] \ . \tag{11.9}$$

Este resultado será diferente de zero se $d_1 \neq 0$. Isto é, uma casca esférica vai exercer uma força resultante sobre uma partícula teste interna de acordo com o potencial dado pela equação (11.6) se esta partícula não estiver no centro da casca. Há uma diferença marcante entre este resultado e aquele que havia sido obtido com a lei de Newton da gravitação, que não previa nenhuma força qualquer que fosse a posição da partícula no interior da casca esférica, como visto na Subseção 1.4.1.

No limite em que $\alpha d_1 \ll 1$ obtemos o resultado newtoniano de força nula.

Integrando a equação (11.9) de $r_2 = d_1$ até o infinito obtemos:

[6] [See95].

[7] [Neu96] e [Nor65, Cap. 2].

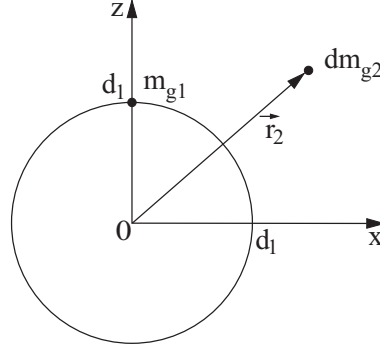



Figura 11.7: Sistema de coordenadas.

$$\vec{F} = -\frac{2\pi G m_{g1}\rho_2(1+\alpha d_1)\hat{z}}{d_1^2\alpha^3}\left[(1-\alpha d_1)-(1+\alpha d_1)e^{-2\alpha d_1}\right] . \tag{11.10}$$

Este resultado é válido para $\alpha \neq 0$ e não pode ser aplicado para $\alpha = 0$.

Calculamos agora a força sobre m_{g1} devida à segunda parte do universo localizada em $r_2 < d_1$. Primeiro calculamos a força com que uma casca esférica atrai uma partícula externa. Integrando a equação (11.8) com φ_2 indo de zero a 2π *rad* e com θ_2 indo de zero a π *rad* obtém-se, com $r_2 < d_1$:

$$d\vec{F} = \frac{2\pi G m_{g1}\rho_2(1+\alpha d_1)e^{-\alpha d_1} r_2 dr_2 \hat{z}}{d_1^2\alpha}\left(e^{-\alpha r_2}-e^{\alpha r_2}\right) . \tag{11.11}$$

No limite em que $\alpha r_2 \ll 1$ e $\alpha d_1 \ll 1$ obtemos o resultado newtoniano de que uma casca esférica atrai uma partícula externa como se toda a casca estivesse concentrada em seu centro, ou seja:

$$d\vec{F} = -\frac{4\pi r_2^2 dr_2 \rho_2 G m_{g1}\hat{z}}{d_1^2} . \tag{11.12}$$

Integrando a equação (11.11) com r_2 indo de zero a d_1 obtém-se:

$$\vec{F} = \frac{2\pi G m_{g1}\rho_2(1+\alpha d_1)\hat{z}}{d_1^2\alpha^3}\left[(1-\alpha d_1)-(1+\alpha d_1)e^{-2\alpha d_1}\right] . \tag{11.13}$$

Adicionando as equações (11.10) e (11.13) obtemos uma força resultante nula agindo sobre m_{g1} devida a todo o universo. O mesmo resultado é obtido escolhendo qualquer outro ponto como origem do sistema de coordenadas. Isto mostra que o paradoxo é resolvido com a energia potencial de Neumann, mesmo mantendo um universo homogêneo com a matéria estendendo-se ao infinito em todas as direções. Neste caso a quantidade de massa gravitacional total deste universo seria infinita, embora a densidade de massa gravitacional fosse constante e uniforme em todos os pontos.

Analisamos agora esta solução do paradoxo no que diz respeito ao potencial. A equação satisfeita pelo potencial Φ da equação (11.6) é dada por:

$$\nabla^2\Phi - \alpha^2\Phi = 4\pi G\rho_g . \tag{11.14}$$

Existe agora uma solução para esta equação com uma densidade finita e constante de massa gravitacional ρ_g gerando um potencial finito e constante dado por:

$$\Phi = -\frac{4\pi G\rho_g}{\alpha^2} . \tag{11.15}$$

Uma outra maneira de obter este resultado é integrando diretamente o potencial devido a uma casca esférica de raio r. Para este fim substituímos na equação (11.6) o valor de m_g por $d^3m_g = \rho_g \operatorname{sen}\theta d\theta r^2 dr d\varphi$. Podemos então integrar esta expressão para obter o valor do potencial na origem, sendo este potencial devido a todo o universo. Integrando a equação (11.6) obtemos o seguinte resultado:

$$\Phi = -G\rho_g\int_{r=0}^{\infty}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}(r^2\operatorname{sen}\theta dr d\theta d\varphi)\frac{e^{-\alpha r}}{r} = -\frac{4\pi G\rho_g}{\alpha^2} . \tag{11.16}$$

O mesmo resultado é obtido calculando o potencial em qualquer outro ponto $\vec{r}_o$ diferente da origem.
Tudo isto mostra a solução do paradoxo gravitacional baseada no potencial.

11.4.3 Suposição III: Existem Dois Tipos de Massa Gravitacional no Universo, Positiva e Negativa

A terceira maneira de resolver o paradoxo gravitacional é supondo a existência de massas gravitacionais negativas. O primeiro a propor esta ideia de uma massa gravitacional negativa parece ter sido August Föppl (1854-1924) em 1897.[8] Ele propôs esta ideia baseado em analogias eletromagnéticas e não estava preocupado com o paradoxo gravitacional. Chamando a massa gravitacional usual de positiva, teríamos a seguinte regra: massa positiva atrai massa positiva mas repele massa negativa, enquanto que massa negativa atrai massa negativa e repele massa positiva. Isto é exatamente o oposto ou o simétrico do que acontece com as cargas elétricas.

Se a natureza tiver esta constituição de matéria, poderíamos ter um universo com uma quantidade igual de massas positiva e negativa, no qual a lei de Newton da gravitação seria obedecida e no qual o paradoxo gravitacional não apareceria mesmo com uma quantidade infinita de massa positiva distribuída uniformemente em um universo infinito, desde que houvesse uma mesma quantidade infinita de massa negativa distribuída uniformemente em todo o universo infinito. Agora há uma solução das equações na qual ambas as massas estão igualmente distribuídas por todos os lados de tal forma que a força gravitacional resultante sobre qualquer corpo é nula na média. Há também uma solução da equação de Poisson (11.3) com um potencial Φ constante e com uma densidade líquida de massa gravitacional média nula, $\rho_g = 0$.

Podemos entender esta terceira solução mais facilmente observando que não há um paradoxo elétrico análogo ao paradoxo gravitacional. O motivo para não existir este paradoxo elétrico é que usualmente consideramos o universo como um todo como sendo eletricamente neutro. Isto é, deixando de lado as anisotropias locais, a carga negativa em uma região é compensada por uma carga positiva correspondente em algum outro lugar. Isto significa que na média não há força eletrostática sobre qualquer carga devida a todas as cargas no universo. O mesmo aconteceria com a gravitação, desde que existisse uma massa gravitacional negativa com a mesma quantidade que a positiva.

É muito fácil ver como surge o paradoxo gravitacional. De qualquer forma é impressionante que com um modelo ou situação tão simples sejamos capazes de chegar a uma conclusão tão forte, a saber: Não podemos ter um universo com uma quantidade infinita de matéria comum no qual a lei de Newton da gravitação é obedecida. Ao menos uma destas componentes tem de ser modificada: A quantidade infinita de matéria no universo, a lei de Newton da gravitação, ou a natureza dos constituintes do cosmos (ou seja, se existe ou se não existe massa gravitacional negativa).

Nosso modelo cosmológico preferido é aquele de um universo infinito e sem fronteiras no espaço, que sempre existiu sem nunca ter sido criado, e com uma quantidade infinita de matéria espalhada em todas as direções. Isto é, um universo se estendendo em todas as direções sem limites, com uma quantidade infinita de massa gravitacional total, embora com uma densidade de massa gravitacional finita na média. O modelo mais simples deste universo é aquele que possui uma distribuição homogênea de matéria em grande escala, de tal forma que qualquer ponto possa ser escolhido arbitrariamente como seu centro. Poderíamos também realizar os cálculos começando de qualquer ponto. Por este motivo não adotamos a primeira solução do paradoxo gravitacional apresentada acima. Preferimos a segunda e terceira soluções. Neste livro exploramos quantitativamente apenas a segunda solução.

11.5 Relação entre a Gravitação, a Óptica e a Cosmologia

Abrimos agora um parêntese para especular sobre uma possível relação entre a gravitação, a óptica e a cosmologia. A unidade do potencial gravitacional Φ é a unidade do quadrado da velocidade, ou seja, m^2/s^2. Uma constante fundamental da natureza é a velocidade da luz, c. É possível supor que este potencial gravitacional vindo da interação de um corpo de prova com todo o universo infinito ao seu redor seja proporcional ao valor de $-c^2$. Se este for o caso, torna-se possível obter a partir da equação (11.16) um valor para a constante α característica da interação gravitacional, a saber:

$$\Phi = -\frac{4\pi G\rho_g}{\alpha^2} = -k_0 c^2, \tag{11.17}$$

[8] [Mac60, pág. 234].

onde k_0 é uma constante adimensional que teria um valor igual a 1 ou um valor desta ordem de grandeza (tipo 0,3; 0,8; 1,3; 1,7; etc.).

Ou seja,

$$\alpha = \sqrt{\frac{4\pi G\rho_g}{k_0 c^2}} \ . \tag{11.18}$$

Podemos definir ainda uma distância d_g característica das interações gravitacionais sendo dada pelo inverso de α, a saber:

$$d_g \equiv \frac{1}{\alpha} \ . \tag{11.19}$$

Com os valores de ρ_g dados pela equação (3.37), juntamente com as equações (11.18) e (11.19), obtêm-se os seguintes limites para α e d_g ao supor $k_0 = 1$:

$$2,07 \times 10^{-27} \ m^{-1} < \alpha < 7,16 \times 10^{-27} \ m^{-1} \ , \tag{11.20}$$

e

$$1,40 \times 10^{26} \ m < d_g < 4,83 \times 10^{26} \ m \ . \tag{11.21}$$

Estes valores de d_g estão próximos dos valores estimados para a distância de Hubble $R_o \equiv c/H_o$ dados pela equação (3.34), sendo H_o é a constante de Hubble. Isto talvez não seja uma coincidência, sugerindo que d_g possa ser proporcional à distância de Hubble:

$$d_g = \frac{1}{\alpha} = k_1 R_o = k_1 \frac{c}{H_o} \ . \tag{11.22}$$

Nesta equação a constante adimensional k_1 teria então um valor igual a 1 ou desta ordem de grandeza.

Combinando as equações (11.18) e (11.22) obtém-se a seguinte relação:

$$\frac{G\rho_g}{H_o^2} = \frac{k_o}{4\pi k_1^2} \ . \tag{11.23}$$

Utilizando a equação (3.32) relacionando a velocidade da luz no vácuo com a constante de Hubble e com o raio de Hubble, $R_o \equiv c/H_o$, esta equação fica na seguinte forma:

$$\frac{G\rho_g R_o^2}{c^2} = \frac{k_o}{4\pi k_1^2} \ . \tag{11.24}$$

As equações (11.23) e (11.24) relacionam a constante G da lei de Newton da gravitação universal, a densidade média de massa gravitacional no universo, ρ_g, a constante de Hubble H_o, a velocidade da luz, c, e o raio de Hubble, R_o. No lado direito destas equações temos apenas grandezas adimensionais, sendo k_o e k_1 constantes cujos valores são dados por 1 ou por números desta ordem de grandeza. Relações análogas a estas foram obtidas ao longo do século XX por diversos autores, partindo de diferentes concepções cosmológicas.[9] No caso de Schrödinger o raio R_o não era o raio de Hubble nem estava ligado à constante de Hubble, já que o trabalho de Hubble sobre o desvio para o vermelho cosmológico surgiu apenas em 1929. Sua conclusão foi que as massas responsáveis pela inércia local dos corpos estavam muito além das dimensões conhecidas da Via Láctea.

Ao supor $k_1 = 1$ obtemos para d_g os mesmos limites dados pela equação (3.34), já que então $d_g = R_o$. Neste caso a constante α seria dada por:

$$\alpha = \frac{H_o}{c} \ . \tag{11.25}$$

Utilizando a equação (11.25) na equação (11.15) resulta em um potencial gravitacional Φ dado por (usando também a constante ρ_c definida pela equação (3.35)):

$$\Phi = -\frac{4\pi G\rho_g c^2}{H_o^2} = -\frac{3}{2}\frac{\rho_{go}}{\rho_c}c^2 \ . \tag{11.26}$$

[9] [Sch25], [XA94] e [Sch95], [Sci53], [Bro55] e [Bro82, pág. 57], [Dic59], [Fre71, Cap. 12: Inertial Forces and Noninertial Frames], [Edw74], [Eby77], [Ass89a], [Ass98, Seções 8.3 e 11.4] e [Ass99a, Seções 8.5 e 11.4].

Usando nesta equação as estimativas observacionais de que ρ_{go}/ρ_c está entre 0,1 e 0,3, equação (3.36), obtém-se:

$$-0,45c^2 < \Phi < -0,15c^2 \ . \tag{11.27}$$

Ou seja, com a equação (11.17) teríamos que $0,15 < k_0 < 0,45$. Novamente obtém-se que o valor do potencial gravitacional Φ tem a mesma ordem de grandeza que o valor negativo do quadrado da velocidade da luz no vácuo.

11.6 Absorção da Gravidade

Há outros motivos que fizeram com que várias pessoas propusessem ao longo do tempo um decaimento exponencial no potencial gravitacional de um ponto material, na energia potencial gravitacional entre duas massas pontuais, ou na força gravitacional. Estas ideias não estão relacionadas diretamente com o paradoxo gravitacional mas algumas vezes a modificação proposta é ao longo das mesmas linhas. Fizemos uma análise detalhada destes motivos, indicando as principais referências, em diversos trabalhos.[10]

A luz fluindo de uma fonte é absorvida pelo meio onde se propaga, de tal forma que sua potência a partir da fonte varia da seguinte forma: $e^{-\alpha r}/r^2$. As pessoas que supõem que a gravitação se propaga (através de ondas gravitacionais, de grávitons, ou de qualquer outra coisa) a partir de uma fonte, de maneira similar ao que acontece com a luz, foram levadas por analogia com a óptica a propor um decaimento exponencial na gravitação.

No caso de duas cargas pontuais q_1 e q_2 em repouso entre si, separadas por uma distância r, a força exercida por q_1 sobre q_2 é dada por $q_1q_2/4\pi\varepsilon_o r^2$. Quando colocamos um meio dielétrico ou condutor entre estas duas cargas pontuais, este meio é afetado por estas cargas e se polariza. Um dos efeitos desta polarização do meio dielétrico ou condutor, é modificar a força resultante atuando em q_2, quando comparada com a situação na qual não havia nenhum meio material entre elas. Neste caso não precisamos falar de uma propagação da força elétrica e a situação pode ser descrita por uma interação simultânea e a distância entre muitos corpos (ou seja, além da força de q_1 sobre q_2, tem de ser levada em conta a força sobre q_2 exercida pelas cargas do meio material polarizado que está entre elas). Apesar deste fato, se assumirmos uma analogia entre eletromagnetismo e a gravitação, podemos suspeitar de alguma influência do meio entre dois corpos em relação à força gravitacional resultante em qualquer um deles. Ou seja, novamente podemos ser levados a um decaimento exponencial, embora neste caso não haja nada se propagando. A única coisa que acontece aqui é que uma interação a distância entre muitos corpos pode ter este comportamento exponencial com a distância.

Observações astronômicas como as curvas de rotação planas das galáxias espirais também fizeram com que vários autores propusessem modificações na lei de Newton da gravitação, ao invés de postular matéria escura. Este assunto está bem tratado com diversas discussões detalhadas nos trabalhos de Rubin, Ford e Thonnard.[11] Toda esta problemática da curva de rotação plana das galáxias pode ser entendida de maneira simples. Vamos supor uma interação gravitacional entre um grande corpo de massa M e um pequeno corpo de massa $m \ll M$ descrevendo uma órbita circular ao redor de M (estamos supondo um referencial inercial). Utilizando a lei de Newton da gravitação universal, sua segunda lei de movimento e a expressão da aceleração centrípeta, juntamente com $m_i = m_g \equiv m$, obtém-se:

$$\frac{GMm}{r^2} = ma = m\frac{v^2}{r} = m\omega^2 r \ . \tag{11.28}$$

Aqui r é a distância entre eles, v é o módulo da velocidade tangencial da partícula, $a = v^2/r$ é o módulo de sua aceleração centrípeta e $\omega = v/r$ é sua velocidade angular ao redor de M. Desta expressão obtém-se que a velocidade tangencial de m ao redor de M é dada por:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \frac{K}{\sqrt{r}} \ , \tag{11.29}$$

onde $K \equiv \sqrt{GM}$ é uma constante. A velocidade angular de m é dada por: $\omega = \sqrt{GM/r^3}$. Ou seja, quanto maior for a distância entre m e M, menor vai ser a velocidade de m. Esta previsão é perfeitamente

[10] [Ass92f], [Ass93c] e [Ass94, Seções 7.5 a 7.7]. Ver ainda [Mar86].
[11] [RFT82] e [Rub83].

corroborada no caso do sistema planetário, sendo M o Sol e m qualquer um dos planetas do sistema solar (estas relações de v e de ω em função de r são outras maneiras de se falar das leis de Kepler).

Por outro lado, o mesmo já não acontece com as galáxias. Isto é, seja m uma estrela pertencente a uma galáxia que esteja distante de seu núcleo, e M a massa do núcleo desta galáxia (determinada a partir da matéria visível ou incandescente da galáxia). Também neste caso a mecânica newtoniana prevê que a relação da velocidade tangencial v da estrela orbitando ao redor do núcleo da galáxia seja dada pela equação (11.29). Contudo, as observações indicam que em praticamente todas as galáxias a velocidade tangencial v das estrelas afastadas dos núcleos galácticos fica aproximadamente constante na medida em que r aumenta, ao invés de cair com $1/\sqrt{r}$ como seria de se esperar com a mecânica newtoniana. Esta é a chamada "curva de rotação plana das galáxias."

Para resolver este problema há duas tentativas principais.

(I) Uma primeira tentativa é supor que existe uma matéria escura (ainda não observada) que poderia interagir gravitacionalmente com as estrelas. Ela é chamada de matéria escura pois não foi observada no espectro visível, de infravermelho, de ultravioleta, de rádio, de raios gama, etc. Apesar disto, as pessoas que trabalham com esta solução supõem que este tipo de matéria poderia existir e que exerceria forças gravitacionais usuais. A partir das curvas de rotação planas observadas pode-se estimar a distribuição desta matéria escura em relação ao centro da galáxia, supondo a validade das leis de Newton.

(II) Uma outra tentativa de solução deste problema é supor que praticamente toda a matéria existente é aquela já detectada observacionalmente (afinal de contas a matéria escura ainda não foi observada em nenhum intervalo de frequências). Então, para explicar as curvas de rotação planas observadas, torna-se necessário supor alguma modificação na mecânica newtoniana para distâncias da ordem de 10^{20} m, que é o tamanho típico de uma galáxia. Pode-se tentar alterar tanto a componente $m_i a$ da segunda lei de Newton ($F = m_i a$), tal como na teoria MOND,[12] quanto a força gravitacional newtoniana GmM/r^2. Neste último caso algumas tentativas que foram feitas com relativo sucesso envolveram um decaimento exponencial na gravitação.[13] Um modelo alternativo está bem desenvolvido nos trabalhos de Soares.[14]

Já foram feitas experiências tentando detectar a existência de modificações na lei de Newton da gravitação. Algumas destas experiências encontraram resultados positivos, como as experiências de Majorana, e deveriam ser repetidas. Já discutimos estes assuntos nas referências listadas anteriormente e por este motivo não vamos entrar em detalhes aqui. O que deve ser enfatizado é que a lei de Newton da gravitação ou qualquer outra expressão pode ser aproximadamente válida em algumas condições, embora possa ser necessário modificá-la quando estas condições não são satisfeitas. Também pode ocorrer que a lei de Newton da gravitação possua certos limites de validade, de tal forma que seja necessário modificá-la fora de seus limites de validade. Tanto as observações astronômicas quanto as experiências de laboratório podem nos indicar quais são os limites de validade das leis de Newton (ou de qualquer outra teoria). É importante manter a mente aberta em relação a isto.

---

[12] [Mil83a] e [Mil83b].
[13] [San84], [San86] e [San90].
[14] [Soa92] e [Soa94].

Capítulo 12

Leibniz e Berkeley

Antes de apresentar as críticas que E. Mach fez à mecânica newtoniana, discutimos os pontos de vista de G. W. Leibniz e do bispo G. Berkeley sobre o movimento absoluto e relativo. Estes filósofos anteciparam muitos pontos de vista que depois foram defendidos por Mach.

12.1 Leibniz e o Movimento Relativo

Leibniz (1646-1716) foi introduzido à ciência moderna de seu tempo por C. Huygens. Eles estiveram em grande contato durante a estadia de Leibniz em Paris, no período entre 1672 e 1676. Huygens pode ter influenciado a Leibniz sobre suas concepções de tempo, espaço e sobre o significado da força centrífuga, termo cunhado por Huygens. Para um estudo detalhado das reações de Huygens à gravitação newtoniana e sobre seus pontos de vista em relação ao movimento absoluto, ver os trabalhos de Jammer e Martins.[1]

Leibniz nunca aceitou os conceitos newtonianos de espaço e tempo absolutos. Ao invés disto, ele mantinha que o espaço e o tempo dependem das coisas materiais, sendo o espaço a ordem dos fenômenos coexistentes e o tempo a ordem dos fenômenos sucessivos. Há uma correspondência muito interessante entre Leibniz e S. Clarke (1675-1729), um discípulo de Newton, que transcorreu durante os anos de 1715 e 1716. Leibniz escreveu em francês e Clarke em inglês. Esta correspondência esclarece vários pontos importantes deste assunto.[2] No quarto parágrafo de sua terceira carta para Clarke, Leibniz afirmou:[3]

> 4. Quanto a mim, deixei assentado mais de uma vez que, a meu ver, o espaço é algo puramente relativo, como o tempo; a saber, na ordem das coexistências, como o tempo na ordem das sucessões. De fato, o espaço assinala em termos de possibilidade uma ordem das coisas que existem ao mesmo tempo, enquanto existem junto, sem entrar em seu modo de existir. E quando se veem muitas coisas junto, percebe-se essa ordem das coisas entre si.

Leibniz defendia a ideia de que todo movimento é relativo. Apesar deste fato ele admitiu que pode ser mais prático ou conveniente dizer que algum corpo muito grande como a Terra está em repouso enquanto um corpo pequeno se move em relação a ela, do que dizer o contrário. Também pode ser mais prático ou mais conveniente dizer que os planetas se movem em relação às estrelas fixas, do que dizer o oposto. Mas isto é mais uma questão de convenção do que de realidade física. Por exemplo, em um texto escrito em 1689 intitulado *Sobre o copernicanismo e a relatividade do movimento*, Leibniz afirmou o seguinte:[4]

> Como já provamos por considerações geométricas a equivalência de todas as hipóteses com respeito aos movimentos de quaisquer corpos que sejam, não importando quão numerosos, movidos apenas por colisões com outros corpos, segue-se que nem mesmo um anjo pode determinar com rigor matemático qual dentre os muitos corpos deste tipo está em repouso e qual [corpo] é o centro do movimento dos outros. E se os corpos estão se movendo livremente ou colidindo uns com os outros, é uma lei notável da natureza que nenhum olho, qualquer que seja o lugar da matéria

[1] [Jam93, págs. 119-126] e [Jam10, págs. 156-163], [Mar89] e [Mar93].

[2] A tradução para a língua portuguesa se encontra em [Lei83], de onde tiramos as citações. Uma tradução para a língua inglesa encontra-se em [Ale84]. Uma discussão detalhada encontra-se nos comentários de Alexander relativos à correspondência, assim como no trabalho Koyré, [Ale84] e [Koy86, Capítulo 11].

[3] [Lei83, pág. 177].

[4] [Lei89, págs. 90-92].

> em que ele esteja colocado, tem um critério seguro para dizer a partir dos fenômenos onde há movimento, quanto movimento existe, *ou se ele move este mesmo olho ele mesmo.* [cf. Seneca, *Naturales Quaestiones* VII. 2.] Resumindo meu ponto de vista, como o espaço sem matéria é algo imaginário, o movimento, com todo o rigor matemático, não é nada além de uma mudança nas posições [*situs*] dos corpos uns em relação aos outros e, assim, o movimento não é algo absoluto, mas consiste em uma relação. [...]
>
> Mas como, contudo, as pessoas atribuem movimento e repouso aos corpos, mesmo para corpos que elas acreditam não ser movidos nem por uma mente [*intelligentia*], nem por um impulso interno [*instinctus*], temos de examinar o sentido no qual elas fazem isto, de tal forma que não julguemos que elas tenham falado falsamente. E neste assunto temos de responder que devemos escolher a hipótese mais inteligível e que a verdade de uma hipótese não é nada além de sua inteligibilidade. Agora, de um ponto de vista diferente, não com respeito às pessoas e suas opiniões, mas com respeito às próprias coisas com que devemos tratar, uma hipótese pode ser mais inteligível do que uma outra e mais apropriada para um dado propósito. E assim, a partir de pontos de vista diferentes, uma pode ser verdadeira e outra falsa. Logo, para uma hipótese ser verdadeira basta que ela seja usada apropriadamente. Assim, embora um pintor possa representar o mesmo palácio através de desenhos em diferentes perspectivas, julgaríamos que ele fez a escolha errada se ele apresentar aquele [desenho] que cobre ou esconde partes que são importantes saber pelo assunto em questão. Da mesma forma, um astrônomo não comete um erro maior ao explicar a teoria dos planetas de acordo com a hipótese tychonica do que ele cometeria ao usar a hipótese copernicana para ensinar a astronomia esférica e para explicar o dia e a noite, sobrecarregando desta maneira o estudante com dificuldades desnecessárias. E o astrônomo observacional [*Historicus*] que insiste em que a Terra se move, ao invés do Sol, ou que a Terra ao invés do Sol está no signo de Áries, falaria inapropriadamente, embora ele siga o sistema copernicano; nem teria Josué falado menos falsamente (isto é, menos absurdamente) se ele tivesse dito "Terra, detém-te."

Isto é, o sistema astronômico geocêntrico híbrido de Tycho Brahe pode ser "mais apropriado para um dado propósito" do que o sistema heliocêntrico de Copérnico, enquanto que o sistema de Copérnico pode ser mais apropriado para um outro fim do que o sistema de Tycho Brahe. Leibniz continuou o texto afirmando que o sistema geocêntrico ptolomaico era o mais verdadeiro na astronomia esférica (isto é, mais inteligível), enquanto que a explicação copernicana era a teoria mais verdadeira (isto é, mais inteligível) ao explicar a teoria dos planetas.

Ele expressou o mesmo ponto de vista em seu trabalho de 1695 intitulado *Um Exemplar de Dinâmica* [Specimen Dynamicum]. Na passagem seguinte do manuscrito original, que foi suprimida antes da publicação, ele disse:[5]

> Também compreendi a natureza do movimento. Além do mais, também percebi que o espaço não é algo absoluto ou real e que ele nem sofre mudança nem podemos conceber o movimento absoluto, mas que toda a natureza do movimento é relativa, de tal forma que dos fenômenos não podemos determinar com rigor matemático o que está em repouso, ou com que quantidade de movimento algum corpo se move. Isto vale mesmo para o movimento circular, embora não parecesse assim para Isaac Newton, aquele cavalheiro distinto que é, talvez, a maior joia que a Inglaterra culta jamais teve. Embora ele tenha dito muitas coisas esplêndidas sobre o movimento, ele pensou que, com a ajuda do movimento circular, podia discernir qual matéria contém movimento a partir da força centrífuga, coisa com a qual não posso concordar. Mas mesmo se não houver maneira matemática de determinar a hipótese verdadeira, contudo podemos, com boas razões, atribuir movimento verdadeiro à matéria com a qual resultaria a hipótese mais simples para explicar os fenômenos. Em relação ao restante, basta para nós por questões práticas investigar não tanto o sujeito do movimento quanto as mudanças relativas das coisas, umas em relação às outras, já que não há ponto fixo no universo.

Na segunda parte deste trabalho ele disse:[6]

> Temos de perceber, acima de tudo, que força é algo absolutamente real nas substâncias, mesmos nas substâncias criadas, enquanto que espaço, tempo e movimento são, até um certo ponto, seres

[5] [Lei89, pág. 125].
[6] [Lei89, págs. 130-131].

> da razão [do intelecto] e que são verdadeiros ou reais, não por si mesmos [*per se*], mas apenas até o ponto que eles envolvem ou atributos divinos (imensidão, eternidade, a habilidade de realizar trabalho), ou a força nas substâncias criadas. Disto segue imediatamente que não há lugar vazio e [não há] momento de tempo vazio. Além do mais, segue que movimento considerado separadamente da força, isto é, o movimento considerado até o ponto em que contém apenas noções geométricas (tamanho, forma e suas mudanças), não é realmente nada além da mudança de situação e, além isto, *no que diz respeito aos fenômenos, movimento é uma relação pura*, algo que Descartes também reconheceu ao definir movimento como uma translação das vizinhanças de um corpo para as vizinhanças de outro. Mas ao tirar consequências disto, ele esqueceu sua definição e estabeleceu as leis do movimento como se o movimento fosse algo real e absoluto. Portanto, temos de considerar que quaisquer que sejam as maneiras como muitos corpos possam estar em movimento, não podemos inferir a partir dos fenômenos quais deles têm realmente movimento absoluto e determinado, ou [estão em] repouso. Ao invés disto, podemos atribuir o repouso a qualquer um deles que escolhermos e ainda assim resultarão os mesmos fenômenos. [...] E na verdade, isto é exatamente o que experienciamos, pois sentiríamos a mesma dor se batemos nossa mão contra uma pedra em repouso, suspensa, se quiser, por um fio, ou se a pedra batesse contra nossa mão em repouso com a mesma velocidade. Contudo, falamos como requer a situação, de acordo com a explicação mais apropriada e mais simples dos fenômenos. É exatamente neste sentido que usamos a noção do *primum mobile* na astronomia esférica, enquanto que no estudo teórico dos planetas temos de usar a hipótese copernicana. Como uma consequência imediata deste ponto de vista, aquelas disputas realizadas com tanto entusiasmo, disputas nas quais mesmo os teólogos estiveram envolvidos, desaparecem completamente. Embora força seja algo real e absoluto, o movimento pertence aos fenômenos e às relações e temos de procurar a verdade não tanto nos fenômenos quanto em suas causas.

Veremos depois que também Mach defendeu a ideia de que os sistemas copernicano e ptolomaico eram igualmente válidos e corretos. A única diferença é que o sistema copernicano seria mais econômico ou prático.

12.1.1 Leibniz e a Experiência do Balde

Mas quais explicações Leibniz ofereceu para as experiências chaves de Newton, a saber, as experiências do balde girante e dos dois globos presos por uma corda?

Em uma carta escrita a Huygens em 1694 ele disse:[7]

> Quanto à diferença entre movimento absoluto e relativo, creio que se o movimento, ou melhor a força motriz nos corpos, é algo real, como parece que temos de reconhecer, ela precisaria de ter um *sujeito* [*subjectum*]. Pois, se a e b se aproximam, afirmo que todos os fenômenos seriam os mesmos, não interessando qual deles se assume em movimento ou em repouso; e se houvessem 1.000 corpos, concordo que os fenômenos não podem nos fornecer (nem mesmo aos anjos) motivos [*raison*] infalíveis para determinar o sujeito do movimento ou seu grau [sua quantidade] e que cada corpo pode ser concebido separadamente como estando em repouso. Creio que isto é tudo que você perguntou. Mas você não negaria (creio) que é verdade que cada um deles tem uma certa quantidade de movimento, ou, se preferir, uma certa quantidade de força, apesar da equivalência das hipóteses. É verdade que derivo disto a consequência de que existe alguma coisa a mais na natureza do que aquilo que é determinado pela geometria. E isto não está entre os menos importantes dentre os diversos motivos que uso para provar que, além da extensão e de suas variações, que são coisas puramente geométricas, temos de reconhecer alguma coisa maior, a saber, força. Newton reconheceu a equivalência das hipóteses no caso de movimento retilíneo; mas ele acredita que, em relação aos movimentos circulares, o esforço exercido pelos corpos que circulam para mover-se para fora do centro ou do eixo de circulação nos permite reconhecer seus movimentos absolutos. Mas tenho motivos que me levam a crer que não há exceções para a lei geral de equivalência. Parece-me, contudo, que uma vez você foi da mesma opinião de Newton no que diz respeito ao movimento circular.

Ao mesmo tempo em que defendia uma teoria relacional de espaço e tempo, Leibniz parece ter dado algum valor absoluto ou real para a força ou para a energia cinética. Isto é de certa forma contraditório.

[7] [Lei89, pág. 308].

Ele também não explicitou claramente quais eram suas razões para acreditar que não haveria exceções para a lei geral de equivalência. Ou seja, não explicou os motivos pelos quais acreditava que a teoria relacional seria sempre válida, sem exceções.

Isto é o que ele afirmou nos parágrafos 52 e 53 de sua quinta carta a Clarke:[8]

> 52. Para provar que o espaço, sem os corpos, é uma realidade absoluta, tinham-me objetado que o universo material finito poderia andar no espaço. Respondi que não parece razoável que o universo material seja finito, e, ainda que o supuséssemos, seria irracional que fosse dotado de movimento, o que não se dá na hipótese de mudarem suas partes de situação entre si, porque o primeiro, o movimento, não produziria nenhuma mudança observável, e seria sem finalidade. Outra coisa é quando as suas partes mudam de situação entre si, porque então se reconhece um movimento no espaço, mas consistindo na ordem das relações, que mudaram. Replica-se, agora, que a verdade do movimento é independente da observação, e que um navio pode andar sem que aquele que está dentro perceba. Respondo que o movimento é independente da observação, mas não da observabilidade. Não há movimento, quando não existe mudança observável. E mesmo quando não há mudança observável, não há mudança de modo algum. O contrário funda-se na suposição de um espaço real absoluto, que refutei demonstrativamente pelo princípio da necessidade de uma razão suficiente das coisas.
>
> 53. Não encontro nada na oitava definição dos *Princípios Matemáticos da Natureza* [*Principia*], nem no escólio dessa definição, que prove que se possa demonstrar a realidade do espaço em si. Contudo, concedo que há diferença entre um verdadeiro movimento absoluto de um corpo, e uma simples mudança relativa da situação relativamente a um outro corpo. Com efeito, quando a causa imediata da mudança está no corpo, este está verdadeiramente em movimento, e nesse caso a situação dos outros, com relação a ele, estará, por consequência, mudada, ainda que a causa desta mudança não resida neles. É verdade que, falando com exatidão, não há corpo que esteja perfeita e inteiramente em repouso; mas é disso que se faz abstração ao considerar a coisa matematicamente. Assim não deixei nada sem resposta, de tudo quanto alegaram a favor da realidade absoluta do espaço. E demonstrei a falsidade dessa realidade, por um princípio fundamental dos mais razoáveis e mais provados, contra o qual não se poderia achar nenhuma exceção ou reparo. De resto, pode-se ver, por tudo o que acabo de dizer, que não devo admitir um universo móvel, nem lugar algum fora do universo material.

Concordamos com H. G. Alexander quando, ao analisar esta parte da carta, afirmou que:[9]

> [...] não há dúvida, contudo, que esta admissão da distinção entre movimento absoluto e relativo é inconsistente com sua [de Leibniz] teoria geral do espaço.

Isto é, Lebniz se deixou levar pelos argumentos de Newton relacionados com as experiências do balde e dos dois globos. Tacitamente Leibniz está admitindo que de fato existe o movimento absoluto, contrariamente às suas crenças. Uma maneira de sair desta contradição seria manter que estes efeitos (a forma côncava da superfície da água na experiência do balde ou a tensão na corda no caso dos dois globos) eram devidos a uma rotação *relativa* entre corpos materiais. Por exemplo, no caso da experiência do balde, Leibniz poderia ter defendido que a forma côncava da superfície da água surgiria apenas quando houvesse uma rotação relativa entre a água e a Terra (ou entre a água e as estrelas fixas), não importando qual deles estivesse de fato girando em relação ao espaço vazio. Já no caso da experiência dos dois globos presos por uma corda, Leibniz também poderia ter defendido que a tensão na corda surgiria apenas quando houvesse uma rotação relativa entre os dois globos e o conjunto das estrelas fixas. Ou seja, poderia dizer que estes efeitos surgiriam não apenas quando a água e os globos girassem em relação às estrelas, mas que eles também surgiriam quando a água e os globos estivessem em repouso (em relação ao observador ou em relação à Terra), enquanto que as estrelas estivessem girando ao contrário em relação a eles, com a mesma velocidade angular entre eles. Se Leibniz tivesse visto claramente esta possibilidade, poderia ter sustentado que mesmo estas experiências não provariam a existência do espaço ou movimento absolutos. Também poderia sustentar que a água não precisaria estar verdadeiramente ou absolutamente em movimento giratório quando sua superfície estivesse côncava, já que se poderia igualmente dizer que esta concavidade seria devida à rotação oposta do conjunto das estrelas fixas ao redor do eixo do balde, estando a água em repouso.

[8] [Lei83, pág. 204].
[9] [Ale84, pág. xxvii].

Mas Leibniz não mencionou explicitamente esta possibilidade. Neste sentido ele não soube dar uma resposta clara aos argumentos newtonianos utilizando sua teoria relacional do movimento. Por este motivo também concordamos com Erlichson quando este afirmou:[10]

> Na minha opinião Leibniz nunca respondeu realmente a Clarke e a Newton sobre a experiência do balde ou sobre os outros exemplos que eles deram para mostrar os efeitos dinâmicos do movimento absoluto.

12.1.2 Qual Seria o Formato da Terra se Todos os Outros Corpos Astronômicos Desaparecessem?

Em ao menos um ponto na correspondência, Clarke viu melhor do que Leibniz as consequências de uma teoria completamente relacional do movimento no que diz respeito à origem da força centrífuga. Na sua quinta réplica a Leibniz, Clarke disse:[11]

> Afirma-se [por Leibniz] que o movimento encerra necessariamente uma mudança relativa de situação num corpo com relação a outros corpos, e entretanto não se fornece nenhum meio para evitar esta consequência absurda, como seja, que a mobilidade de um corpo depende da existência de outros [corpos], de modo que, se um corpo existisse sozinho, seria incapaz de movimento, ou que as partes de um corpo que circula (ao redor do Sol, p. ex.) perderiam a força centrífuga que nasce de seu movimento circular, se toda a matéria exterior que as cerca fosse aniquilada.

A expressão original em inglês no final desta frase é: "[...] or that the parts of a circulating body, (suppose the sun,) would lose [...]" Uma tradução alternativa desta citação de Clarke é a que aparece no livro de Koyrè traduzido para a língua portuguesa:[12]

> Afirma-se que o movimento implica necessariamente uma mudança relativa de situação em um corpo, com relação aos outros corpos. Contudo, não se mostra nenhum meio de se evitar esta consequência absurda, ou seja, a de que a mobilidade de um corpo depende da existência de outros corpos; e de que se um corpo existisse sozinho, seria incapaz de movimento; ou de que as partes de um corpo girante (suponhamos o Sol) perderiam a *vis centrifuga* que nasce de seu movimento circular se toda a matéria extrínseca em torno delas fosse aniquilada.

Infelizmente Leibniz não respondeu a esta última réplica que foi transmitida a ele em 29 de outubro de 1716, sendo que ele morreu em 14 de novembro do mesmo ano.

De qualquer forma, estas consequências que Clarke chamou de "absurdas" representam partes importantes de qualquer teoria relacional do movimento. Se seguirmos completamente uma teoria relacional do movimento, veremos que não há sentido na afirmação de que um corpo isolado se move em relação ao espaço vazio, apenas poderemos afirmar que ele se move em relação a outros corpos. Assim, o movimento de um corpo depende da existência de outros corpos. Muito mais importante do que isto é a consequência apontada por Clarke de que a força centrífuga desapareceria se os corpos externos fossem aniquilados. Isto é, a Terra deixaria de ser achatada nos polos, um planeta não poderia orbitar ao redor do Sol pois não haveria nada para se contrapor à atração gravitacional entre eles e então o sistema solar colapsaria, a água que gira junto com o balde em relação à Terra não ficaria com um formato parabólico (a água não teria subido pelas paredes e abaixado ao longo do eixo de rotação), etc.

Veremos no Capítulo 13 que Mach defendeu a ideia de que as forças centrífugas dependem da rotação *relativa* entre o corpo de prova e os corpos astronômicos ao seu redor. Logo, se um corpo estiver sozinho no universo, não se pode dizer que ele gira em relação a algo material. Consequentemente, todos os efeitos centrífugos normalmente observados nos corpos em rotação deveriam desaparecer nesta situação hipotética na qual um corpo está sozinho no universo. Além de Clarke e Mach, quem apontou esta consequência claramente foi Carl Neumann em 1870:[13]

> Este parece ser o lugar apropriado para uma observação que se apresenta para nós e da qual segue claramente quão insuportáveis [*unerträglich*] são as contradições [*Widersprüche*] que surgem ao se conceber o movimento como algo relativo em vez de concebê-lo como algo absoluto.

[10] [Erl67].
[11] [Lei83, parágrafos 26 a 32, págs. 220-221].
[12] [Koy86, págs. 250-251].
[13] [Neu70, pág. 27, nota 8] e [Neu93].

> Vamos assumir que entre as estrelas existe uma delas que é composta de uma matéria *fluida* e que seja de certa forma similar ao nosso globo terrestre e que ela esteja girando ao redor de um eixo que passa por seu centro. Como resultado de tal movimento, e devido às forças centrífugas resultantes, esta estrela assumiria o formato de um elipsoide achatado. Podemos então perguntar: *Qual seria o formato desta estrela se todos os outros corpos celestes fossem repentinamente aniquilados (transformados no vazio)?*
>
> Estas forças centrífugas dependem apenas do estado da própria estrela; elas são totalmente independentes dos outros corpos celestes. Consequentemente, esta é nossa resposta: Estas forças centrífugas e a forma elipsoidal que depende destas forças vão *continuar existindo* independentemente se os outros corpos celestes continuam a existir ou se desaparecem repentinamente.
>
> Contudo, podemos considerar a questão a partir de um outro ponto de vista, chegando por este meio a uma resposta contrária, caso se defina o movimento como sendo algo meramente *relativo*, ou seja, meramente como a mudança *relativa* de lugar de dois pontos entre si. Vamos imaginar que todos os outros corpos celestes tivessem sido eliminados, de tal forma que os únicos pontos de matéria existindo atualmente no universo fossem aqueles que constituem a própria estrela. Contudo, estes pontos *não* mudam seus lugares relativos entre si e, de acordo com a definição que está sendo aceita neste momento, estão em *repouso*. Consequentemente, esta é agora a nossa resposta, a estrela estará em um estado de repouso a partir do momento em que todos os outros corpos celestes forem aniquilados e, portanto, vai assumir o formato de uma *esfera*, que é o formato apropriado a este estado.
>
> Uma tal contradição intolerável [*unleidlicher Widerspruch*] só pode ser evitada abandonando a definição de movimento como sendo algo *relativo*, ou seja, apenas se o movimento de um ponto material for concebido como sendo algo *absoluto*; de onde somos levados ao princípio do Corpo Alfa.

O ponto de vista newtoniano no qual o movimento é concebido como algo absoluto em relação ao espaço absoluto está representado na figura 12.1. Na figura 12.1 (a) temos o formato achatado da Terra que ocorre quando ela tem uma rotação diária ao redor de seu eixo em relação às estrelas e galáxias. Embora Clarke e Neumann não conhecessem a existência das galáxias, estamos incluindo-as nestas figuras para deixá-las de acordo com o conhecimento atual. Na figura 12.1 (b) apresenta-se a previsão sobre o que aconteceria com o formato da Terra nesta experiência do pensamento, de acordo com a mecânica newtoniana e com os pontos de vista de Clarke e Neumann, caso todos os outros corpos astronômicos fossem aniquilados do universo. Ainda assim seria possível pensar na Terra como girando diariamente em relação ao espaço vazio e ela manteria seu formato achatado.

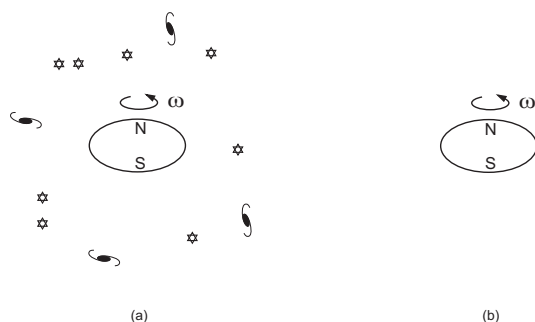



Figura 12.1: Movimento concebido como algo absoluto em relação ao espaço vazio. O referencial do papel coincide com o espaço absoluto. (a) Terra achatada nos polos quando gira diariamente em relação às galáxias e estrelas. (b) De acordo com o ponto de vista absoluto, o mesmo achatamento vai continuar a existir mesmo se não houverem estrelas e galáxias.

Na figura 12.2 temos em (a) a situação real observada na natureza. Já em (b) temos a previsão desta experiência do pensamento ao considerar o movimento como sendo relativo, ou seja, ao conceber o movimento como sendo a mudança de posição ou de orientação de um corpo em relação a um outro corpo. Se a Terra estiver sozinha no universo, não faz sentido dizer que ela gira em relação a alguma coisa. Logo, seu achatamento deve deixar de existir nessa situação hipotética.

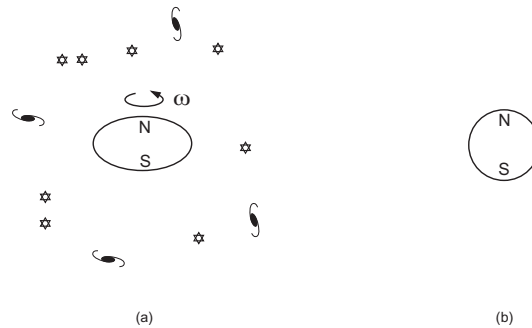



Figura 12.2: Movimento concebido como algo relativo, ou seja, como mudança de posição ou de orientação de um corpo em relação a outro corpo. (a) Terra achatada nos polos quando gira diariamente em relação às galáxias e estrelas. (b) De acordo com o ponto de vista relativo, o achatamento da Terra deve desaparecer quando todos os corpos astronômicos ao seu redor desaparecerem.

Esta previsão de Clarke e Neumann de que a Terra deveria assumir um formato esférico quando se aniquilam todos os outros corpos astronômicos, caso se assuma uma concepção relativa do movimento, é uma consequência necessária de uma teoria completamente relacional e é implementada na mecânica relacional, como mostramos neste livro. Isto não é uma consequência "absurda" ou "insuportável" de qualquer teoria realmente relacional do movimento, mas uma consequência necessária que em princípio pode ser testada experimentalmente. De fato, é possível tentar verificar no laboratório a existência de um efeito análogo a este apontado por Clarke e Neumann, como veremos nas Subseções 23.5.6 e 23.5.7. Clarke foi o primeiro a apontar claramente o fato de que em uma teoria puramente relacional, a força centrífuga aparece apenas quando há uma rotação relativa entre o corpo de prova e toda a matéria ao seu redor. Isto significa que se fosse possível aniquilar todos os corpos materiais ao redor de um corpo de prova, as consequências dinâmicas da força centrífuga teriam de desaparecer concomitantemente. Infelizmente outras pessoas não perceberam ou não foram tocadas pelo significado das consequências apontadas por Clarke.

12.1.3 Conclusão

Leibniz acreditava que movimentos cinematicamente equivalentes deveriam ser dinamicamente equivalentes. Isto é evidente pelo que disse antes:[14]

> Portanto, temos de considerar que quaisquer que sejam as maneiras como muitos corpos possam estar em movimento, não podemos inferir a partir dos fenômenos quais deles têm realmente movimento absoluto e determinado, ou [estão em] repouso. Ao invés disto, podemos atribuir o repouso a qualquer um deles que escolhermos e ainda assim resultarão os mesmos fenômenos.

Apesar desta crença, ele não implementou esta ideia quantitativamente. Por exemplo, ele não mostrou como um céu de estrelas girando poderia gerar forças centrífugas. Ele também não mencionou a proporcionalidade entre a massa inercial e a massa gravitacional (ou a proporcionalidade entre a massa inercial e o peso). Ele não chegou nem mesmo a sugerir a possibilidade de as forças centrífugas surgirem de uma interação gravitacional.

Embora ele defendesse algumas ideias que conflitavam com a mecânica newtoniana, ele não as desenvolveu matematicamente. O estágio de conhecimento das ciências físicas em seu tempo, em particular o conhecimento do eletromagnetismo, ainda não estava maduro para suprir a chave de como implementar estas ideias quantitativamente.

12.2 Berkeley e o Movimento Relativo

O bispo G. Berkeley (1685-1753) criticou os conceitos newtonianos de espaço, tempo e movimento absolutos principalmente nas Seções 97 a 99 e 110 a 117 de seu trabalho *Tratado sobre os Princípios do Conhecimento Humano*, de 1710 (que já se encontra traduzido para a língua portuguesa)[15] e nas Seções 52 a 65 de seu

[14] [Lei89, págs. 130-131].
[15] [Ber80].

trabalho *Sobre o Movimento - ou sobre o Princípio, a Natureza e a Causa da Comunicação dos Movimentos*, mais conhecido por seu primeiro nome em latim, *De Motu*, de 1721. Existe uma tradução completa do *De Motu* em língua portuguesa e outra em língua inglesa.[16] Uma boa discussão de sua filosofia do movimento pode ser encontrada nos trabalhos de Whitrow, Popper e Chibeni.[17]

Na Seção 112 dos *Princípios*, Berkeley defendeu uma teoria relacional como segue:[18]

> 112. Confesso, não obstante, que não me parece possa haver outro movimento além do *relativo*; para conceber o movimento é preciso conceber pelo menos dois corpos a distância e em posição variáveis. Se houvesse um corpo só, não poderia mover-se. Isto parece evidente; a ideia que tenho de movimento inclui necessariamente a relação.

Analogamente, na Seção 63 do *De Motu* temos:[19]

> 63. Nenhum movimento pode ser reconhecido ou medido a não ser através das coisas sensíveis. Desde que o espaço absoluto não afeta, de modo algum, os sentidos, ele deve necessariamente ser bastante inútil para distinguir os movimentos. Além disso, a determinação ou direção é essencial ao movimento; mas ela consiste numa relação. Portanto, é impossível que o movimento absoluto seja concebido.

Berkeley sugeriu mais claramente do que Leibniz substituir o espaço absoluto de Newton pelo céu de estrelas fixas na Seção 64 do *De Motu*:[20]

> 64. Além disso, como o movimento do mesmo corpo pode variar com a diversidade do lugar relativo, e mais ainda como na verdade uma coisa pode ser dita estar em movimento num sentido e num outro sentido estar em repouso, seria suficiente, para determinar o movimento e repouso verdadeiros — para a eliminação da ambiguidade e para o avanço na mecânica dos filósofos que adotam uma perspectiva mais ampla do sistema das coisas —, considerar o espaço relativo, ao invés do espaço absoluto, enquanto confinado pelo céu das estrelas fixas, que se considera estar em repouso. O movimento e o repouso demarcados por tal espaço relativo podem ser convenientemente colocados no lugar dos absolutos, e esse espaço relativo não pode ser distinguido dos absolutos por qualquer evidência. Pois, ainda que as forças possam ser impressas, quaisquer que sejam as conações existentes, concedemos que o movimento se distingue pelas ações aplicadas nos corpos; no entanto, nunca se seguiria que esse espaço — lugar absoluto — existe, e que a mudança nele seja o lugar verdadeiro.

Duzentos anos depois de Berkeley, Mach também vai propor substituir o espaço absoluto de Newton pelo céu de estrelas fixas.

12.2.1 Berkeley e a Experiência do Balde

Mas Berkeley também parece contradizer a si próprio, como tinha acontecido com Leibniz, quando ele levou em conta as forças. Ele acabou concedendo alguma realidade absoluta para as forças e nesta forma também se deixou levar pelos argumentos newtonianos. Por exemplo, no parágrafo 113 dos *Princípios* ele disse:[21]

> 113. Mas, conquanto em cada movimento tenha de haver mais de um corpo, pode mover-se apenas um, aquele onde se aplica a força causadora da mudança de distância ou de situação. Porque, embora alguns definam movimento relativo para denominar o corpo *movido* que varia de distância a outro, quer a força causadora seja aplicada nele, quer não, e como movimento relativo é o percebido pelos sentidos e observado na vida diária, parece que todo homem sensato o conhece tão bem como o melhor filósofo. Ora, pergunto eu se neste sentido, quando alguém passeia na rua, poderá falar-se de *movimento* das pedras da calçada. Parece-me não ser de necessidade, embora o movimento implique a relação entre duas coisas, cada termo da relação seja denominado por ele. Como um homem pode pensar em alguma coisa que não pensa, assim um corpo pode ser movido para ou desde outro que nem por isso está em movimento.

[16] [Ber06] e [Ber92].
[17] [Whi53], [Pop53] e [Chi10].
[18] [Ber80].
[19] [Ber06] e [Ber92].
[20] [Ber06] e [Ber92].
[21] [Ber80].

Mas mesmo se houvesse apenas movimento relativo, como Berkeley poderia explicar as experiências do balde e dos dois globos de Newton sem introduzir o espaço absoluto? Ele não foi completamente claro neste sentido, mas parece que ele achava que a forma côncava da superfície da água no balde girando só surgia devido à rotação relativa da água em relação ao céu de estrelas fixas. A mesma explicação daria conta da tensão na corda na experiência dos dois globos. Isto é, estes efeitos dinâmicos estariam relacionados ao movimento cinemático entre o corpo de prova e as estrelas, não estando relacionados ao movimento relativo entre o corpo de prova e o espaço absoluto. Para mostrar esta possível interpretação das ideias de Berkeley, apresentamos aqui a Seção 114 dos *Princípios* onde ele discutiu a experiência do balde:[22]

> 114. Como o "lugar" é variadamente definido, varia o movimento correlato. Em um navio um homem pode dizer-se imóvel em relação as bordas do navio e em movimento relativamente a Terra; ou movendo-se para Leste quanto as primeiras e para Oeste quanto a segunda. Na vida corrente, ninguém pensa além da Terra para definir o lugar de um corpo; e o que é imóvel neste sentido é assim considerado *absolutamente*. Mas os filósofos, de mais vasto pensamento e mais adequada noção do sistema das coisas, descobrem que a mesma Terra é móvel. Para fixar as suas noções parece conceberem o mundo corpóreo como finito e os seus extremos imóveis o lugar pelo qual avaliamos [avaliam] os movimentos verdadeiros. Se examinarmos a nossa própria concepção, creio concluiremos serem todos os movimentos absolutos concebíveis enfim e somente movimentos relativos assim definidos.[23] Como já observamos, movimento absoluto; exclusivo de toda relação externa, é incompreensível. E com esta espécie de movimento relativo todas as propriedades mencionadas, causas e efeitos atribuídos ao movimento absoluto vêm concordar, se não me engano. Quanto a não pertencer a força centrífuga ao movimento circular relativo, não vejo como isso pode concluir-se da experiência apresentada (v. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* no Escólio, Definição VIII). Porque a água do vaso no momento em que se diz ter o maior movimento relativo circular não tem, penso eu, movimento algum, como vamos ver.[24]

Parece-nos que quando Berkeley afirmou que os filósofos concebem o mundo corpóreo como finito e que eles avaliam os movimentos verdadeiros pelos extremos imóveis deste mundo corpóreo finito, que ele estava querendo dizer o céu de estrelas fixas. Isto é, de acordo com Berkeley, os filósofos colocam, por convenção, o céu de estrelas fixas em repouso e avaliam o movimento dos outros corpos celestes (planetas e cometas, por exemplo) em relação a este sistema de referência das estrelas fixas. E quando Berkeley afirmou que no início da experiência do balde de Newton a água não tinha movimento algum, parece-nos que ele quis dizer que não havia movimento de rotação da água em relação à Terra ou em relação ao céu de estrelas. Afinal de contas, na situação descrita por Newton, o maior movimento relativo entre o balde e a água ocorria após o balde ter sido solto e ter começado a girar rapidamente em relação à Terra, enquanto que a água não chegou a ter tempo de girar junto com o balde. Se esta for a interpretação correta das ideias de Berkeley, segue que para ele a forma côncava da superfície da água surgiria apenas quando houvesse uma rotação relativa entre a água e a Terra (ou entre a água e o conjunto das estrelas fixas), embora não pudéssemos atribuir uma rotação absoluta e real nem para a água nem para a Terra (ou nem para o conjunto de estrelas fixas).

Mas obviamente estamos aqui atribuindo mais a Berkeley do que o que ele realmente disse. Como vimos antes ao mostrar e discutir o §113 dos *Princípios* (ver especialmente a primeira frase), algumas vezes Berkeley foi confundido pelos argumentos de Newton. Nestes casos falou então de força como algo absoluto, indicando que podemos saber qual corpo está realmente e absolutamente em movimento ao observar em qual corpo a força está agindo. Esta afirmação, contudo, não faz sentido em uma teoria completamente relacional.

Nas Seção 58 a 60 do *De Motu*, Berkeley discutiu a experiência dos dois globos, assim como a experiência do balde de Newton, nos seguintes termos:[25]

> 58. Do que foi afirmado, está claro que não devemos definir o verdadeiro lugar do corpo como a parte do espaço absoluto que o corpo ocupa, nem definir o movimento absoluto ou verdadeiro como a mudança de lugar absoluto ou verdadeiro, pois todo lugar, assim como todo movimento, é relativo. Mas, ao assim procedermos, torna-se mais evidente que devemos salientar que nenhum

[22] [Ber80].

[23] Original: "If we sound our conceptions, I believe we may find all the absolute motion we can frame an idea of to be at bottom no other than relative motion thus defined." Nossa tradução: Se examinarmos a nossa própria concepção, creio podermos encontrar que todo movimento absoluto do qual podemos formar uma ideia será, no fundo, nada mais do que movimento relativo assim concebido.

[24] Esta última frase termina assim: "as is plain from the foregoing section." Preferimos traduzir o final deste trecho por "como é evidente da seção anterior."

[25] [Ber06] e [Ber92].

> movimento pode ser compreendido sem alguma determinação ou direção, a qual, por sua vez, não pode ser compreendida a menos que, além do próprio corpo em movimento, nosso próprio corpo, ou algum outro corpo, também seja compreendido como existindo ao mesmo tempo. Pois *acima*, *abaixo*, *esquerda* e *direita*, bem como todos os lugares e regiões, são encontrados em alguma relação e necessariamente conotam e pressupõem um corpo diferente do corpo movido, de modo que, se supuséssemos que os outros corpos fossem aniquilados e, por exemplo, existisse um só globo, nenhum movimento poderia ser nele concebido; portanto, é necessário que outro corpo seja dado e, pela sua posição, o movimento seja compreendido como determinado. A verdade dessa opinião tornar-se-ia bastante compreensível, se tivéssemos cuidadosamente executado a suposta aniquilação de todos os corpos, do nosso e dos outros, exceto a desse globo solitário.
>
> 59. Imaginemos, portanto, dois globos como existentes e, além deles, nada de corpóreo. Imaginemos, então, que forças são neles aplicadas de algum modo; seja qual for a compreensão que tenhamos da aplicação das forças, não se pode conceber pela imaginação um movimento circular dos dois globos em torno de um centro comum. Suponhamos, então, que o céu das estrelas fixas seja criado; subitamente, a partir da concepção da aproximação dos globos nas diferentes partes desse céu, o movimento será concebido. Isso significa afirmar que, como o movimento é relativo por sua própria natureza, ele não poderia ser concebido antes que os corpos correlatos fossem dados. Do mesmo modo, nenhuma outra relação pode ser concebida sem correlatos.
>
> 60. Com respeito ao movimento circular, muitos pensam que, à medida que aumenta o movimento verdadeiramente circular, o corpo tende necessariamente sempre mais e mais a afastar-se de seu eixo. Essa crença surge do fato de que o movimento circular pode ser visto como surgindo, por assim dizer, em qualquer momento, de duas direções, uma ao longo do raio e a outra ao longo da tangente e, se nesta última direção apenas o ímpeto for aumentado, então o corpo em movimento afastar-se-á do centro e sua órbita deixará de ser circular. Mas, se as forças forem aumentadas igualmente em ambas as direções, o movimento permanecerá circular, ainda que acelerado, e não apresentará um aumento nas forças que o afastam do eixo que seja maior do que nas forças que o aproximam desse mesmo ponto. Portanto, devemos dizer que a água forçada a girar em um balde eleva-se pelas laterais do recipiente porque, no mesmo instante em que novas forças são aplicadas, na direção da tangente, em qualquer partícula da água, novas forças centrípetas iguais não são aplicadas. Desse experimento não se segue, de modo algum, que o movimento circular absoluto seja necessariamente reconhecido pelas forças que promovem o afastamento com relação ao eixo do movimento. Além disso, está mais do que suficientemente mostrado na discussão anterior como devem ser compreendidos os termos *força corpórea* e *conatus* [esforço ou pressão].

Isto é, para Berkeley se só existisse um corpo no universo, não seria possível conceber seu movimento. Caso existissem apenas dois corpos no universo, seria possível conceber apenas o movimento de aproximação ou de afastamento entre eles, mas não seria possível conceber o movimento de rotação conjunta destes dois corpos. Isto é, não se poderia conceber um movimento circular dos dois corpos em torno de um centro comum. Este movimento circular só pode ser concebido no momento em que existirem outros corpos além deles. Por exemplo, ao imaginar os dois corpos e as estrelas fixas ao redor deles, passa a ser possível conceber o movimento circular dos dois corpos ao redor do ponto central entre eles. Este movimento circular poderia ser concebido já que em um certo instante, um dos corpos estaria se afastando de uma certa estrela, enquanto que o outro corpo estaria simultaneamente se aproximando desta mesma estrela. Em um outro instante, o primeiro corpo estaria se aproximando desta mesma estrela, enquanto que o segundo corpo estaria se afastando dela. Em um movimento circular este movimento alternado de aproximação e afastamento de cada corpo em relação a uma estrela específica continuaria ao longo do tempo. Ou seja, só faz sentido dizer que os dois globos giram um ao redor do outro, quando temos outros corpos em relação aos quais podemos referir o movimento. Além do mais, esta rotação será apenas relativa. Afinal de contas, não podemos dizer cinematicamente se são os globos que estão em movimento giratório enquanto o céu de estrelas fixas está em repouso, ou o oposto, isto é, se os dois globos estão em repouso enquanto que o céu de estrelas fixas gira ao redor deles.

Vamos imaginar agora a situação discutida por Newton em que dois corpos estão ligados por uma corda. De acordo com Newton, vai haver uma tensão na corda quando os dois corpos giram em relação ao espaço absoluto (enquanto que o conjunto das estrelas está parado em relação a este espaço absoluto), mas não haveria uma tensão na corda caso o conjunto das estrelas girasse em relação ao espaço absoluto, enquanto que os corpos e a corda estivessem parados em relação ao espaço absoluto. Berkeley não disse explicitamente que a tensão na corda ligando os globos só iria aparecer quando houvesse esta rotação relativa entre os globos

e o céu de estrelas fixas, não importando qual deles estivesse girando em relação ao espaço absoluto. Ele também não disse explicitamente que a tensão na corda só iria aparecer quando se criasse o céu de estrelas fixas, ou que a tensão na corda desapareceria caso o céu de estrelas fixas fosse aniquilado (como havia sido apontado por Clarke).

No que diz respeito a sua discussão da experiência do balde girante, novamente Berkeley não enfatizou o papel das estrelas fixas na geração das forças centrífugas. Ele não afirmou que a água subiria pelas paredes do balde caso a água e o balde ficassem parados em relação ao espaço absoluto, enquanto que o céu de estrelas fixas girasse rapidamente em relação ao eixo do balde. Também não disse que a água ficaria plana se os outros corpos do universo fossem aniquilados, sobrando apenas o balde, a água e a Terra.

Por estes motivos concordamos com Jammer quando afirmou:[26]

> É óbvio que a afirmação de Berkeley não pode ser considerada equivalente ao que a cosmologia moderna chama de "princípio de Mach" (a saber, que a inércia de qualquer corpo é determinada pela distribuição das massas do Universo), pois ele se restringiu ao problema da percepção e da compreensibilidade do movimento, ignorando, nesse contexto, o seu aspecto dinâmico.

Mas mesmo se estas fossem as interpretações corretas de suas ideias, Berkeley não as implementou quantitativamente. Isto é, ele não apresentou uma lei de força específica mostrando que quando mantemos os dois globos ou a água em repouso (por exemplo, em relação à Terra ou a um observador material) e giramos o céu de estrelas fixas (novamente em relação à Terra ou em relação a um observador material), que então vai aparecer uma força centrífuga real criando a tensão na corda que liga os dois globos e empurrando a água contra as paredes do balde devido a esta rotação relativa.

Ele também não mencionou a proporcionalidade entre a massa inercial e o peso, ou entre as massas inerciais e gravitacionais. Não chegou nem mesmo a sugerir que a força centrífuga poderia ser devida a uma interação *gravitacional* do corpo de prova com a matéria distante.

12.3 Conclusão

Leibniz e Berkeley criticaram corretamente diversos aspectos problemáticos da mecânica newtoniana. Em particular, criticaram as ideias de tempo, espaço e movimento absolutos. Defenderam o movimento relativo e que os sistemas ptolomaico e copernicano eram equivalentes. Apesar disto, não conseguiram apresentar alternativas satisfatórias para explicar a experiência do balde de Newton ou para explicar o achatamento da Terra utilizando apenas o conceito de movimento relativo entre corpos materiais. Leibniz e Berkeley se deixaram levar pelos argumentos newtonianos.

Como visto na Subseção 9.2.3, o próprio Newton havia percebido uma alternativa viável para explicar a origem das forças centrífugas que fazem com que os corpos tendam a se afastar do eixo de rotação nos movimentos circulares. Quando a Terra gira diariamente ao redor de seu eixo, ela fica achatada nos polos. Newton levantou a hipótese de que talvez ela também ficasse achatada nos polos mesmo que permanecesse em repouso, desde que o conjunto dos corpos astronômicos ao seu redor desse uma volta por dia ao redor do eixo Norte-Sul terrestre.[27] O próprio Newton recusou esta alternativa, considerando-a absurda. Mas pelo menos sugeriu uma alternativa viável que poderia ser apresentada em relação às suas concepções absolutas. Este texto de Newton só foi publicado pela primeira vez em 1962, não chegando a influenciar Leibniz ou Berkeley. Mas não deixa de ser impressionante observar que o próprio Newton conseguiu ver mais longe que seus críticos qual seria a alternativa para se contrapor às suas concepções filosóficas e matemáticas. Leibniz e Berkeley não chegaram a propor esta alternativa. Apenas Mach, duzentos anos depois de Newton, vai voltar a enfatizar esta alternativa, considerando-a não apenas viável, mas defendendo fortemente este ponto de vista em relação às concepções de movimento absoluto defendidas por Newton.

Veremos neste livro que a mecânica relacional implementa matematicamente a sugestão alternativa de Newton.

Muitos outros autores discutiram estes aspectos da teoria newtoniana antes de Mach, sem porém avançar muito além do que Newton, Leibniz ou Berkeley fizeram. Para uma discussão ver os trabalhos de Jammer, os comentários de Alexander na correspondência Leibniz-Clarke, assim como os trabalhos de Molina, Ghins e Coelho.[28] Não entraremos em detalhes aqui sobre estes autores já que as principais ideias foram desenvolvidas por Leibniz e por Berkeley. Estes pontos de vista foram grandemente aprofundados, explorados e desenvolvidos por Mach. Este é o assunto do Capítulo 13.

[26] [Jam93, pág. 109] e [Jam10, págs. 145-146].
[27] [HH62, págs. 127-128], [New83, págs. 66-67] e [Ear89, pág. 63].
[28] [Ale84, págs. xl a xlix], [Jam93, Capítulo 5] e [Jam10, Capítulo 5], [Mol93], [Ghi95] e [Coe10].

Capítulo 13

Mach e a Mecânica de Newton

13.1 Defesa do Espaço Relativo

Neste Capítulo apresentamos as críticas de Ernst Mach (1838-1916) à mecânica newtoniana. Vamos seguir alguns dos exemplos discutidos nos Capítulos anteriores para ilustrar alguns aspectos da mecânica clássica que Mach considerava negativos. Vamos analisar também as sugestões de Mach para superar estes problemas da mecânica newtoniana.

Mach queria que a física se livrasse das noções de espaço e tempo absolutos. Ele as considerava metafísicas e monstruosas. No Prefácio da primeira edição alemã (1883) de seu livro *A Ciência da Mecânica*, Mach disse:[1]

> Este volume não é um tratado sobre a aplicação dos princípios da mecânica. Seus objetivos são de esclarecer as ideias, expor o significado real do assunto e ficar livre de obscuridades metafísicas.

No Prefácio da sétima edição alemã (1912) deste livro escreveu:[2]

> O caráter do livro permaneceu o mesmo. Em relação às concepções monstruosas de espaço absoluto e tempo absoluto não posso retratar-me em nada. Aqui mostrei apenas mais claramente do que até então que Newton de fato falou muito sobre estas coisas, mas por toda a parte não fez aplicações sérias delas. Seu quinto corolário[3] contém o único *sistema inercial* usado na prática (provavelmente aproximado).

No século XIX, alguns autores propuseram o éter luminoso como um substituto do espaço absoluto de Newton. Não discutiremos estas ideias aqui. Para uma discussão sobre este ponto ver o trabalho de Oliveira.[4]

Vamos começar analisando o problema do movimento retilíneo uniforme. De acordo com a primeira lei do movimento de Newton (a lei da inércia), se não há força resultante agindo sobre um corpo ele vai permanecer em repouso ou então vai mover-se em uma linha reta com uma velocidade constante. Mas em relação a que sistema de referência vai o corpo permanecer em repouso ou em movimento retilíneo uniforme? De acordo com Newton, é em relação ao espaço absoluto ou a qualquer outro sistema de referência que se move com uma velocidade constante em relação ao espaço absoluto. O problema com esta afirmação é que não temos qualquer acesso ao espaço absoluto, isto é, não podemos saber nossa posição ou velocidade em relação ao espaço absoluto.

O que Mach sugeriu para substituir o espaço absoluto de Newton? Ele propôs o restante da matéria no universo:[5]

> O comportamento dos corpos terrestres em relação à Terra é redutível ao comportamento da Terra em relação aos corpos celestes remotos. Se fôssemos defender que sabemos mais dos objetos móveis do que este seu último comportamento, dado experimentalmente em relação aos corpos celestes, nos tornaríamos culpados de falsidade. Quando, consequentemente, dizemos que um corpo mantém inalteradas sua direção e velocidade no espaço, nossa afirmativa não é nada mais nada menos do que uma referência abreviada a todo o universo.

[1] [Mac60, pág. xxii].
[2] [Mac60, pág. xxviii].
[3] *Principia*, 1687, pág. 19.
[4] [Oli93].
[5] [Mac60, págs. 285-286].

Citamos aqui outros trechos de Mach defendendo que se deve utilizar o referencial das estrelas fixas ao descrever o movimento de qualquer corpo. Ao discutir a experiência do balde, Mach disse:[6]

> O sistema de referência natural para ele [Newton] é aquele que tem qualquer movimento uniforme ou translação sem rotação (relativamente à esfera das estrelas fixas).

Estas palavras entre parêntesis, "relativamente à esfera das estrelas fixas," são do próprio Mach e não vieram de Newton.

Um pouco mais adiante de seu livro, Mach afirmou o seguinte:[7]

> Agora, para ter um sistema de referência válido em geral, Newton expôs o quinto corolário do *Principia* (pág. 19 da primeira edição). Ele imaginou um sistema de coordenadas terrestre momentâneo, no qual a lei da inércia é válida, bem firme no espaço sem qualquer rotação em relação às estrelas fixas.

Mais uma vez estas últimas palavras, "em relação às estrelas fixas," são de Mach e não de Newton.

Ainda em seu livro *A Ciência da Mecânica*, Mach afirmou o seguinte:[8]

> Não há, creio, diferença de significado entre Lange e eu próprio [...] em relação ao fato de que, atualmente, o céu de estrelas fixas é o único sistema de referência útil na prática e em relação ao método de obter um novo sistema de referência por correção gradual.

Sua resposta mais clara aparece no seguinte trecho deste livro *A Ciência da Mecânica*, nossa ênfase:[9]

> 4. Tenho um outro ponto importante a discutir agora contrário a C. Neumann,[10] cuja publicação bem conhecida sobre este tópico precedeu a minha[11] por pouco tempo. Defendi que a direção e velocidade que são levadas em conta na lei da inércia não têm significados compreensíveis se a lei se referir ao "espaço absoluto." De fato, só podemos determinar metricamente a direção e velocidade num espaço no qual os pontos são diretamente ou indiretamente marcados por corpos dados. O tratado de Neumann e o meu próprio tiveram sucesso em chamar nova atenção para este ponto, que já tinha causado muito desconforto intelectual a Newton e a Euler; apesar disto não resultaram nada mais do que tentativas parciais de solução, como aquela de Streintz. *Permaneço até o dia de hoje como a única pessoa que insiste em referir a lei da inércia à Terra e, no caso de movimentos de grande extensão espacial e temporal, às estrelas fixas.*

Concordamos completamente com Mach neste ponto. Esta última sentença é uma formulação muito melhor da lei da inércia do que a formulação de Newton em termos do espaço absoluto. Isto é, em experiências típicas de laboratório que duram muito menos do que uma hora e que não se estendem muito no espaço em comparação com o raio terrestre (como no estudo de molas, movimento de projéteis, colisão de duas bolas de bilhar etc.) podemos utilizar a Terra como sendo um sistema de referência inercial. Isto significa que podemos aplicar as leis de Newton do movimento neste referencial terrestre, sem introduzir as forças fictícias, com o fim de estudar estes movimentos com uma razoável precisão. Por outro lado, em experiências que duram alguns minutos ou algumas horas (como no pêndulo de Foucault ou no estudo dos giroscópios) ou nas quais estudamos movimentos com escalas temporais e espaciais grandes (como no caso de ventos, correntes marítimas etc.) um sistema de referência inercial melhor do que a Terra é o referencial definido pelas estrelas. O conjunto das estrelas fixas é também um bom sistema de referência inercial para estudar a rotação diurna da Terra ou sua translação anual ao redor do Sol. Nestes casos a aplicação das leis de Newton vai dar ótimos resultados neste referencial das estrelas fixas, sem precisar levar em conta as forças fictícias. Hoje em dia podemos dizer que um sistema de referência inercial melhor ainda para estudar a rotação ou o movimento de nossa galáxia como um todo (em relação às outras galáxias, por exemplo) é o referencial definido pelas galáxias externas ou o sistema de referência no qual a radiação cósmica de fundo é isotrópica.

Como vimos na Subseção 1.6.3, o próprio Newton havia suposto a hipótese de que o centro de gravidade do sistema solar, assim como o referencial das estrelas fixas, estavam parados em relação ao seu espaço

---

[6] [Mac60, pág. 281].

[7] [Mac60, pág. 285].

[8] [Mac60, págs. 294-295].

[9] [Mac60, págs. 336-337].

[10] *Die Principien der Galilei-Newton'schen Theorie*, Leipzig, 1870. [Ver [Neu70] e [Neu93].]

[11] *Erhaltung der Arbeit*, Prague, 1872. (Traduzida parcialmente [para a língua inglesa] no artigo "The Conservation of Energy [A Conservação da Energia]," *Popular Scientific Lectures*, terceira edição, Chicago, 1898. [Ver [Mac10b] e mach81.])

absoluto. Ao apresentar as órbitas dos planetas ao redor do Sol, por exemplo, Newton sempre deixava claro no *Principia* que estava utilizando o pano de fundo das estrelas fixas para descrever as trajetórias dos planetas. Neste sentido poderia ser pensado que Mach não estava introduzindo nada de novo. Mas não é bem assim. Embora Newton estivesse utilizando na prática o referencial das estrelas fixas, ele insistiu em supor a existência do espaço absoluto desvinculado da matéria, ao mesmo tempo em que supunha que existissem movimentos de corpos em relação a esse espaço absoluto vazio. Mach, ao contrário, estava defendendo que não havia este espaço absoluto vazio. Para Mach, tanto de um ponto de vista prático quanto filosófico, só existiam as distâncias entre corpos materiais. Logo, não fazia sentido definir o movimento em relação ao espaço vazio, já que só se pode conceber e medir a posição de um certo corpo em relação a outros corpos.

13.2 Defesa do Tempo Relativo

Mach defendeu em seus trabalhos que só existe o tempo relativo. Este é o tempo que está relacionado ao movimento dos corpos materiais. Defendeu também que não existe um tempo absoluto que flui independentemente das coisas materiais. Em particular, defendeu que se pode substituir o tempo que aparece nas leis do movimento de Newton, representado por t, pelo ângulo de rotação da Terra em relação às estrelas fixas. Em seu trabalho sobre a conservação de energia, por exemplo, ele afirmou o seguinte:[12]

> Creio que devo adicionar, e já fiz isto em uma outra publicação, que é pelo menos supérfluo levar explicitamente em consideração o espaço e o tempo na lei da causalidade. Como só reconhecemos por certos fenômenos aquilo que chamamos de tempo e espaço, as determinações espaciais e temporais só são determinadas por meio de outros fenômenos. Se, por exemplo, expressarmos as posições dos corpos terrestres como funções do tempo, isto é, como funções do ângulo de rotação da Terra, determinamos simplesmente a dependência das posições dos corpos terrestres *entre si.*
>
> O ângulo de rotação da Terra está facilmente disponível para nós, e assim facilmente o substituímos por outros fenômenos que estão conectados com ele mas que nos são menos acessíveis; é um tipo de moeda que gastamos para evitar o comércio inconveniente com os fenômenos, de tal forma que o provérbio "Tempo é dinheiro" também tem um significado aqui. Podemos eliminar o tempo de toda lei da natureza ao colocar no seu lugar um fenômeno que dependa do ângulo de rotação da Terra.

Nesta passagem e em outras que vamos citar logo a seguir, Mach não explicitou claramente em relação a qual corpo se deveria considerar este ângulo de rotação da Terra. Mas como visto na Seção 13.1, Mach claramente estava pensando no ângulo de rotação da Terra em relação às estrelas fixas.

Em seu livro *A Ciência da Mecânica* ele apresentou este mesmo ponto de vista após citar o Escólio do *Principia* no qual Newton definiu os conceitos de tempo, espaço e movimento absolutos. Mach expressou-se nas seguintes palavras:[13]

> Parece como se Newton nos trechos citados aqui ainda estivesse sob a influência da filosofia medieval, como se ele tivesse se tornado infiel às suas resoluções de investigar apenas os fatos reais. Quando dizemos que uma coisa A muda no tempo, queremos dizer apenas que as condições que determinam uma coisa A dependem das condições que determinam uma outra coisa B. As vibrações de um pêndulo ocorrem *no tempo* quando seu movimento *depende* da posição da Terra. Contudo, como na observação do pêndulo, não temos a necessidade de levar em conta sua dependência em relação à posição da Terra, mas podemos compará-lo com qualquer outra coisa (cujas condições obviamente também dependem da posição da Terra), surge facilmente a noção ilusória de que *todas* as coisas com as quais ele depende não são essenciais. Mais que isso, podemos, ao acompanhar o movimento de um pêndulo, desprezar completamente as outras coisas externas, e encontrar que para cada posição dele nossos pensamentos e sensações são diferentes. De acordo com isto, o tempo parece ser alguma coisa particular e independente, do progresso da qual depende a posição do pêndulo, enquanto que as coisas para as quais recorremos para comparação e que escolhemos aleatoriamente parecem tomar um papel totalmente colateral. Mas não podemos esquecer que todas as coisas do mundo estão conectadas entre si e são mutuamente dependentes, e que nós próprios e todos os nossos pensamentos também somos uma parte da natureza. Está totalmente além de nosso poder *medir* as mudanças das coisas pelo *tempo.* O

[12] [Mac81, págs. 60-61].
[13] [Mac60, págs. 272-273].

> que ocorre é exatamente o contrário, já que tempo é uma abstração na qual chegamos por meio das mudanças das coisas; [sendo esta abstração] feita já que não estamos restritos a qualquer medida *definitiva*, todas elas estando interconectadas. Diz-se que um movimento é uniforme quando aumentos iguais de espaço percorrido correspondem a iguais aumentos de espaço descrito por algum movimento com o qual formamos uma comparação, como a rotação da Terra. Um movimento pode ser uniforme com relação a um outro movimento. Mas é sem sentido a questão de saber se um movimento é, *por si próprio*, uniforme. Da mesma forma não se pode falar com justiça de um "tempo absoluto" — *de um tempo independente da* mudança. Este tempo absoluto não pode ser medido pela comparação com qualquer movimento; portanto, ele não tem nem um valor prático nem científico; e ninguém está justificado em dizer que sabe qualquer coisa sobre ele. Ele é uma concepção metafísica inútil.

Mais adiante Mach expressou-se da seguinte maneira:[14]

> Quando refletimos que o fator temporal que entra na aceleração nada mais é do que uma grandeza que é a medida das distâncias (ou ângulos de rotação) entre os corpos do universo, percebemos que mesmo no caso mais simples, no qual aparentemente lidamos com a ação mútua entre apenas *duas* massas, é *impossível* desprezar o restante do mundo.

Uma outra citação de Mach feita no mesmo livro:[15]

> Permita-me fazer um comentário mais geral. Medimos tempo pelo ângulo de rotação da Terra, mas poderíamos medí-lo tão bem pelo ângulo de rotação de qualquer outro planeta. [...]

Novamente Mach está implicitamente referindo-se aos ângulos de rotação dos planetas em relação às estrelas fixas.

Como visto na Subseção 1.6.2, o próprio Newton afirmou que a rotação relativa entre a Terra e o conjunto das estrelas era uma boa medida do tempo absoluto. Logo poderia ser pensado que Mach não estava introduzindo nada de novo ao discutir este ponto. Mas não é bem assim. Embora na prática Newton tenha utilizado o dia sideral como uma boa medida do tempo, ele sempre insistiu em que havia um tempo absoluto desvinculado de qualquer movimento dos corpos materiais, que fluía uniformemente sem relação com nada externo. Mach atacou frontalmente esta concepção newtoniana. Para Mach não fazia sentido prático, nem filosófico, defender que houvesse um tempo absoluto desvinculado da matéria. Para Mach só havia o tempo obtido a partir das variações observadas nos corpos materiais. O tempo seria uma medida da mudança da configuração relativa entre diversos corpos.

13.3 Comparação entre a Rotação Cinemática da Terra e Sua Rotação Dinâmica

Mach estava ciente das evidências observacionais de que a rotação cinemática da Terra em relação às estrelas fixas tem o mesmo valor que a rotação dinâmica da Terra, com estas duas rotações tendo a mesma direção e apontando no mesmo sentido. Isto é, o melhor sistema de referência conhecido na época (aquele no qual podemos aplicar com sucesso a segunda lei de Newton do movimento sem introduzir as forças fictícias, ou seja, sem introduzir a força centrífuga e a força de Coriolis) não gira em relação ao céu de estrelas fixas. Ele expressou este fato no seu livro *A Ciência da Mecânica*:[16]

> Seeliger tentou determinar a relação do sistema inercial com o sistema de coordenadas astronômico empírico que está em uso e acredita poder afirmar que o sistema empírico não pode girar ao redor do sistema inercial por mais do que alguns segundos de arco em um século.

Jammer também mencionou o trabalho de Seeliger:[17]

> Seeliger[18] julgou que era possível comparar o sistema inercial de Lange ao sistema de coordenadas empírico usado na astronomia e afirmou que o movimento relativo desses dois sistemas era inferior a dois segundos de arco no intervalo de um século.

[14] [Mac60, pág. 287].
[15] [Mac60, pág. 295].
[16] [Mac60, págs. 292-293].
[17] [Jam93, pág. 141] e [Jam10, págs. 183-184].
[18] H. Seeliger, "Über die sogennante absolute Bewegung", *Sitzber. Münchener Akad. Wiss.* (1906), p. 85.

Hoje em dia sabemos que se há uma rotação entre estes dois sistemas de referência (o inercial e o das estrelas fixas), ela é menor do que 0,4 segundos de arco por século,[19] isto é:

$$\omega_c - \omega_d \leq \pm 0,4\ \frac{segundos\ de\ arco}{s\acute{e}culo} = \pm 1,9 \times 10^{-8}\ \frac{rad}{ano} = \pm 6,1 \times 10^{-16}\ \frac{rad}{s}\ . \quad (13.1)$$

Como $\omega_c = 2\pi/T = 2\pi/(23^h\ 56^m\ 4^s) = 2\pi/(86.164\ s) = 7,29 \times 10^{-5}\ rad/s$, obtemos:

$$\left|\frac{\omega_c - \omega_d}{\omega_c}\right| \leq 8 \times 10^{-12}\ . \quad (13.2)$$

Poucos fatos na física têm uma precisão de uma parte em 10^{11} como aqui. Um outro exemplo, como vimos anteriormente na Subseção 7.3.3, é a proporcionalidade entre a massa inercial e o peso, equação (7.35). Estes dois fatos são alguns dos pilares empíricos mais fortes a favor do princípio de Mach. É difícil aceitar que a igualdade da rotação cinemática da Terra com sua rotação dinâmica seja uma simples coincidência. Como visto nas Subseções 9.2.1, 9.2.4, 9.2.5 e 10.4.3, este fato é equivalente à afirmação de que o universo como um todo (o conjunto das galáxias) não gira em relação ao espaço absoluto. Este fato sugere que é a matéria distante que determina e estabelece o melhor referencial inercial. Já a proporcionalidade da massa inercial com a massa gravitacional sugere que exista algum tipo de interação *gravitacional* entre os corpos astronômicos distantes e os corpos locais. Se é este o caso, precisamos entender e explicar esta conexão entre a matéria distante e os sistemas inerciais locais. Uma resposta a este enigma não é encontrado na mecânica newtoniana já que nela não há nenhuma relação das estrelas fixas e das galáxias distantes com os referenciais inerciais.

13.4 Nova Definição de Massa Inercial

Um outro problema na mecânica clássica é aquele da quantidade de matéria ou massa inercial, ou seja, da massa que aparece na segunda lei do movimento de Newton, no momento linear, no momento angular e na energia cinética. Newton a definiu como o produto do volume do corpo por sua densidade, como vimos na Seção 1.2, equação (1.1). Esta é uma definição pobre já que usualmente definimos a densidade como a razão entre a massa inercial pelo volume do corpo, ou ou como a quantidade de matéria pelo volume do corpo. Esta definição de Newton só seria útil e evitaria círculos viciosos, se ele houvesse especificado como definir e medir a densidade do corpo sem usar o conceito de massa, coisa que Newton não fez.

O primeiro artigo escrito por Mach onde ele criticou esta definição e apresentou uma outra melhor é de 1868.[20] Ele foi reimpresso e traduzido para a língua inglesa no livro de Mach intitulado *A História e as Raízes do Princípio de Conservação da Energia*, de 1872, que também já se encontra totalmente traduzido para a língua inglesa.[21] No livro *A Ciência da Mecânica* ele elaborou um pouco mais sua crítica à concepção newtoniana de massa nas seguintes palavras:[22]

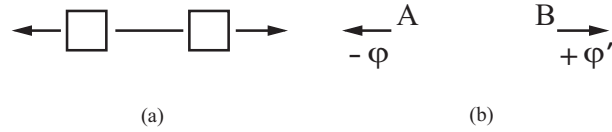
> A definição I é uma pseudo-definição, como já foi demonstrado. O conceito de massa não fica mais claro descrevendo a massa como o produto do volume pela densidade, já que a própria densidade denota simplesmente a massa pela unidade de volume. A definição verdadeira de massa só pode ser deduzida das relações dinâmicas dos corpos.

Ao invés da definição de massa inercial apresentada por Newton, Mach propôs a seguinte definição:[23]

> *Diz-se que têm massas iguais todos os corpos que, ao agir mutuamente um sobre o outro, produzem em cada um acelerações iguais e opostas.*
>
> Nesta definição nós simplesmente designamos, ou nomeamos, uma relação real das coisas. No caso geral procedemos similarmente. Os corpos A e B recebem, respectivamente, as acelerações $-\varphi$ e $+\varphi'$ como um resultado de suas ações mútuas (ver a figura), onde os sentidos das acelerações estão indicados pelos sinais.

[19] [Sch64] e [Rei73].
[20] [Mac68].
[21] [Mac81, Sobre a definição de massa, págs. 80-85].
[22] [Mac60, pág. 300].
[23] [Mac60, págs. 266-267].

A $-\varphi$ B $+\varphi'$

(a) (b)

> Dizemos então que B tem φ/φ' vezes a massa de A. *Se tomamos A como nossa unidade, atribuímos ao corpo [B] que comunica a A m vezes a aceleração que A comunica a ele por reação, a massa m.* A razão das massas é o negativo da razão inversa das contra-acelerações. A experiência nos ensina, sendo que somente ela pode nos ensinar isto, que estas acelerações têm sinais opostos, que há, portanto, de acordo com a nossa definição, apenas massas positivas. No nosso conceito de massa não está envolvida nenhuma teoria; a "quantidade de matéria" é completamente desnecessária nele; tudo que ele contém é a fundação exata, designação e determinação de um fato.

Esta definição da razão das massas inerciais pode ser colocada em uma fórmula matemática da seguinte maneira:

$$\frac{m_{i1}}{m_{i2}} \equiv -\frac{a_2}{a_1} \ . \tag{13.3}$$

Nesta definição chave de massa inercial, Mach não especificou claramente o sistema de referência em relação ao qual se deve medir as acelerações. É simples perceber que esta definição depende do sistema de referência.[24] Por exemplo, observadores que estão acelerados entre si vão encontrar razões de massa diferentes ao analisar a mesma interação de dois corpos se cada observador utilizar seu próprio sistema de referência para definir as acelerações e chegar nas massas. Damos aqui um exemplo disto. Consideramos um problema unidimensional no qual dois corpos 1 e 2 ao interagir um com o outro recebem as acelerações $\vec{a}_1 = a_1\hat{x}$ e $\vec{a}_2 = -a_2\hat{x}$, respectivamente, em relação a um sistema de referência O, figura 13.1, onde $a_1 \equiv |\vec{a}_1|$ e $a_2 \equiv |\vec{a}_2|$.

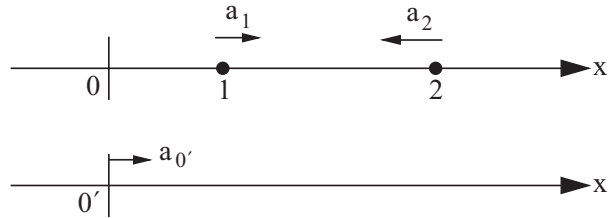



Figura 13.1: Acelerações de dois corpos em relação ao referencial O.

Suponha agora um outro sistema de referência O' com uma aceleração $\vec{a}_{o'} = a_{o'}\hat{x}$ em relação ao referencial O, onde $a_{o'} \equiv |\vec{a}_{o'}|$. As acelerações dos corpos 1 e 2 em relação ao referencial O' serão dadas por, respectivamente: $\vec{a}_1' = \vec{a}_1 - \vec{a}_{o'} = (a_1 - a_{o'})\hat{x}'$ e $\vec{a}_2' = \vec{a}_2 - \vec{a}_{o'} = -(a_2 + a_{o'})\hat{x}'$, ver a figura 13.2, com $\hat{x}' = \hat{x}$.

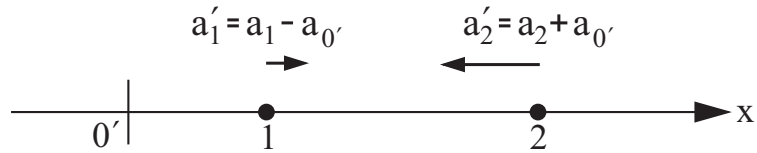



Figura 13.2: Acelerações de dois corpos em relação ao referencial O'.

Utilizando a definição de Mach, a razão de massas dos corpos 1 e 2 em relação ao referencial O será dada por:

$$\frac{m_1}{m_2} = -\frac{-a_2}{a_1} = \frac{a_2}{a_1} \ . \tag{13.4}$$

Por outro lado, a razão das massas em relação ao referencial O' será dada por:

[24] [Bun66].

$$\frac{m_1'}{m_2'} = -\frac{-a_2'}{a_1'} = \frac{a_2 + a_{o'}}{a_1 - a_{o'}} \neq \frac{m_1}{m_2} \ . \tag{13.5}$$

Isto é, se pudermos utilizar qualquer sistema de referência para definir a razão das massas, então esta definição vai ficar sem sentido pois vão haver tantas razões de massa diferentes para o mesmo par de corpos, quantos são os sistemas de referência acelerados em relação um ao outro. Ou seja, o valor m_1/m_2 vai ficar dependendo do sistema de referência e isto é certamente indesejável.

Mas é evidente dos seus escritos que Mach tinha em mente o referencial das estrelas fixas como sendo o referencial apropriado para ser utilizado nesta definição. Isto foi mostrado conclusivamente em um artigo importante de Yourgrau e van der Merwe.[25] Na Seção 13.1 apresentamos diversas citações de Mach neste sentido. Isto significa que para Mach não havia a indefinição apresentada nesta presente Seção 13.4. Ou seja, para ele não era para se utilizar na equação (13.3) as acelerações dos corpos 1 e 2 em relação a um observador qualquer. Mach defendeu claramente que nesta definição se deve empregar as acelerações dos corpos em relação ao referencial das estrelas fixas. Esta situação está ilustrada na nossa figura 13.3, na qual tentamos tornar mais claro o que Mach tinha em mente com sua definição.

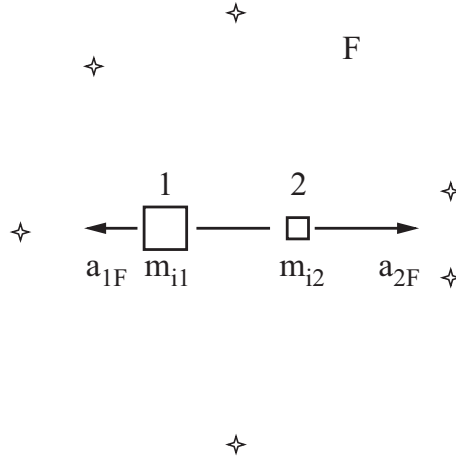



Figura 13.3: Dois corpos de massas inerciais m_{i1} e m_{i2} interagindo entre si e adquirindo acelerações a_{1F} e a_{2F} em relação ao referencial F das estrelas fixas.

Temos dois corpos 1 e 2 interagindo entre si de tal forma que adquiram acelerações a_{1F} e a_{2F}, respectivamente, em relação ao referencial F das estrelas fixas. A definição de Mach para a razão entre as massas inerciais destes dois corpos é então dada por:

$$\frac{m_{i1}}{m_{i2}} \equiv -\frac{a_{2F}}{a_{1F}} \ . \tag{13.6}$$

Nesta equação a razão das massas inerciais dos corpos 1 e 2 é definida como sendo o negativo dos inversos das acelerações destes corpos em relação ao referencial das estrelas fixas. Desta forma esta razão de massas inerciais terá sempre o mesmo valor, tanto no referencial O ou F das estrelas, quanto em um sistema de referência O' que esteja acelerado em relação ao referencial das estrelas fixas. Mesmo neste último caso não vão interessar as acelerações de 1 e 2 em relação ao referencial O', mas apenas suas acelerações em relação às estrelas fixas.

Deve ser observado que hoje em dia, em vez da definição de massa inercial apresentada por Newton (ou seja, de que $m_i \equiv \rho V$), aceita-se a definição operacional de Mach para a massa inercial representada pela equação (13.6). Esta nova definição aparece em diversos livros embora o nome de Mach não seja usualmente mencionado.[26] Esta foi uma contribuição muito importante que Mach apresentou para os fundamentos da mecânica clássica.

---

[25] [YvdM68].

[26] Ver, por exemplo, [Sym82, Seção 1.3: Dinâmica. Massa e Força, págs. 23-25] e [SJ04, Seção 4.3: Massa inercial, págs. 112-113].

13.5 A Formulação de Mach da Mecânica

Após clarificar estes pontos, apresentamos aqui a formulação de Mach para a mecânica, sugerida por ele para substituir os postulados e corolários de Newton. Ele apresentou pela primeira vez esta formulação em 1868.[27] Apresentamos aqui sua formulação final:[28]

> Mesmo se aderirmos absolutamente aos pontos de vista newtonianos e deixarmos de lado as complicações e características indefinidas já mencionadas, que não são removidas mas apenas disfarçadas pelas designações abreviadas de "tempo" e "espaço," é possível substituir os enunciados de Newton por proposições muito mais simples, melhor arranjadas metodicamente e mais satisfatórias. Tais proposições seriam as seguintes, em nossa opinião:
>
> *a. Proposição experimental.* Corpos colocados em frente um do outro induzem em cada um, sob certas circunstâncias a serem especificadas pela física experimental, *acelerações* contrárias na direção da linha que os une. (O princípio da inércia está incluído aqui.)
>
> *b. Definição.* A razão de massas de quaisquer dois corpos é o negativo da razão inversa das acelerações mutuamente induzidas destes corpos.
>
> *c. Proposição experimental.* As razões de massa dos corpos são independentes do caráter dos estados físicos (dos corpos) que condicionam as acelerações mútuas produzidas, sejam estes estados elétrico, magnético, ou qualquer outro; e elas permanecem, além disto, as mesmas, quer cheguemos a elas por intermediários ou imediatamente.
>
> *d. Proposição experimental.* As acelerações que qualquer número de corpos A, B, C ... induzem em um corpo K, são independentes uma da outra. (O princípio do paralelogramo de forças segue imediatamente daqui.)
>
> *e. Definição.* A força motriz é o produto do valor da massa do corpo pela aceleração induzida neste corpo.

Estas são proposições claras e razoáveis, desde que saibamos o sistema de referência em relação ao qual as acelerações devam ser medidas. Como já vimos nas Seções 13.1 e 13.4, para Mach, um sistema de referência em relação ao qual se deve entender estas acelerações é a Terra no caso de movimentos com pequenas amplitudes espaciais e temporais. Se necessitarmos de uma melhor precisão ou de razões de massa mais corretas, ou ainda se estivermos lidando com corpos astronômicos, então de acordo com Mach precisaremos utilizar as acelerações destes corpos em relação ao referencial das estrelas fixas.

Esta formulação machiana da mecânica é muito melhor do que a formulação newtoniana. Contudo, esta formulação ainda não é suficiente para esclarecer diversas dúvidas. Ela não explica, por exemplo, a proporcionalidade entre a massa inercial e o peso (ou a proporcionalidade entre a massa inercial e a massa gravitacional, m_i e m_g). Esta formulação também não explica porque o conjunto de estrelas fixas ou das galáxias distantes é um bom referencial inercial. Ela também não explica o motivo pelo qual o conjunto das galáxias distantes não gira em relação a um referencial inercial. Esta formulação de Mach também não explica a origem das forças fictícias (como a força centrífuga e a força de Coriolis). Embora esta formulação represente um progresso considerável em relação a Newton, Leibniz e Berkeley, a implementação quantitativa completa da mecânica relacional requer muito mais do que Mach realizou. Apesar disto ele deu um grande passo adiante na direção correta.

13.6 Mach, o Achatamento da Terra e o Pêndulo de Foucault: Equivalência entre os Sistemas Ptolomaico e Copernicano

Além destas clarificações e de sua nova formulação da mecânica, Mach apresentou algumas sugestões e percepções extremamente relevantes ao analisar a experiência do balde de Newton, o achatamento da Terra e o pêndulo de Foucault. Entre estas sugestões, defendeu o movimento relativo e enfatizou que na mecânica devemos ter apenas grandezas relativas (espaço relativo, movimento relativo etc.). Isto é, as leis da física devem depender somente da distância entre corpos, de suas velocidades relativas, assim como de suas acelerações relativas. Para Mach as leis da física não deviam depender de posições, velocidades ou acelerações absolutas. As grandezas absolutas não devem aparecer na teoria já que elas não aparecem nas experiências.

[27][Mac68] e [Mac81, ver especialmente as páginas 84-85].
[28][Mac60, págs. 303-304].

No que diz respeito à experiência do balde, ao achatamento da Terra e ao pêndulo de Foucault, Mach defendeu que todos estes efeitos eram devidos às rotações *relativas* entre estes corpos e os corpos astronômicos distantes. Em particular, defendeu que os efeitos dinâmicos (curvatura da água no balde, precessão do plano de oscilação do pêndulo de Foucault em relação ao solo, assim como o achatamento da Terra) também ocorreriam se pudéssemos manter estes corpos parados, ao mesmo tempo em que girássemos o conjunto de estrelas ao redor deles.

Mach defendeu também que os sistemas ptolomaico e copernicano eram igualmente equivalentes, não apenas para a descrição dos movimentos, mas também na ocorrência dos fenômenos observados (achatamento da Terra, etc.)

Mach apresentou estes pontos de vista em diversos lugares de suas obras *Sobre a definição da massa*,[29] *História e Origem do Princípio de Conservação da Energia*,[30] e *A Ciência da Mecânica*.[31] Apresentamos algumas citações de Mach defendendo estes pontos de vista.

Em *A Ciência da Mecânica*, por exemplo, ele afirmou o seguinte (nossa ênfase):[32]

> Se, em um sistema espacial material, existirem massas com velocidades diferentes, que podem entrar em relações mútuas umas com as outras, então estas massas nos apresentarão forças. Só poderemos decidir quão grandes são estas forças quando soubermos as velocidades a que estas massas são levadas. Massas *em repouso* também representarão forças se *todas* as massas não estiverem em repouso. Pense, por exemplo, no balde girante de Newton no qual a água ainda não está girando. Se a massa m tem a velocidade v_1 e é para ser levada até a velocidade v_2, a força que tem de ser dispendida nela é $p = m(v_1 - v_2)/t$, ou o trabalho que tem de ser feito é $ps = m(v_1^2 - v_2^2)$. *Todas as massas e todas as velocidades e, consequentemente, todas as forças, são relativas.* Não há decisão a que podemos chegar entre absoluto e relativo, ao qual sejamos forçados ou da qual possamos obter qualquer vantagem intelectual ou de outro tipo. Quando autores bem modernos se deixam levar pelos argumentos newtonianos que são deduzidos do balde de água, a distinguir entre movimento relativo e absoluto, eles não refletem que o sistema do mundo é dado apenas *uma vez* para nós e que a visão ptolomaica ou copernicana é *nossa* interpretação, mas ambas são igualmente verdadeiras. *Tente fixar o balde de Newton e girar o céu das estrelas fixas e então prove a ausência de forças centrífugas.*

Mais adiante:[33]

> Vamos examinar agora o ponto sobre o qual Newton se baseia, aparentemente com motivos razoáveis, para sua distinção do movimento absoluto e relativo. Se a Terra sofre uma rotação *absoluta* ao redor de seu eixo, forças centrífugas aparecem na Terra: ela assume uma forma oblata, a aceleração da gravidade é diminuída no equador, o plano do pêndulo de Foucault gira e assim por diante. Todos estes fenômenos desaparecem se a Terra fica em repouso e os outros corpos celestes sofrem um movimento absoluto ao redor dela, tal que a mesma rotação *relativa* seja produzida. Este é, de fato, o caso, se começarmos desde o início [*ab initio*] com a ideia de espaço absoluto. Mas se nos basearmos nos fatos, encontraremos que só temos conhecimento dos espaços e movimentos *relativos. Relativamente, sem considerar o meio desconhecido e desprezado do espaço, os movimentos do universo são os mesmos quer adotemos o ponto de vista ptolomaico ou o copernicano. Ambos pontos de vista são, na verdade, igualmente corretos; apenas que o último é mais simples e mais prático.* O universo não é dado duas vezes, com uma Terra em repouso e com uma Terra em movimento; mas apenas uma vez, com seus movimentos *relativos* sendo os únicos determináveis. Concomitantemente, não nos é permitido dizer como seriam as coisas se a Terra não girasse. Podemos interpretar o caso único que nos é dado de formas diferentes. Se, contudo, o interpretarmos de forma a ficar em conflito com a experiência, nossa interpretação está simplesmente errada. *Os princípios da mecânica podem, de fato, ser concebidos tal que mesmo para rotações relativas surgem as forças centrífugas.*

Esta equivalência entre os sistemas ptolomaico e copernicano já havia aparecido em seu trabalho de 1872 sobre a conservação da energia:[34]

---

[29] [Mac68].
[30] [Mac81].
[31] [Mac60].
[32] [Mac60, pág. 279].
[33] [Mac60, págs. 283-284].
[34] [Mac81, págs. 76-77].

> Obviamente não interessa se pensarmos na Terra como girando ao redor de seu eixo, ou em repouso enquanto os corpos celestes giram ao redor dela. Geometricamente estes são exatamente o mesmo caso de rotação relativa da Terra e dos corpos astronômicos entre si. Apenas que a primeira representação é astronomicamente mais conveniente e mais simples.
>
> Mas se pensarmos na Terra em repouso e os outros corpos astronômicos girando ao redor dela, não existirá achatamento da Terra, não ocorrerá a experiência [do pêndulo] de Foucault, e assim por diante — pelo menos de acordo com nossa concepção usual da lei da inércia. Agora, pode-se resolver esta dificuldade de duas formas: Ou todo movimento é absoluto, ou a lei da inércia está formulada de maneira errada. Neumann preferiu a primeira suposição, eu, a segunda. A lei da inércia tem de ser concebida de tal forma que a mesma coisa aconteça a partir da segunda suposição, assim como acontecia na primeira [suposição]. Desta forma ficará evidente que, na sua expressão, as massas do universo precisam ser consideradas.

A partir destas e de outras citações compreendemos que de acordo com Mach, uma mecânica relacional deve depender apenas de grandezas relativas como a distância entre corpos, $r_{mn} = |\vec{r}_m - \vec{r}_n|$, assim como de suas derivadas temporais: $\dot{r}_{mn} = dr_{mn}/dt$, $\ddot{r}_{mn} = d^2r_{mn}/dt^2$, d^3r_{mn}/dt^3 etc. Além do mais, os conceitos de espaço e tempo absolutos não devem aparecer.

13.7 Mach e a Experiência do Balde: Defesa do Movimento Relativo

Quando Mach discutiu a experiência do balde de Newton, ele enfatizou fortemente o fato de que não podemos desprezar os corpos celestes na análise da experiência. De acordo com Mach, a forma parabólica da água girante é devida à sua rotação relativa em relação às estrelas fixas, não sendo devida à sua rotação em relação ao espaço absoluto. Por exemplo, em seu livro *A Ciência da Mecânica* ele afirmou o seguinte:[35]

> A experiência de Newton com o recipiente de água girando nos informa simplesmente, que a rotação relativa da água em relação aos lados do recipiente *não* produz forças centrífugas perceptíveis, mas que tais forças *são* produzidas por sua rotação relativa em relação à massa da Terra e dos outros corpos celestes. Ninguém é competente para dizer qual seria o resultado da experiência se os lados do recipiente aumentassem em espessura e massa até que eles tivessem finalmente uma espessura de várias léguas. Uma única experiência está diante de nós e nossa função é fazê-la concordar com os outros fatos conhecidos por nós e não com as ficções de nossa imaginação.

O aspecto mais importante a ser enfatizado aqui é que isto não é apenas uma questão de linguagem. Isto é, ao invés do espaço absoluto de Newton poderíamos falar do sistema das estrelas fixas de Mach e então tudo estaria resolvido. Este seria o caso se tudo não passasse de uma questão de linguagem. Mas as citações indicadas anteriormente apontam um significado mais forte. Elas sugerem, na verdade, uma origem dinâmica para a força centrífuga de acordo com Mach. Isto é, a força centrífuga seria uma força real que só apareceria em um sistema de referência em relação ao qual o céu de estrelas fixas estivesse girando. Este aspecto ou esta interpretação não pode ser deduzido a partir das leis do movimento de Newton nem de sua lei da gravitação universal. Vamos enfatizar uma destas citações de Mach mais uma vez:[36]

> Tente fixar o balde de Newton e girar o céu das estrelas fixas e então prove a ausência de forças centrífugas.

A experiência de Newton está representada na figura 13.4.

Isto é, o balde e a água estão girando rapidamente ao redor do eixo do balde. O balde e a água giram juntos com uma velocidade angular $\omega\hat{z}$ em relação à Terra e em relação às estrelas fixas. A superfície da água é côncava. Escolhemos o eixo z ao longo do eixo de simetria do balde, que não precisa estar alinhado com o eixo Norte-Sul da Terra. A rotação do balde e da água em relação à Terra é muito maior do que a rotação diurna da Terra em relação às estrelas fixas. Podemos então considerar a Terra como estando essencialmente sem rotação em relação ao referencial das estrelas fixas nesta experiência.

Podemos distinguir claramente entre os pontos de vista de Newton e de Mach com a figura 13.5.

[35][Mac60, pág. 284].
[36][Mac60, pág. 279].

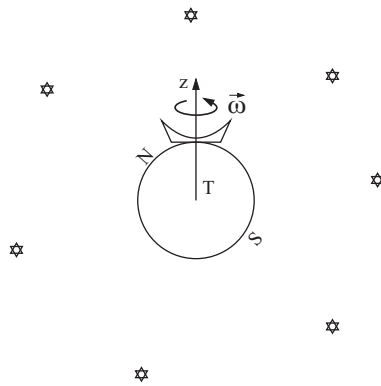



Figura 13.4: Experiência do balde de Newton com o balde e a água girando juntos ao redor do eixo do balde em relação ao solo e em relação às estrelas fixas.

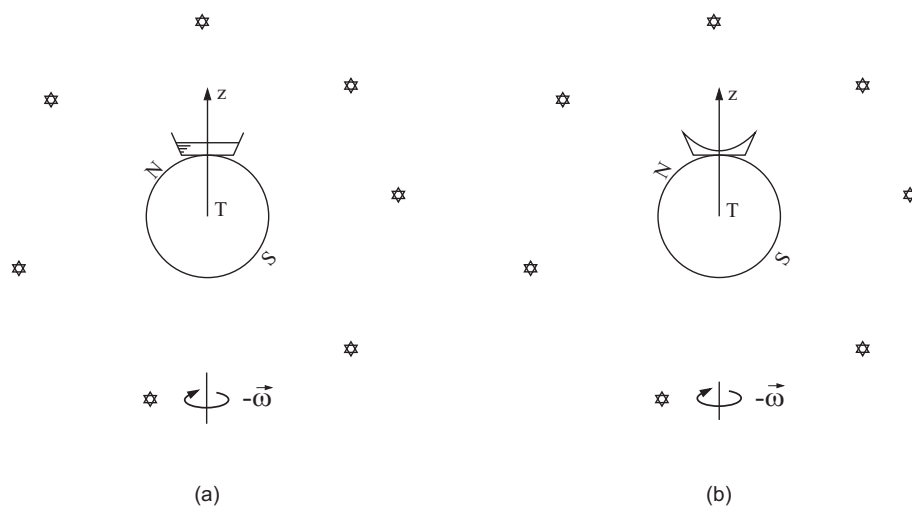



Figura 13.5: (a) O que deve acontecer de acordo com Newton se fixarmos o balde e a água em relação à Terra e mantivermos o céu de estrelas fixas girando rapidamente ao redor do eixo do balde. (b) O que deve acontecer de acordo com Mach se fixarmos o balde e a água em relação à Terra e mantivermos o céu de estrelas fixas girando rapidamente ao redor do eixo do balde.

Supomos aqui na figura 13.5 (a) que o balde, a água e a Terra estão em repouso em relação ao espaço absoluto e que o céu de estrelas gira em relação a este referencial ou em relação à Terra com uma velocidade angular $-\omega\hat{z}$. De acordo com a mecânica newtoniana, a superfície da água vai permanecer plana, já que ela está em repouso em relação ao espaço absoluto. Além disso, o céu de estrelas girando ao redor da água não exerce força gravitacional resultante sobre suas moléculas, como visto pela equação (1.21).

Na figura 13.5 (b), vemos o que se pode esperar desta experiência mental de acordo com Mach. Isto é, desde que a rotação relativa seja a mesma que na experiência original e real de Newton (girar o balde em relação à Terra e às estrelas fixas com $+\omega\hat{z}$), a superfície da água deve permanecer côncava. Para Mach, o espaço absoluto não existe e, portanto, não pode exercer qualquer efeito aqui. Somente a rotação relativa entre a água e as estrelas fixas deve importar.

Concordamos com Mach e não com Newton, em relação ao que iria ocorrer, se esta experiência fosse realizada. Isto é, se a situação cinemática for a mesma (estrelas em repouso em relação a um sistema de referência arbitrário enquanto a água gira com $+\omega\hat{z}$ em relação a ele, ou então a água em repouso em relação a um outro sistema de referência enquanto as estrelas giram com $-\omega\hat{z}$ em relação a ele), então os efeitos dinâmicos também têm de ser os mesmos (a água tem de subir em direção às paredes do balde nos dois casos). Além disso, a concavidade da superfície da água e sua correspondente subida em direção às paredes do balde têm de ter os mesmos valores nos dois casos, já que eles são cinematicamente equivalentes. A única coisa que Mach não sabia é que o agente responsável pela concavidade da superfície da água é a rotação da água em relação às galáxias distantes e não em relação às estrelas fixas. Mais tarde explicamos o motivo

disto.

Obviamente as situações das figuras 13.5 (a) e (b) não são completamente equivalentes à experiência real de Newton. A equivalência cinemática somente seria completa se a Terra girasse junto com as estrelas fixas com $-\omega\hat{z}$ em relação ao balde e em relação à água. Mas estamos desprezando aqui as forças tangenciais ou centrífugas (que estão em um plano perpendicular ao eixo de rotação) exercidas pela Terra girante sobre as moléculas da água. Isto é, estamos assumindo que a força exercida pela Terra sobre a água é essencialmente seu peso apontando para baixo, não interessando a rotação da Terra em relação à água.

Mach disse:[37] "Tente fixar o balde de Newton e girar o céu das estrelas fixas e então prove a ausência de forças centrífugas." A importância principal desta afirmativa foi a de implicar claramente que a força centrífuga tem sua origem na rotação *relativa* entre os corpos que sentem ou sofrem estas forças e as massas distantes do universo. Não interessa se é o corpo ou se são as massas distantes do universo que estão girando. Ou seja, desde que a rotação relativa entre o corpo e as massas distantes seja a mesma, os efeitos das forças centrífugas devem ser os mesmos (achatamento da Terra, curvatura da água, precessão do plano de oscilação do pêndulo de Foucault, etc.). Muitos físicos foram fortemente influenciados por estas ideias de Mach e, no final, isto levou à mecânica relacional. Neste sentido pode-se dizer que as ideias de Mach foram mais influentes do que as ideias similares (mas menos desenvolvidas) de Leibniz e de Berkeley.

Não deixa de ser curioso lembrar que o próprio Newton já havia levantado esta possibilidade, como visto na Subseção 9.2.3. Devido à rotação diária da Terra ao redor de seu eixo, em relação ao pano de fundo dos corpos astronômicos, a Terra fica achatada nos polos. Newton imaginou uma experiência de pensamento na qual a Terra ficasse parada no espaço absoluto e na qual o conjunto dos corpos astronômicos girasse uma vez por dia ao redor do eixo Norte-Sul da Terra. Ele então perguntou:[38]

> Como se fosse a mesma coisa, se Deus, com uma força tremenda, fizesse o céu girar do Oriente para o Ocidente, ou fizesse a Terra girar na direção oposta. *Todavia, quem imaginará que as partes da Terra tendem a afastar-se do seu centro em virtude de uma força aplicada exclusivamente ao céu?* Não é porventura mais condizente pensar que, quando uma força aplicada ao céu o faz tender a afastar-se do centro da revolução assim produzida, ele é, por este motivo, o único corpo que se move no sentido próprio e absoluto? Não é mais condizente pensar que, quando uma força aplicada à Terra faz com que as suas partes tendam a afastar-se do centro de revolução assim produzida, ela é, por este motivo, o único corpo que se move em sentido próprio e absoluto, embora exista o mesmo movimento relativo dos corpos em ambos os casos? Por conseguinte, o movimento físico e absoluto deve ser definido a partir de considerações outras que o deslocamento, uma vez que tal deslocamento constitui uma designação puramente externa.

Este texto de Newton só foi publicado em 1962. Logo ele não chegou a influenciar a Leibniz nem a Berkeley. Estes autores não chegaram a ter esta ideia para explicar a experiência do balde de Newton ou para explicar o achatamento da Terra. Foram necessários 200 anos até que Ernst Mach viesse a pensar independentemente nesta possibilidade que já havia sido antecipada por Newton. Newton rejeitou esta possibilidade, mas teve o grande mérito de cogitar e imaginar uma explicação totalmente relacional para a origem das forças centrífugas. Mach, assim como Newton antes dele, ao pensar em uma explicação para a experiência do balde de Newton que não envolvesse o espaço absoluto, imaginou que as forças centrífugas sobre a água poderiam surgir em virtude de um movimento circular fornecido aos corpos astronômicos do céu ao girarem conjuntamente ao redor do balde. Mach defendeu esta mesma ideia para explicar de maneira relacional o achatamento da Terra, a precessão do plano de oscilação do pêndulo de Foucault, etc. Em vez de rejeitar esta possibilidade, como fez Newton, Mach defendeu-a claramente. É neste sentido que se pode considerar a Ernst Mach como um dos principais pioneiros da mecânica relacional exposta neste livro.

13.8 O Princípio de Mach

Em nenhuma parte de seus escritos Mach especificou claramente alguma coisa que poderia ser chamada de "princípio de Mach." Apesar disto, suas ideias contra o espaço e tempo absolutos de Newton, a favor de uma física relacional, defendendo a realidade física das forças fictícias, sua suposição de que a experiência do balde de Newton mostra uma conexão entre a curvatura da água e as estrelas fixas, etc. passaram a ser chamadas geralmente de princípio de Mach. Apresentamos aqui como diversos autores se referiram a este princípio.[39]

---

[37] [Mac60, pág. 279].
[38] [HH62, págs. 127-128], [New83, págs. 66-67] e [Ear89, pág. 63], nossa ênfase.
[39] [Ass93b].

O primeiro a usar as expressões "princípio de Mach" e "postulado de Mach" foi M. Schlick em 1915.[40] Aparentemente ele se referia à proposta geral de Mach para uma relatividade de todo movimento (ou seja, de que não existem movimentos absolutos em relação ao espaço, mas apenas movimentos de matéria em relação à matéria). De acordo com Schlick, uma consequência desta proposta é que[41]

> [...] tem de se assumir que a causa da inércia está em uma interação das massas.

A expressão passou a ser amplamente conhecida e utilizada a partir de 1918 com o artigo de Einstein sobre os fundamentos da teoria da relatividade geral, que já se encontra traduzido para a língua inglesa:[42]

> A teoria, como ela aparece para mim agora, apoia-se sobre três pontos de vista principais os quais, contudo, não são de forma alguma independentes um do outro [...]:
>
> a) *Princípio da relatividade*: As leis da natureza são meramente afirmações sobre coincidências espaço-temporais; portanto elas somente encontram sua expressão natural em equações geralmente covariantes.
>
> b) *Princípio de equivalência*: A inércia e o peso são idênticos por natureza. Segue-se necessariamente disto e do resultado da teoria especial de relatividade que o 'tensor fundamental' simétrico [$g_{\mu\nu}$] determina as propriedades métricas do espaço, o comportamento inercial dos corpos neste espaço, assim como os efeitos gravitacionais. Vamos denotar o espaço descrito pelo tensor fundamental como o 'campo-G'.
>
> c) *Princípio de Mach*[43]: O campo-G é *completamente* determinado pelas massas dos corpos. Como massa e energia são idênticos de acordo com os resultados da teoria especial da relatividade e a energia é descrita formalmente através do tensor de energia simétrico ($T_{\mu\nu}$), isto significa que o campo-G é condicionado e determinado pelo tensor energia da matéria.

A forma como alguns outros autores apresentaram o princípio de Mach é apresentada a seguir:

"Os referenciais inerciais são aqueles que não estão acelerados em relação às 'estrelas fixas', isto é, em relação a uma média definida convenientemente de toda a matéria do universo."[44]

"Se a inércia não é devida ao movimento em relação ao 'espaço absoluto', ela tem de ser devida à matéria ao redor do corpo."[45]

"O 'programa de Mach' significa a intenção de entender todos os efeitos inerciais como sendo causados por interação gravitacional."[46]

"As propriedades inerciais da matéria no ambiente local são deduzidas de alguma forma a partir da existência das massas distantes do universo e de suas distribuições espaciais."[47]

"O movimento e consequentemente a massa de cada um dos corpos é determinada (causada, produzida) pelos outros corpos no universo."[48]

"A inércia de qualquer corpo é determinada pela distribuição das massas do Universo."[49]

"A massa inercial de um corpo é causada por suas interações com outros corpos no universo."[50]

"As forças inerciais devem ser geradas inteiramente pelo movimento em relação à matéria."[51]

"A força inercial atuando sobre partículas e corpos que estão na Terra e no sistema solar é devida às suas acelerações em relação a toda a matéria que está fora do sistema solar."[52]

Como o próprio Mach não deixou explícito um princípio específico mas apenas ideias gerais, usamos neste trabalho estas ideias gerais como sendo o "princípio de Mach."

---

[40] [Sch15, págs. 170-171] com tradução para a língua inglesa em [Sch79, pág. 185], assim como [Nor95, ver especialmente págs. 10 e 47, nota 2].

[41] [Sch15, pág. 171], [Sch79, págs. 184 e 189, nota 54] e [Nor95, ver especialmente págs. 10 e 47, nota 2].

[42] [Ein18b], [Ein02] e [Nor95, págs. 185-186].

[43] Até o momento eu [Einstein] não havia distinguido entre os princípios (a) e (c), e isto estava confuso. Escolhi o nome 'princípio de Mach' porque este princípio tem o significado de uma generalização da exigência de Mach de que a inércia deve ser deduzida de uma interação dos corpos.

[44] [Sci53].

[45] [Bro55].

[46] [Kae58].

[47] [Sch64].

[48] [Bun66].

[49] [Jam93, pág. 109] e [Jam10, pág. 145].

[50] [Rei73].

[51] [Rai81].

[52] [GG93, pág. 74] e [GG06, pág. 144].

13.9 O Que Mach Não Mostrou

Apresentamos aqui brevemente alguns aspectos que estão incorporados no princípio de Mach mas que ele não implementou quantitativamente.

Em primeiro lugar, Mach não enfatizou que a inércia de um corpo (sua massa inercial ou suas propriedades inerciais de resistir a acelerações) é devida a uma interação *gravitacional* com os outros corpos no universo. Em princípio, esta ligação entre a inércia de um corpo e os corpos celestes distantes poderia ser devida a qualquer tipo de interação conhecida (elétrica, magnética, elástica, ...) ou mesmo a um novo tipo de interação. Em nenhum lugar ele disse que a inércia de um corpo deveria vir de uma interação *gravitacional* com as estrelas fixas. Os primeiros a sugerir isto parecem ter sido os irmãos Friedlaender em 1896.[53] Esta ideia também foi adotada por Höfler em 1900,[54] por W. Hofmann em 1904,[55] por Einstein em 1912,[56] por Reissner em 1914-1915,[57] por Schrödinger em 1925[58] e por muitos outros desde então.[59] No Capítulo 24 discutimos em mais detalhes todos estes aspectos.

Mach também não deduziu a proporcionalidade da massa inercial com o peso (ou a proporcionalidade da massa gravitacional com a massa gravitacional). Mach afirmou o seguinte em *A Ciência da Mecânica*:[60]

> O fato de que a *massa* pode ser ser *medida* pelo *peso*, onde a aceleração da gravidade é constante, também pode ser deduzido de nossa definição de massa.

Não concordamos com Mach sobre esta dedução. O fato de que dois corpos de massas diferentes (e/ou composição química diferentes, e/ou formas diferentes etc.) caem para a Terra, a partir da mesma altura, com a mesma aceleração no vácuo, não pode ser deduzido da definição de Mach para a massa. Esta igualdade das acelerações de queda livre de dois corpos com composições químicas diferentes só pode ser deduzida da experiência. Podemos deixar dois corpos A e B interagir entre si através de uma mola sobre uma mesa sem atrito e determinar a razão de massa inercial entre eles pela definição de Mach, mas disto não se pode concluir que eles vão cair com a mesma aceleração no vácuo. Apenas a experiência indica que este vai ser o caso. Também não há nada na definição de massa inercial de Mach[61] (segundo a qual "a razão de massas de quaisquer dois corpos é o negativo da razão inversa das acelerações mutuamente induzidas destes corpos") que indique uma relação entre massa inercial e peso (ou entre m_i e m_g). Logo, nos parece vazia esta afirmação de Mach de que a partir de sua definição pode ser deduzido que podemos medir a massa inercial de um corpo por seu peso. Newton, neste sentido, foi mais feliz do que Mach e esteve mais de acordo com os fatos ao afirmar que vem *da experiência* (seja a experiência de queda livre ou a experiência com pêndulo) que podemos medir a massa inercial pelo peso, como vimos na Subseção 1.6.1, assim como nas Seções 6.2 e 7.3.

Mach deixou claro que a matéria distante (tal como o conjunto das estrelas fixas) estabelece um excelente sistema de referência inercial. Mas ele também não explicou este fato, nem indicou como poderia surgir esta conexão entre as estrelas distantes e os referenciais inerciais determinados localmente. Ele colocou todos pensando na direção correta, embora não tenha fornecido a chave para desvendar o mistério.

Um outro ponto é que ele não mostrou como o céu de estrelas fixas pode gerar as forças centrífugas ao girar. O mesmo pode ser dito de Leibniz, Berkeley e todos os outros. Isto é, Mach sugeriu que a natureza deve se comportar desta maneira, mas ele não propôs uma lei de força específica que tivesse esta propriedade. Com a lei de Newton da gravitação, uma casca esférica não exerce forças sobre corpos internos, não importando a posição ou movimento dos corpos internos. Este resultado é válido para uma casca esférica parada, equações (1.11) e (1.15), para uma casca acelerada, equação (1.20), para uma casca girando, equação (1.21), ou com uma casca esférica tendo um movimento arbitrário ao redor dos corpos internos. A força newtoniana exercida pela casca esférica é nula em todos estes casos não apenas pelo fato da força entre partículas ser central e variar com o inverso do quadrado da distância, mas também por esta força newtoniana não depender da velocidade nem da aceleração entre os corpos que estão interagindo. Veremos que utilizando uma lei de

[53] [FF96], com tradução parcial para a língua inglesa em [FF95] e tradução completa em [FF07].
[54] [BP95, págs. 21, 24, 34-35, 40-41, 46, 53 e 164].
[55] Tradução parcial para a língua inglesa em [Hof95].
[56] [Ein12], com tradução completa para a língua inglesa em [Ein96] e tradução parcial para a língua inglesa de um trecho relevante em [BP95, pág. 180].
[57] Tradução para a língua inglesa do artigo de 1914 em [Rei95b] e tradução parcial para a língua inglesa do artigo de 1915 em [Rei95a].
[58] [Sch25], com tradução comentada em língua portuguesa em [XA94] e com tradução para a língua inglesa em [Sch95].
[59] Ver [Ass94, Seções 7.6 (Mach's principle) e 7.7 (The Mach-Weber model)] e [Nor95].
[60] [Mac60, pág. 270].
[61] [Mac60, págs. 266 e 303].

Weber para a gravitação é possível mostrar que quando o céu de estrelas (ou o conjunto de galáxias) gira ao redor de um corpo, surgem forças centrífugas de origem gravitacional atuando sobre este corpo. Estas forças fazem com que as partes do corpo que não estão ao longo do eixo de rotação tendam a se afastar do eixo de rotação do conjunto das estrelas (ou a se afastar do eixo de rotação do conjunto de galáxias).

A época já estava madura durante a vida de Mach para uma implementação da mecânica relacional. A ciência física e, em particular, o eletromagnetismo, estavam altamente desenvolvidos durante a segunda metade do século passado. A força relacional de Weber para o eletromagnetismo apareceu em 1846. Mach mencionou estre trabalho de Weber em seu artigo *Sobre os conceitos fundamentais da eletrostática*, apresentado em 1883, mas não o relacionou com o princípio de Mach. A única citação que conhecemos feita por Mach mencionando Wilhelm Weber ou seu trabalho é a seguinte:[62]

> [...] Então os fatos precisam ser descritos de tal forma que indivíduos em todos os lugares e em todas as épocas possam, a partir de elementos facilmente obtidos, juntar os fatos no pensamento de forma precisa, e reproduzi-los a partir da descrição. Isto é feito com a ajuda dos conceitos métricos e das medidas internacionais.
>
> O trabalho que foi iniciado neste sentido no período do desenvolvimento puramente científico da ciência, especialmente por Coulomb (1784), Gauss (1833), e Weber (1846), foi fortemente estimulado pelas exigências das grandes realizações técnicas que surgiram desde a colocação do primeiro cabo transatlântico, e foi concluído de maneira brilhante pelos trabalhos da Associação Britânica, 1861, e do Congresso de Paris, 1881, principalmente através dos esforços de Sir William Thomson.

Mach estava aqui citando as contribuições de Coulomb,[63] Gauss[64] e Weber para o estabelecimento de um sistema internacional de unidades para as grandezas eletromagnéticas.[65] Ou seja, ele não estava se referindo especificamente à força de Weber dada pela equação (2.21).

Uma força similar à de Weber para o eletromagnetismo foi aplicada para a gravitação na década de 1870. Nesta mesma época Mach estava publicando suas críticas sobre a mecânica newtoniana e propondo sua nova formulação. Mach trabalhou com muitas áreas da física, incluindo a mecânica, a gravitação, a termodinâmica, a fisiologia, a acústica e a óptica. No que diz respeito ao eletromagnetismo, sua tese de doutorado, de 1860, tratou da carga elétrica e da indução eletromagnética. Mach nunca relacionou suas críticas à mecânica newtoniana com a lei de Weber, assim como nunca sugeriu que os problemas apontados por ele na mecânica clássica poderiam ser solucionados com uma força de Weber para a gravitação.

Outras pessoas nesta época conheciam a teoria de Weber, porém não fizeram a conexão entre as ideias de Mach e o trabalho de Weber. Se qualquer pessoa tivesse a percepção correta naquela época de juntar as duas coisas, a mecânica relacional poderia ter surgido há um século atrás. Todas as ideias, conceitos, leis de força e ferramental matemático estavam disponíveis durante a segunda metade do século passado para implementar a mecânica relacional. Mas isto simplesmente não aconteceu, como mostra a história. A mecânica relacional só foi descoberta muitos anos depois.

Antes de entrar na nova visão de mundo fornecida pela mecânica relacional, apresentamos as teorias da relatividade de Einstein e os problemas que elas trouxeram para a física.

---

[62] [Mac10a, pág. 108].
[63] [Cou85a].
[64] [Gau33] e [Gau94], com tradução para a língua portuguesa em [Ass03b].
[65] [Web46], com tradução para a língua inglesa em [Web07].

Parte IV

Teorias da Relatividade de Einstein

Albert Einstein (1879-1955) publicou sua teoria especial da relatividade em 1905, enquanto que a versão final da teoria da relatividade geral foi publicada em 1916. Ao desenvolver estas teorias ele foi fortemente influenciado pelo livro de Mach *A Ciência da Mecânica*.[66] Em suas *Notas Autobiográficas* Einstein disse:[67] "Esse livro exerceu em mim uma influência profunda quando era ainda estudante." Nas últimas décadas a física, e a mecânica em particular, passaram a ser dominadas pelas ideias de Einstein, desde que ele ficou famoso após 1919 com a expedição inglesa para determinar o eclipse solar, que aparentemente confirmou suas previsões para o desvio da luz. Desde então a mecânica newtoniana passou a ser considerada apenas como uma aproximação das teorias "corretas" de Einstein.

Defendemos aqui que as teorias de Einstein não implementaram as ideias de Mach. Além do mais, defendemos que a Mecânica Relacional é melhor do que as teorias de Einstein para descrever os fenômenos observados na natureza.

[66][Pai82, págs. 282-288].
[67][Ein82, pág. 29].

Capítulo 14

Teoria da Relatividade Especial

A teoria da relatividade especial de Einstein (também chamada de teoria da relatividade restrita) foi apresentada em seu artigo de 1905 intitulado "Sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento," que já está traduzido para as línguas inglesa e portuguesa,[1] de onde tiramos as citações. Einstein e seus seguidores criaram muitos problemas com esta teoria. A seguir listamos e analisamos alguns deles em cada Seção.

14.1 Indução Eletromagnética

14.1.1 Assimetria Apontada por Einstein

Einstein começou seu artigo com o seguinte parágrafo:[2]

> Como é sabido, a Eletrodinâmica de Maxwell — tal como atualmente se concebe — conduz, na sua aplicação a corpos em movimento, a assimetrias que não parecem ser inerentes aos fenômenos. Consideremos, por exemplo, as ações eletrodinâmicas entre um ímã e um condutor. O fenômeno observável depende aqui unicamente do movimento relativo do condutor e do ímã, ao passo que, segundo a concepção habitual, são nitidamente distintos os casos em que o móvel é um, ou o outro, destes corpos. Assim, se for móvel o ímã e estiver em repouso o condutor, estabelecer-se-á em volta do ímã um campo elétrico com um determinado conteúdo energético, que dará origem a uma corrente elétrica nas regiões onde estiverem colocadas porções do condutor. Mas se é o ímã que está em repouso e o condutor que está em movimento, então, embora não se estabeleça em volta do ímã nenhum campo elétrico, há no entanto uma força eletromotriz que não corresponde a nenhuma energia, mas que dá lugar a correntes elétricas de grandeza e comportamento iguais às que tinham no primeiro caso as produzidas por forças elétricas — desde que, nos dois casos considerados, haja identidade no movimento relativo.

A assimetria da indução eletromagnética citada no primeiro parágrafo por Einstein não aparece na eletromagnetismo de Maxwell, contrariamente ao que Einstein afirmou. Ela só aparece com uma interpretação específica da formulação de Lorentz para a eletrodinâmica. Esta assimetria também não existia para Faraday, que foi quem descobriu experimentalmente este fenômeno. Ela também não existe na eletrodinâmica de Weber. Nas próximas Subseções veremos como este fenômeno foi interpretado por estes autores.

14.1.2 Esta Assimetria Não Existe no Fenômeno Observado Experimentalmente

Esta assimetria não ocorre no fenômeno observado. A experiência descrita por Einstein está ilustrada na figura 14.1.

Temos um ímã I horizontal com polos magnéticos N e S. O eixo horizontal aponta ao longo do eixo x, com $\hat{x}$ sendo o versor unitário apontando do ímã para o circuito C. O circuito está no plano vertical yz normal ao eixo x. Na situação da figura 14.1 (a) o ímã está deslocando-se em relação ao solo com velocidade $\vec{v}_I = v\hat{x}$, com $v > 0$, enquanto o circuito está parado. Já na figura 14.1 (b) o ímã está parado, enquanto o circuito está deslocando-se em relação ao solo com velocidade $\vec{v}_C = -v\hat{x}$.

[1] [Ein05], [Ein52c] e [Ein78c].
[2] [Ein78c, pág. 47].

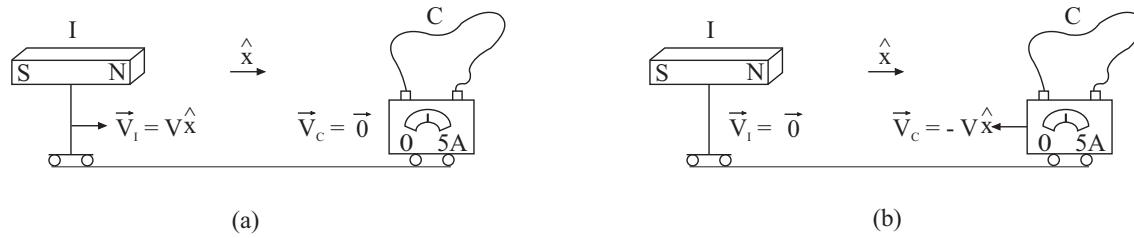



Figura 14.1: Ímã I com seu eixo perpendicular ao plano de um circuito C. (a) Ímã deslocando-se em relação ao solo com velocidade $\vec{v}_I = v\hat{x}$, com $v > 0$, enquanto o circuito está parado. (b) Ímã parado, enquanto o circuito está deslocando-se em relação ao solo com velocidade $\vec{v}_C = -v\hat{x}$. Nos dois casos flui a mesma corrente i pelo circuito.

Nos dois casos existe a mesma aproximação entre o ímã e o circuito com uma velocidade *relativa* dada por v. A corrente induzida no circuito pelo ímã depende de vários fatores, tais como a intensidade do ímã, o formato do circuito, a resistência do circuito, assim como a distância entre o ímã e o circuito. Além disso, a experiência mostra que a corrente induzida depende também da velocidade relativa entre o ímã e o circuito sendo, em particular, proporcional a esta velocidade relativa. Ao representar a intensidade da corrente induzida por i e a proporcionalidade pelo símbolo α, esta proporcionalidade entre a corrente induzida e a velocidade relativa entre o ímã e o circuito pode ser expressa matematicamente da seguinte forma:

$$i \; \alpha \; |\vec{v}_I - \vec{v}_C| \; . \tag{14.1}$$

No caso da figura 14.1 (a) temos $\vec{v}_C^a = v\hat{x}$ e $\vec{v}_I^a = \vec{0}$. Já no caso da figura 14.1 (b) temos $\vec{v}_C^b = \vec{0}$ e $\vec{v}_I^b = -v\hat{x}$. Nestes dois casos a velocidade relativa de aproximação entre o ímã e o circuito é a mesma, a saber:

$$\vec{v}_C^a - \vec{v}_I^a = \vec{v}_C^b - \vec{v}_I^b = v\hat{x} \; . \tag{14.2}$$

A velocidade relativa entre o ímã e o circuito é a mesma nos dois casos. Experimentalmente observa-se que a corrente i induzida no circuito é a mesma nos dois casos: $i^a = i^b = i$.

14.1.3 Esta Assimetria Não Existia para Faraday

Esta assimetria na indução eletromagnética apontada por Einstein não existia nas concepções de Faraday, que foi quem descobriu o fenômeno. Seu artigo fundamental de 1831 já se encontra totalmente traduzido para a língua portuguesa, de onde tiramos as citações.[3] Em 1831 ele obteve que podia induzir uma corrente elétrica em um circuito secundário se variasse a intensidade da corrente no circuito primário mas que, enquanto a corrente no circuito primário permanecesse constante, nenhuma indução era produzida:[4]

> 10. Duzentos e três pés de fio de cobre foram enrolados em torno de um grande bloco de madeira; outros duzentos e três pés de um fio similar foram interpostos como uma espiral entre as voltas do primeiro enrolamento, e foi utilizado barbante para evitar contato metálico em todo lugar. Uma dessas hélices foi conectada com um galvanômetro e a outra com uma bateria de cem pares de placas de quatro polegadas quadradas, com cobres duplos, e bem carregada. Quando o contato foi feito, houve um efeito repentino e muito pequeno no galvanômetro e houve também um pequeno efeito similar quando o contato com a bateria foi rompido. Mas enquanto a corrente voltaica estava atravessando continuamente uma hélice, não podia ser observada qualquer influência sobre o galvanômetro, nem qualquer efeito como indução sobre a outra hélice, embora a potência ativa da bateria fosse grande, como provado pelo aquecimento total de sua própria hélice, e pelo brilho da descarga, quando feita através do carvão.

Ele também descobriu que podemos induzir uma corrente no circuito secundário havendo uma corrente constante no circuito primário, desde que movesse o circuito primário ou o circuito secundário em relação ao laboratório, de tal forma a resultar um movimento relativo entre ambos:[5]

---

[3] [Far11].
[4] [Far52, Ver especialmente a Série I, §10].
[5] [Far52, Ver, por exemplo, a Série I, §18 e 19].

> 18. Nas experiências precedentes, os fios foram colocados próximos uns aos outros e o contato do fio indutor com a bateria foi feito quando o efeito indutivo era requerido; mas como podia se supor que a ação particular era exercida somente nos momentos de fazer e romper o contato, a indução foi produzida de outra maneira. Diversos pés de fio de cobre foram esticados em grandes formas em ziguezague, representando a letra W, sobre uma superfície de uma placa larga; um segundo fio foi esticado em formas exatamente similares sobre uma segunda placa, de modo que, quando trazido perto do primeiro [fio], os fios devessem tocar-se em toda parte, exceto que foi interposta uma folha de papelão. Um desses fios foi conectado com o galvanômetro e o outro com uma bateria voltaica. O primeiro fio foi movido, então, em direção ao segundo e, enquanto se aproximava, a agulha era desviada. Quando era afastado, a agulha era desviada na direção oposta. Ao aproximar e afastar os fios, simultaneamente com as vibrações da agulha, essas vibrações logo se tornavam muito grandes, mas quando os fios paravam de aproximar-se ou de afastar-se, a agulha do galvanômetro logo voltava para sua posição usual.
>
> 19. Quando os fios se aproximavam, a corrente induzida era na direção *contrária* à corrente indutora. Quando os fios se afastavam, a corrente induzida era *na mesma* direção que a corrente indutora. Quando os fios permaneciam estacionários, não havia corrente induzida (54).

Ele também podia induzir uma corrente em um circuito secundário parado no laboratório caso aproximasse ou afastasse um ímã permanente do circuito. Esta indução também ocorria caso mantivesse o ímã em repouso em relação à Terra, enquanto movesse o circuito secundário:[6]

> 39. Mas como poderia se supor que em todas as experiências anteriores desta Seção, que a corrente induzida momentânea era excitada por algum efeito peculiar ocorrendo durante a formação do ímã, e não apenas por sua aproximação virtual, foram feitos as seguintes experiências: todas as pontas similares da combinação oca de hélices (34) foram unidas pelo fio de cobre, formando duas terminações gerais, e estas foram conectadas ao galvanômetro. O cilindro de ferro doce (34) foi removido, em seu lugar foi usado um ímã cilíndrico com diâmetro de três quartos de polegada e comprimento de oito polegadas e meia. Uma ponta desse ímã foi introduzida no eixo da hélice (Figura 4) e, então, a agulha do galvanômetro estando em repouso, o ímã foi subitamente empurrado para dentro [da hélice]; imediatamente, a agulha foi desviada na mesma direção, como se o ímã tivesse sido formado por qualquer um dos dois processos anteriores (34, 36). Sendo deixado dentro [da hélice], a agulha voltava a sua posição inicial e, então, o ímã sendo retirado, a agulha era desviada na direção oposta. Esses efeitos não eram grandes, mas, introduzindo e retirando o ímã, para que cada vez o impulso fosse adicionado àqueles previamente transmitidos para a agulha, podia-se fazer a agulha vibrar através de um arco de 180° ou ainda maior.

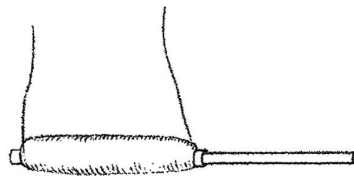



Figura 14.2: Figura 4 do artigo de 1831 de Faraday.

> 40. Nesta experiência, o ímã não pode atravessar a hélice inteiramente, pois então ocorre uma segunda ação. Quando o ímã é introduzido, a agulha no galvanômetro é desviada em uma certa direção, mas estando dentro, se for empurrado completamente ou retirado, a agulha é desviada em uma direção oposta à direção que havia sido produzida anteriormente. Quando se atravessa o ímã com um movimento contínuo, a agulha se desvia de um jeito, para de repente e, finalmente, desvia-se para o outro lado.
>
> 41. Se uma hélice oca como aquela descrita (34) for colocada de Leste a Oeste (ou em qualquer outra posição constante), e um ímã for mantido de Leste a Oeste, seu polo marcado[7] sempre

[6][Far52, Ver, por exemplo, §39-43 e 50-54].

[7]Faraday explicou no §44 que “para evitar qualquer confusão em relação aos polos do ímã, designarei o polo apontando para o Norte por polo marcado” [...]

estando de um lado, então, por qualquer extremidade da hélice que o ímã penetre e, consequentemente, qualquer que seja o polo do ímã que entre primeiro, ainda assim a agulha é desviada da mesma maneira. Por outro lado, qualquer que seja a direção seguida na retirada do ímã, a deflexão é constante, mas contrária àquela devida a sua entrada.

42. Esses efeitos são simples consequências da lei a ser descrita adiante (114).

43. Quando foi feita uma longa hélice a partir das oito hélices elementares, o efeito não foi tão grande quanto no arranjo descrito. Quando foi usada apenas uma das oito hélices, o efeito também foi muito diminuído. Todos os cuidados foram tomados para prevenir contra qualquer ação direta do ímã indutor sobre o galvanômetro, e encontrou-se que, movendo o ímã na mesma direção e no mesmo grau fora da hélice, não foi produzido nenhum efeito na agulha [do galvanômetro].

[...]

50. Também foram produzidos efeitos potentes quando a hélice com o cilindro de ferro foi aproximada dos polos do ímã, mas sem fazer contato. Quando aproximou-se a hélice, sem o cilindro de ferro e, consequentemente, não contendo nenhum metal, exceto cobre, ou quando ela foi colocada entre os polos (44), a agulha foi deslocada 80°, 90°, ou mais, da sua posição natural. A força indutiva era certamente maior, quanto mais próximo aos polos era colocada a hélice, com ou sem seu cilindro de ferro, mas de outra maneira os mesmos efeitos eram produzidos, quer a hélice, etc. fosse ou não fosse colocada em contato com o ímã; isto é, nenhum efeito permanente foi produzido no galvanômetro, e os efeitos de aproximação foram inversos aos de remoção (30).

51. Quando foi introduzido um pino de cobre correspondente ao cilindro de ferro, não foi produzido nenhum efeito maior pela hélice do que sem ele. Mas quando [o pino de cobre] foi substituído por um fio de ferro grosso, a indução eletromagnética foi sensivelmente maior.

52. A direção da corrente elétrica produzida por todas essas experiências com a hélice foi a mesma já descrita (38) como sendo a direção obtida com as barras magnéticas mais fracas.

53. Uma espiral contendo quatorze pés de fio de cobre, ao ser conectada com o galvanômetro, e aproximada diretamente em direção ao polo marcado na linha do seu eixo, afetou fortemente o instrumento; a corrente induzida no galvanômetro foi na direção oposta à corrente considerada teoricamente pelo Sr. Ampère como existindo no ímã (38), ou como a corrente em um eletroímã de mesma polaridade. À medida que a espiral foi afastada, a corrente induzida foi invertida.

54. Uma corrente de oitenta pares de placas de quatro polegadas foi transmitida através de uma espiral similar para formar um eletroímã e, então, foi aproximada à outra espiral conectada com o galvanômetro (53); a agulha vibrou, indicando uma corrente na espiral do galvanômetro oposta à corrente na espiral da bateria (18, 26). Afastando a última espiral, a agulha foi para a direção oposta.

Para explicar suas observações, Faraday chegou na seguinte lei:[8]

114. A relação satisfeita entre o polo magnético, o fio ou metal em movimento, e a direção da corrente produzida, isto é, *a lei* que governa a evolução da eletricidade por indução eletromagnética, é muito simples, embora bem difícil de expressar. Se na Figura 24 PN representa um fio horizontal passando por um polo magnético marcado, de tal forma que a direção de seu movimento coincida com a linha curva indo de baixo para cima ou caso seu movimento paralelo a si próprio ocorra em uma linha tangencial à linha curva, mas na direção geral das setas, ou se ele passa o polo em outras direções, mas de tal forma a cortar as curvas magnéticas[9] na mesma direção geral, ou no mesmo lado em que elas seriam cortadas pelo fio caso estivessem se movendo ao longo da linha curva tracejada, então a corrente de eletricidade no fio vai de P para N. Se o fio for levado em direções opostas, a corrente elétrica será de N para P.

Ou se o fio estiver na posição vertical, representada por $P'N'$, e se for levado em direções similares, coincidindo com a curva horizontal curva, de tal maneira a cortar as curvas magnéticas no mesmo lado que ela, a corrente será de P' para N'. Se o fio for considerado uma tangente à superfície curva do ímã cilíndrico, e se for levado ao redor dessa superfície em qualquer outra posição, ou

[8] [Far52, §114, pág. 281].

[9] [Nota do Faraday:] Entendo por *linhas magnéticas*, as linhas das forças magnéticas, modificadas de qualquer maneira pela justaposição de polos, que seriam representadas por limalha de ferro; ou aquelas linhas em relação às quais seria tangente uma pequena agulha magnética.

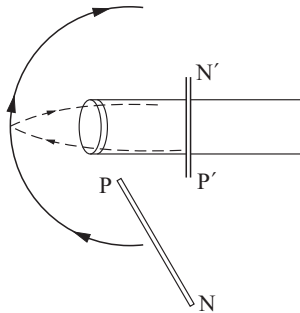



Figura 14.3: Figura 24 do artigo de 1831 de Faraday.

> se o próprio ímã for girado ao redor de seu eixo, de tal forma a trazer qualquer parte oposta ao fio tangente, ainda, se depois disso o fio for deslocado nas direções indicadas, a corrente de eletricidade será de P para N; se ele for deslocado na direção oposta, de N para P, de tal forma que, no que diz respeito aos movimentos do fio passando pelo polo, eles podem ser reduzidos a dois [movimentos], diretamente opostos entre si: um [movimento] que produz uma corrente de P para N e o outro [movimento que produz uma corrente] de N para P.

Assim, de acordo com Faraday, a explicação da indução quando aproximamos um circuito a um ímã, ou vice-versa, é baseada na existência real de linhas de força magnéticas. Além disso, sua explicação é baseada no circuito elétrico cortando estas linhas. Faraday nunca duvidou que estas linhas de força compartilhavam totalmente do movimento translacional do ímã.[10] Ou seja, para Faraday se movermos um ímã (ou um fio com corrente) com uma velocidade linear constante $\vec{V}$ em relação ao laboratório, as linhas do campo magnético $\vec{B}$ (ou linhas de força) também vão se mover com esta mesma velocidade $\vec{V}$ constante em relação ao laboratório, acompanhando o movimento do ímã, figura 14.4.

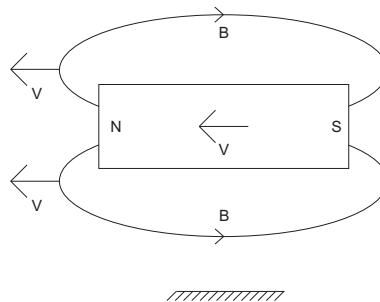



Figura 14.4: Faraday acreditava que quando um ímã deslocava-se em relação ao solo com uma velocidade linear $\vec{V}$ constante, suas linhas de campo magnético $\vec{B}$ também se deslocariam em relação ao solo com a velocidade $\vec{V}$.

Para Faraday a explicação para a corrente induzida no circuito secundário quando havia uma velocidade relativa entre ele e o ímã era sempre a mesma. No caso em que o ímã estava parado no laboratório, Faraday concebia que suas linhas de força também ficavam paradas. Quando o circuito se deslocava no laboratório, ele cortava estas linhas de força e era induzida uma corrente no fio. No caso em que o fio estava parado no laboratório e no qual o ímã se deslocava no laboratório, Faraday concebia que as linhas de força produzidas pelo ímã também se deslocavam junto com o ímã em relação ao laboratório, de tal forma que elas cortavam o fio durante seu movimento, gerando uma corrente induzida no fio.

14.1.4 Esta Assimetria Não Existia para Maxwell

Maxwell tinha os mesmos pontos de vista que Faraday em relação a este assunto e não via nenhuma "assimetria" para a explicação das experiências de indução, não interessando se era o circuito ou o ímã que se moviam em relação ao laboratório. Por exemplo, no §531 de seu livro *Um Tratado sobre a Eletricidade e*

[10][Mil81, pág. 155].

o Magnetismo, muitas vezes chamado simplesmente de *Treatise*, ele resumiu as experiências de Faraday em uma única lei:[11]

> O conjunto destes fenômenos pode ser resumido em uma lei. Quando o número das linhas de indução magnética que atravessam um circuito secundário na direção positiva é alterado, uma força eletromotriz age ao redor do circuito, a qual é medida pela razão de diminuição da indução magnética através do circuito.

Maxwell afirmou claramente no §541 desta obra que estas linhas de indução magnética (ou linhas de força) movem-se em relação ao laboratório quando o ímã está em movimento em relação ao laboratório:[12]

> A concepção que Faraday tinha da continuidade das linhas de força exclui a possibilidade de elas começarem a existir repentinamente em um lugar onde não havia nenhuma [linha de força] antes. Se, portanto, o número de linhas que atravessam um circuito condutor é variado, só pode ser devido ao movimento do circuito através das linhas de força, ou, senão, de outro modo pelas linhas de força movendo-se através do circuito. Em qualquer caso uma corrente é gerada no circuito.

Ou seja, de acordo com Maxwell, a explicação para a indução no circuito secundário é sempre a mesma, dependendo apenas do movimento relativo entre este circuito secundário e as linhas do campo magnético geradas pelo ímã ou pelo circuito primário com corrente. Sempre que o número das linhas de campo magnético que atravessam um circuito secundário for alterado, seja pelo movimento do circuito em relação ao laboratório, ou seja pelo movimento das linhas de campo magnético em relação ao laboratório, vai haver uma força eletromotriz atuando sobre o circuito secundário e gerando nele uma corrente induzida.

14.1.5 Esta Assimetria Não Existe na Eletrodinâmica de Weber

Esta assimetria apontada por Einstein também não aparece na eletrodinâmica de Weber, embora nesta eletrodinâmica não se utilize o conceito de linhas de força, de linhas de indução magnética ou de linhas do campo magnético $\vec{B}$. Como visto na Seção 2.8, a eletrodinâmica de Weber depende apenas das distâncias relativas, velocidades relativas e acelerações relativas entre as cargas interagentes.[13] Os conceitos de campo elétrico e campo magnético não precisam ser introduzidos nesta eletrodinâmica. Parece-nos que Einstein não tinha conhecimento da eletrodinâmica de Weber, já que não conhecemos nenhum trabalho de Einstein onde ele a cite ou em que mencione ao menos o nome de Wilhelm Weber. Apesar disto, esta foi a principal teoria eletromagnética na Alemanha durante a maior parte da segunda metade do século passado. Ela também foi discutida em detalhes no último Capítulo do *Treatise* de Maxwell. Parece também que Einstein nunca leu este livro de Maxwell, embora ele tenha sido publicado em 1873 e uma tradução para o alemão tenha aparecido em 1893.[14]

O fenômeno da indução é sempre interpretado da mesma maneira na eletrodinâmica de Weber, não interessando se o ímã está parado e o circuito deslocando-se no laboratório, ou se o circuito está parado e o ímã deslocando-se no laboratório. A única grandeza importante é o valor a velocidade relativa entre o ímã e o circuito elétrico onde está sendo induzida a corrente. A velocidade de qualquer destes corpos (ímã ou circuito elétrico) em relação ao observador (sistema de referência) ou em relação ao laboratório não tem importância na explicação desta experiência dentro da eletrodinâmica de Weber.

Apresentamos aqui os aspectos gerais da explicação desta experiência baseada na eletrodinâmica de Weber. O ímã é representado pelo circuito 1 por onde flui a corrente I_1. Queremos saber a corrente I_2 que será induzida em um circuito secundário 2 devida ao movimento de ambos em relação ao laboratório. Consideramos então dois circuitos rígidos 1 e 2 que se movem em relação à Terra com velocidades translacionais $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$, respectivamente, sem qualquer rotação em relação à Terra, figura 14.5.

Vamos supor que não existam baterias ou outras fontes de corrente conectadas ao circuito 2. Vamos representar a resistência elétrica do circuito 2 por R_2. Neste caso, a corrente induzida que fluirá no segundo circuito devida à indução exercida pelo primeiro circuito será dada por:

$$I_2 = \frac{fem_{12}}{R_2} \ , \tag{14.3}$$

[11] [Max54, Vol. 2, §531, pág. 179].
[12] [Max54, Vol. 2, §541, pág. 189].
[13] [Ass92b, Capígulo 2], [Ass94, Capítulo 3] e [Ass95b, Capítulo 2].
[14] [Mil81, págs. 138-139, nota 7].

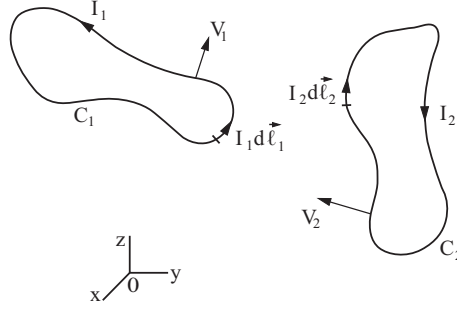



Figura 14.5: Dois circuitos rígidos transladando em relação ao solo.

onde fem_{12} é a força eletromotriz induzida pelo primeiro circuito sobre o segundo.

Seja um elemento de corrente neutro $I_1 d\vec{\ell}_1$ (composto de cargas iguais e opostas, dq_{1+} e $dq_{1-} = -dq_{1+}$) localizado em $\vec{r}_1$ atuando sobre um outro elemento de corrente neutro $I_2 d\vec{\ell}_2$ (também composto de outras cargas iguais e opostas, dq_{2+} e $dq_{2-} = -dq_{2+}$) localizado em $\vec{r}_2$, figura 14.6.

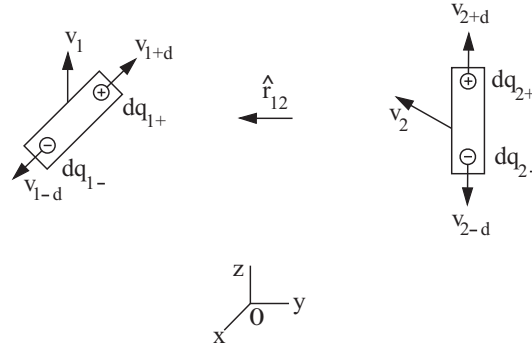



Figura 14.6: Dois elementos de corrente neutros.

A partir da figura 14.6 pode-se obter da eletrodinâmica de Weber a força eletromotriz infinitesimal exercida por $I_1 d\vec{\ell}_1$ sobre $I_2 d\vec{\ell}_2$, representada por $d^2 fem_{12}$, como sendo dada por:[15]

$$d^2 fem_{12} = -\frac{dq_{1+}}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\hat{r}_{12}\cdot d\vec{\ell}_2}{r_{12}^2 c^2}\left\{2\vec{V}_{12}\cdot(\vec{v}_{1+d}-\vec{v}_{1-d}) - 3(\hat{r}_{12}\cdot\vec{V}_{12})\left[\hat{r}_{12}\cdot(\vec{v}_{1+d}-\vec{v}_{1-d})\right] + \vec{r}_{12}\cdot(\vec{a}_{1+}-\vec{a}_{1-})\right\} \ . \tag{14.4}$$

Aqui $r_{12} = r$ é a distância entre os elementos de corrente, $\hat{r}_{12} = \hat{r}$ é o vetor unitário apontando de 2 para 1, $\vec{V}_{12} \equiv \vec{V}_1 - \vec{V}_2$, enquanto que $\vec{v}_{1+d}$ e $\vec{v}_{1-d}$ são as velocidades de arraste (*drifting*) das cargas positiva e negativa do elemento de corrente 1 (isto é, suas velocidades em relação ao fio). Já $\vec{a}_{1+}$ e $\vec{a}_{1-}$ são suas acelerações em relação ao referencial terrestre que estamos considerando aqui.

Integrando este resultado sobre os circuitos fechados C_1 e C_2 obtemos a expressão usual da lei de Faraday, a saber:[16]

$$fem_{12} = -\frac{\mu_o}{4\pi}\frac{d}{dt}\left[I_1\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{(\hat{r}_{12}\cdot d\vec{\ell}_1)(\hat{r}_{12}\cdot d\vec{\ell}_2)}{r_{12}}\right] = -\frac{\mu_o}{4\pi}\frac{d}{dt}\left[I_1\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{d\vec{\ell}_1\cdot d\vec{\ell}_2}{r_{12}}\right] = -\frac{d}{dt}(I_1 M) \ . \tag{14.5}$$

Aqui $M = (\mu_o/4\pi)\oint_{C_1}\oint_{C_2} d\vec{\ell}_1\cdot d\vec{\ell}_2/r$ é o coeficiente de indutância mútua entre os circuitos.

Supondo que I_1 é constante no tempo e supondo circuitos rígidos que transladam como um todo, sem girar, com velocidades constantes $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$ em relação ao laboratório, esta fem pode ser escrita na eletrodinâmica de Weber da seguinte forma:

[15][Ass92b, Seção 4.3], [Ass94, Seção 5.3] e [Ass95b, Seções 5.3 e 5.4].
[16][Ass92b, Seção 4.3], [Ass94, Seção 5.3] e [Ass95b, Seções 5.3 e 5.4].

$$fem_{12} = -\frac{\mu_o}{4\pi} I_1 \oint_{C_1} \oint_{C_2} d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2 \frac{d}{dt} \frac{1}{r_{12}} = \frac{\mu_o}{4\pi} I_1 (\vec{V}_1 - \vec{V}_2) \cdot \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{(d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2)\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} . \qquad (14.6)$$

Este resultado também pode ser obtido diretamente na eletrodinâmica de Weber utilizando a energia de interação entre os circuitos.

O que é importante perceber é que a expressão obtida com a eletrodinâmica de Weber depende apenas da velocidade relativa entre os circuitos, $\vec{V}_1 - \vec{V}_2$. Isto mostra que sempre que esta velocidade relativa tiver o mesmo valor, também terá o mesmo valor a corrente induzida no circuito 2. Por exemplo, na primeira situação discutida por Einstein, representada aqui pela letra a, temos o ímã em movimento em relação à Terra ou ao laboratório, $\vec{V}_{1a} = \vec{V}$, enquanto que o circuito está em repouso na Terra, $\vec{V}_{2a} = \vec{0}$. Já na segunda situação discutida por Einstein, representada aqui pela letra b, temos o ímã em repouso no laboratório, $\vec{V}_{1b} = \vec{0}$, enquanto que o circuito está se movendo na direção oposta em relação à Terra ou ao laboratório, $\vec{V}_{2b} = -\vec{V}$. Como o movimento relativo entre o ímã e o circuito é o mesmo nas duas situações, $\vec{V}_{1a} - \vec{V}_{2a} = \vec{V}_{1b} - \vec{V}_{2b} = \vec{V}$, a eletrodinâmica de Weber prevê a mesma corrente induzida nos dois casos, sendo este fato corroborado pelas observações experimentais.

14.1.6 Origem da Assimetria Apontada por Einstein

Se a assimetria apontada por Einstein não se encontra nos trabalhos de Faraday, Maxwell e Weber, de onde ela surgiu? Einstein afirmou que esta assimetria surgia na maneira com que se concebia em sua época a eletrodinâmica de Maxwell. Parece que Einstein estava seguindo a discussão deste fenômeno como apresentada por Föppl em seu livro de 1894, que Einstein estudou durante 1896-1900.[17] Quando mencionou a assimetria da indução eletromagnética, Einstein aparentemente estava se referindo a uma interpretação bem específica da formulação de Lorentz para a eletrodinâmica.[18]

De acordo com Lorentz, quando o ímã está em movimento com uma velocidade $\vec{v}_m$ em relação ao éter, ele gera no éter não apenas um campo magnético mas também um campo elétrico dado por $\vec{E} = \vec{B} \times \vec{v}_m$. Este campo elétrico agiria então no circuito que está em repouso em relação ao éter, induzindo uma corrente elétrica no circuito. Se o ímã estiver em repouso no éter, ele vai gerar no éter apenas um campo magnético $\vec{B}$ e nenhum campo elétrico, de tal forma que quando o circuito estiver se movendo no éter com uma velocidade $\vec{v}_c$, suas cargas vão sentir ou sofrer uma força magnética dada por $q\vec{v}_c \times \vec{B}$, sendo que esta força magnética vai induzir uma corrente no circuito. Caso $\vec{v}_m = -\vec{v}_c$, então a corrente induzida será a mesma nos dois casos. Mas de acordo com a formulação de Lorentz a origem desta corrente será completamente diferente nos dois casos. Na primeira situação ela seria devida a uma força elétrica, sendo que não haveria força magnética nesta situação, enquanto que na segunda situação não haveria campo elétrico e a indução seria devida a uma força magnética.

Para Lorentz o que importava eram velocidades em relação ao éter. Mas na teoria da relatividade de Einstein o éter foi tornado supérfluo, como será visto na Seção 14.2. Com isto Einstein passou a interpretar a velocidade que aparece na força magnética do eletromagnetismo clássico, a saber, $q\vec{v} \times \vec{B}$, como sendo a velocidade da carga teste em relação ao observador. Com isto começou-se a introduzir na física grandezas que dependem do observador. Além do mais, ao enfatizar a visão de Lorentz da eletrodinâmica de Maxwell com todas as assimetrias inerentes a esta formulação (e que como já vimos não existiam para Faraday, para Maxwell, para Weber e que não estão presentes na observação experimental da indução), Einstein manteve problemas que foram se acumulando no futuro. Tudo isto poderia ser evitado se tivesse optado pelas visões originais de Faraday, pelos pontos de vista de Maxwell, ou pela eletrodinâmica de Weber. Estes problemas introduzidos por Einstein também poderiam ter sido evitados caso ele houvesse se guiado unicamente pelas experiências de indução, que não sugerem nenhuma assimetria.

Este é um dos pontos fortes a favor da eletrodinâmica de Weber e contra a teoria da relatividade especial de Einstein. Há outras experiências que podem ser explicadas facilmente com a teoria de Weber, como é o caso da indução unipolar.[19]

---

[17] [Mil81, págs. 146 e 150-154].
[18] [Mil81, pág. 145].
[19] [AT94].

14.2 Princípio ou Postulado da Relatividade

Logo em seguida ao primeiro parágrafo sobre a assimetria da indução eletromagnética, Einstein continua seu artigo nos seguintes termos:[20]

> Exemplos deste gênero, assim como o insucesso das experiências feitas para constatar um movimento da Terra em relação ao meio luminífero ("Lichtmedium") levam à suposição de que, tal como na Mecânica, também na Eletrodinâmica os fenômenos não apresentam nenhuma particularidade que possa fazer-se corresponder à ideia de um repouso absoluto. Pelo contrário em todos os sistemas de coordenadas em que são válidas as equações da mecânica, também são igualmente válidas leis ópticas e eletrodinâmicas da mesma forma — o que, até a primeira ordem de aproximação, já está demonstrado. Vamos erguer a categoria de postulado esta nossa suposição (a cujo conteúdo chamaremos daqui em diante "Princípio da Relatividade"); e, além disso, vamos introduzir o postulado — só aparentemente incompatível com o primeiro — de que a luz, no espaço vazio, se propaga sempre com uma velocidade determinada, independente do estado de movimento da fonte luminosa. Estes dois postulados são suficientes para chegar a uma eletrodinâmica de corpos em movimento, simples e livre de contradições, baseada na teoria de Maxwell para corpos em repouso. A introdução de um "éter luminífero" revelar-se-á supérflua, visto que na teoria que vamos desenvolver não necessitaremos de introduzir um "espaço em repouso absoluto", nem de atribuir um vetor velocidade a qualquer ponto do espaço vazio em que tenha lugar um processo eletromagnético.

Neste trecho Einstein chamou de princípio ou postulado da relatividade à afirmação de que "em todos os sistemas de coordenadas em que são válidas as equações da mecânica, também são igualmente válidas leis ópticas e eletrodinâmicas da mesma forma."

Ele deu a seguinte definição para o princípio da relatividade:[21]

> As leis segundo as quais se modificam os estados dos sistemas físicos são as mesmas, quer sejam referidas a um determinado sistema de coordenadas, quer o sejam a qualquer outro que tenha movimento de translação uniforme em relação ao primeiro.

Este é um postulado limitado. O motivo para esta limitação é que em sistemas de referência não inerciais a segunda lei do movimento de Newton na forma da equação (1.4) precisa ser modificada pela introdução das "forças fictícias," como vimos no Capítulo 10.

Einstein denominou a este postulado de princípio da *relatividade*. Esta foi uma escolha infeliz de nomenclatura. Afinal de contas, ele está mantendo o conceito newtoniano de espaço absoluto desvinculado da matéria distante. Newton foi muito mais preciso, correto e feliz ao introduzir os conceitos de espaço e tempo *absolutos* para explicar suas leis do movimento. Newton também soube distinguir muito claramente as diferenças que surgiriam nos fenômenos quando houvesse apenas uma rotação relativa entre os corpos locais e as estrelas fixas, ou quando houvesse uma rotação absoluta real dos corpos locais em relação ao espaço absoluto (a experiência do balde, o achatamento da Terra etc.)

Para Newton, o espaço absoluto e os sistemas de referência não acelerados em relação a este espaço formavam um conjunto privilegiado de referenciais, nos quais as leis da mecânica ficavam em sua forma mais simples. Estes referenciais privilegiados passaram a ser denominados posteriormente de referenciais inerciais. O postulado da relatividade de Einstein continua a privilegiar este conjunto de referenciais. Em vez de ser denominado de "princípio ou postulado da relatividade," ele poderia ser chamado mais apropriadamente de princípio ou postulado *inercial*, ou então de princípio ou postulado *absoluto*.

14.3 Paradoxo dos Gêmeos

Também podemos ver claramente este aspecto absoluto da teoria de Einstein no famoso paradoxo dos gêmeos que aparece na relatividade restrita (mas não na mecânica newtoniana, nem na mecânica relacional apresentada aqui). Para uma discussão deste paradoxo ver os trabalhos de Rodrigues, Oliveira e Rosa.[22]

Dois gêmeos A e B nascem no mesmo dia na Terra. Alguns anos depois um deles, digamos A, viaja para um planeta distante e retorna à Terra para encontrar-se com seu irmão. De acordo com a teoria da

[20] [Ein78c, pág. 48].
[21] [Ein78c, pág. 52].
[22] [RO89] e [RR89].

relatividade de Einstein, o tempo fluiu mais devagar para A do que para B enquanto A estava viajando, de tal forma que quando eles se encontram de novo, B está mais velho do que A. Mas do ponto de vista de A, foi B quem viajou para longe e retornou (afinal A não está vendo ele próprio se mover, mas A percebe B se afastando dele e depois voltando), de tal forma que era B quem deveria ser o mais jovem ao se reencontrarem. Este é o paradoxo dos gêmeos.

Para evitar o paradoxo, poderíamos dizer que eles sempre mantêm a mesma idade, mas não é esta a previsão da teoria da relatividade de Einstein. De acordo com esta teoria, A realmente ficou mais jovem do que B. Só podemos entender isto dizendo que enquanto B ficou em repouso ou em movimento retilíneo uniforme em relação ao espaço absoluto ou em relação a um referencial inercial, o mesmo não aconteceu com A. Isto é, A estava em movimento e de fato sofreu acelerações em relação ao espaço absoluto ou em relação a um referencial inercial. Mais uma vez vemos que apesar do nome *relatividade*, a teoria de Einstein manteve os conceitos absolutos básicos da teoria newtoniana.

Aqui só estamos discutindo os aspectos conceituais da teoria de Einstein. Afirma-se que esta dilatação do tempo próprio de um corpo em movimento é comprovada por experiências nas quais mésons instáveis são acelerados e movem-se a altas velocidades em aceleradores de partículas. Nestas experiências verifica-se que a meia-vida (tempo de decaimento) destes mésons acelerados e movendo-se a altas velocidades é maior do que a meia-vida de mésons em repouso no laboratório. Acontece que esta não é a única interpretação destas experiências. Pode-se igualmente argumentar que elas apenas mostram que a meia-vida dos mésons instáveis depende de seus movimentos em relação à matéria distante ou então dos fortes campos eletromagnéticos a que estão submetidos. Recentemente Phipps obteve esta explicação alternativa a partir da mecânica relacional.[23]

Uma analogia para esta interpretação é o que ocorre com um relógio de pêndulo comum. Suponhamos dois destes relógios idênticos marcando a mesma hora ao nível do solo. Levamos então um deles para o alto da montanha e o deixamos lá por várias horas, trazendo-o de volta para comparar com o que ficou no mesmo local ao nível do solo. Observa-se que o relógio que foi ao alto da montanha e voltou está atrasado em relação ao que permaneceu no solo. Este é o fato observacional. Pode-se interpretá-lo de duas maneiras diferentes: (I) Pode-se dizer que o tempo andou mais devagar para o relógio que ficou no alto da montanha do que o tempo indicado pelo relógio que ficou embaixo da montanha. (II) Ou então pode-se dizer que o tempo fluiu igualmente para os dois relógios, apenas que o período de oscilação do pêndulo depende da força gravitacional por unidade de massa. Como a força gravitacional por unidade de massa é menor no alto da montanha do que ao nível do mar, o relógio atrasou ao permanecer no alto da montanha comparado ao que permaneceu embaixo.

Esta interpretação (II) nos parece mais natural e simples do que a interpretação (I) que envolve mudanças nos conceitos fundamentais de tempo e espaço. A interpretação (II) está mais de acordo com os procedimentos usuais da física.

Também existem duas interpretações que podem ser aplicadas para explicar a experiência dos mésons. A interpretação (I) é a de Einstein, ou seja, segundo a qual o tempo anda mais lentamente para o méson em movimento em relação ao laboratório do que para o méson parado na Terra. A interpretação (II) afirma que a meia-vida do méson depende ou dos campos eletromagnéticos a que foi exposto nesta experiência ao ser acelerado em relação ao laboratório, ou então que ela depende do movimento (velocidade ou aceleração) do méson em relação ao laboratório e em relação aos corpos distantes do universo. Logo um méson deslocando-se em relação aos corpos distantes do universo teria uma meia-vida diferente da meia-vida de um méson que está parado em relação aos corpos distantes do universo.

Esta interpretação (II) nos parece mais simples e de acordo com a experiência do que a interpretação (I) de Einstein.

14.4 Constância da Velocidade da Luz

14.4.1 Einstein Postulou que a Velocidade da Luz é Constante Qualquer que Seja a Velocidade da Fonte Luminosa e Qualquer que Seja a Velocidade do Observador ou do Detector

O segundo postulado da relatividade restrita de Einstein introduz uma outra entidade absoluta na mecânica, a velocidade da luz. Seu postulado da constância da velocidade da luz afirma o seguinte:[24]

[23] [Phi96].

[24] [Ein78c, pág. 48].

> A luz, no espaço vazio, se propaga sempre com uma velocidade determinada, independente do estado de movimento da fonte luminosa.

Na página 52 de seu artigo ele deu a seguinte definição para o princípio da constância da velocidade da luz:[25]

> Qualquer raio de luz move-se no sistema de coordenadas 'em repouso' com uma velocidade determinada c, que é a mesma, quer esse raio seja emitido por um corpo em repouso, quer o seja por um corpo em movimento.

Com este postulado parece que ele está defendendo a ideia de um éter luminífero, já que a propriedade de algo caminhar com uma certa velocidade independente do movimento da fonte é característico de ondas caminhando em um meio. Este é o caso, por exemplo, do som se propagando no ar. Vamos supor que o ar esteja parado em relação ao solo. Neste caso, a velocidade do som no ar não depende da velocidade da fonte sonora em relação ao solo.

Mas então, logo depois da primeira apresentação deste postulado, Einstein afirmou[26] que "a introdução de um 'éter luminífero' revelar-se-á supérflua, visto que na teoria que vamos desenvolver não necessitaremos de introduzir um 'espaço em repouso absoluto'." Diante disto só podemos concluir que para Einstein a velocidade da luz é constante não apenas independentemente do estado de movimento da fonte, mas também independentemente do estado de movimento do receptor, do detector ou do observador. Esta conclusão é confirmada pela própria dedução deste "fato" em uma outra parte deste artigo:[27]

> Temos agora que demonstrar que todo o raio de luz, medido no sistema em movimento, se propaga com a velocidade c, se, como vimos admitindo, assim suceder no sistema em repouso; pois ainda não fornecemos a prova de que o princípio da constância da velocidade da luz é compatível com o princípio da relatividade.
>
> Suponhamos que no instante $t = \tau = 0$, em que as origens das coordenadas dos dois sistemas coincidem, é emitida dessa origem uma onda esférica que se propaga no sistema K com velocidade c.
>
> Se for $(x,\ y,\ z)$ um dos pontos que está sendo atingido pela onda ter-se-á
>
> $$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \ .$$
>
> Transformando esta equação por meio das nossas equações de transformação, obtemos depois de um cálculo simples
>
> $$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = c^2 \tau^2 \ .$$
>
> Assim, a onda considerada também é vista no sistema móvel como uma onda esférica de velocidade de propagação c. Deste modo se prova que os nossos dois princípios fundamentais são compatíveis.

Para nós estes são os principais problemas da teoria da relatividade restrita de Einstein, a saber: (a) Postular que a equação da onda luminosa tem a mesma forma em todos os sistemas inerciais; e (b) postular que a velocidade da luz é constante independente do estado de movimento do detector ou do observador.

Estes dois postulados são contrários a tudo que se conhece na física. No caso da luz, em particular, existe uma discussão muito longa na história para saber se ela é composta de um fluxo de partículas, usualmente chamadas de fótons (teoria balística), ou se ela é composta de ondas propagando-se num meio especial, o éter (teoria ondulatória da luz). Nas próximas Subseções vamos analisar estes dois fenômenos básicos da física, ou seja, fenômenos balísticos e ondulatórios. Veremos então que nenhuma destas propriedades que Einstein encontrou para a luz são válidas para estes fenômenos. A conclusão que tiramos é então de que estes resultados de Einstein têm de estar errados.

---

[25] [Ein78c, pág. 52].
[26] [Ein78c, pág. 48].
[27] [Ein78c, págs. 59-60].

14.4.2 Fenômenos balísticos

Suponha um homem em repouso em relação à superfície da Terra que atira simultaneamente em todas as direções balas com uma certa velocidade inicial v_b em relação ao solo. Nesta análise vamos desprezar a resistência do ar e também o efeito da gravidade, que tornaria as trajetórias das balas parabólicas. A equação descrevendo a superfície das balas é dada por:

$$x^2 + y^2 = v_b^2 t^2 \ , \tag{14.7}$$

onde x e y são as coordenadas horizontal e vertical a partir do homem, figura 14.7.

Figura 14.7: Homem parado no solo atirando para todos os lados.

Vamos agora supor que o homem passe a se mover para a direita com uma velocidade v_h em relação à Terra e atire uma bala para a direita. A velocidade da bala em relação à Terra será $v_b + v_h$, enquanto que a velocidade da bala em relação ao homem continuará sendo v_b, sempre desprezando os efeitos da resistência do ar. Ao atirar uma bala para a esquerda com velocidade v_b em relação a ele, esta bala se deslocará para a esquerda em relação ao solo com uma velocidade $v_b - v_h$, figura 14.8. Ao atirar uma bala para cima com velocidade $v_b\hat{y}'$ em relação a ele, esta bala estará viajando em relação ao solo com uma velocidade $v_b\hat{y} + v_h\hat{x}$ em relação ao solo, figura 14.8. Este comportamento é típico dos efeitos balísticos. Suponha que o homem segure várias armas iguais, cada uma delas apontando em uma direção. Ao atirar todas as armas ao mesmo tempo, o homem vai gerar uma superfície esférica de balas centrada nele e movendo-se com velocidade v_b em relação a ele, figura 14.8.

Figura 14.8: Homem deslocando-se em relação ao solo com velocidade v_h, atirando simultaneamente diversas armas. As velocidades das balas e do homem indicadas nesta figura são determinadas em relação ao referencial terrestre.

Se o homem se mover com velocidade v_h em relação à Terra e atirar simultaneamente todas as armas que ele está segurando, ele ainda verá uma superfície esférica de balas se afastando dele com uma velocidade v_b, mais uma vez desprezando os efeitos da resistência do ar. Seja o referencial em repouso na Terra representado por O com coordenadas $(x,\ y)$ e o referencial do homem em movimento representado por O' com coordenadas $(x',\ y')$. Neste caso a equação representando a superfície esférica de balas centrada no homem em movimento é dada por:

$$x'^2 + y'^2 = (v_b t')^2 \ , \tag{14.8}$$

onde $t' = t$ é o tempo transcorrido desde os tiros simultâneos. Estando o homem movendo-se para a direita na direção de x crescente com velocidade v_h temos: $x' = x - v_h t$ e $y' = y$, de tal forma que a equação da superfície de balas em relação a um observador que permaneceu em repouso em relação à Terra no local onde o homem atirou as armas é dada por:

$$(x - v_h t)^2 + y^2 = (v_b t)^2 \ . \tag{14.9}$$

Ou seja, para o observador que permaneceu em repouso em relação ao solo, a superfície das balas não mais estará centrada neste observador estacionário a não ser no instante inicial. Isto pode ser visto na figura 14.8, onde todas as velocidades são em relação à Terra. A forma da equação mudou, não sendo dada por $x^2 + y^2 = (v_b t)^2$, embora esta fosse a forma da equação no referencial em movimento, equação (14.8).

Vemos então que a conclusão de Einstein, de que a forma da equação de onda é invariável, não é válida para efeitos balísticos. Além disto, nestes efeitos balísticos a velocidade da bala em relação a algum detector ou observador depende diretamente da velocidade da fonte. Por exemplo, a velocidade da bala que está indo horizontalmente para a direita na figura 14.8 em relação a algum detector que esteja parado no solo será dada por $v_b + v_h$. Já a velocidade da bala que está indo horizontalmente para a esquerda em relação a algum detector parado no solo será dada por $v_b - v_h$.

14.4.3 Fenômenos Ondulatórios

O outro tipo de fenômeno conhecido na física é o que depende diretamente do meio. Alguns exemplos: uma onda propagando-se em uma corda esticada, o som propagando-se no ar, ou um sinal eletromagnético propagando-se ao longo de um fio condutor.

Vamos analisar aqui o exemplo mais simples, que é o da velocidade do som. Vamos supor que temos um trem em repouso em relação à Terra, emitindo um apito que se move em relação ao solo com a velocidade v_s, supondo o ar em repouso em relação à Terra, figura 14.9.

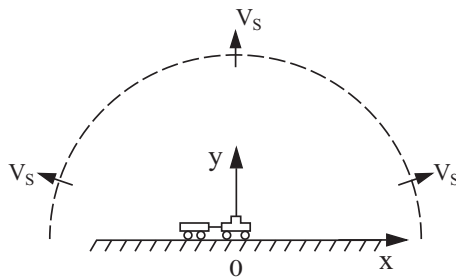



Figura 14.9: Trem apitando enquanto está em repouso em relação ao solo e ao ar.

A equação de onda da frente sonora é dada por:

$$x^2 + y^2 = (v_s t)^2 \ . \tag{14.10}$$

Se o trem passar a se mover com uma velocidade v_t em relação à Terra e apitar, o som do apito ainda vai se mover em relação à Terra com velocidade v_s. Mas agora a velocidade do som em relação ao trem será $v_s - v_t$ na direção frontal e $v_s + v_t$ em relação a sua parte traseira, supondo que o ar ainda esteja em repouso em relação à Terra e que $v_s > v_t$, figura 14.10.

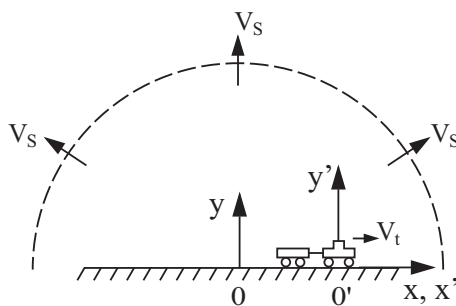



Figura 14.10: Trem apitando enquanto se desloca em relação ao solo e ao ar.

No caso do som, a forma da onda sonora em relação à Terra é sempre esférica a partir do ponto de emissão, tanto para um trem em repouso quanto para um que se move em relação a ela. Já em relação ao

referencial do trem que se desloca na direção de x crescente com velocidade v_t em relação ao solo, a equação da onda sonora é dada por (no referencial O' do trem):

$$(x' + v_t t)^2 + y'^2 = (v_s t)^2 \ . \tag{14.11}$$

Isto é, a equação não é dada por: $x'^2 + y'^2 = (v_s t')^2$, como era o caso da equação (14.10). A superfície esférica já não é mais centrada no trem, ver a figura 14.10, onde todas as velocidades são determinadas em relação ao solo.

Ou seja, a conclusão de Einstein de que a forma da equação de onda é invariável também não é válida no caso do som, apesar de neste caso a velocidade do som ser independente do estado de movimento da fonte.

No caso balístico, a velocidade das balas é constante em relação à fonte, mas é independente da velocidade da arma em relação à Terra. Já no caso do trem apitando, a velocidade do som é constante em relação ao meio (ar) e não depende da velocidade da fonte. Já a forma da equação da frente de onda muda para diferentes referenciais em ambos os casos, como foi visto nas equações (14.8) até (14.11).

14.4.4 Nos Fenômenos Balísticos e Ondulatórios as Velocidades dos Projéteis e das Ondas Sempre Dependem da Velocidade do Observador ou do Detector

Além disto, a velocidade dos projéteis e a velocidade das ondas sempre dependem do estado de movimento do observador ou do detector. Analisamos isto tanto no caso balístico quanto no caso ondulatório.

Vamos considerar um observador ou detector O movendo-se com uma velocidade $\vec{v}_o = -v_o\hat{x}$ em relação à Terra. Vamos supor que temos um canhão parado no solo atirando uma bala com velocidade $\vec{v}_b = v_b\hat{x}$ em relação ao solo, figura 14.11. Estamos desprezando a resistência do ar neste problema. No caso balístico o observador vai encontrar a velocidade da bala em relação a ele como sendo dada por $v_b + v_o$.

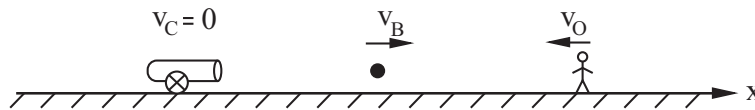



Figura 14.11: Observador ou detector movendo-se em relação à Terra enquanto o canhão está em repouso.

Vamos agora supor que o canhão desloca-se em relação ao solo com velocidade $\vec{v}_c = v_c\hat{x}$, figura 14.12. O homem deslocando-se em relação ao solo com velocidade $\vec{v}_o = -v_o\hat{x}$ vai encontrar a velocidade da bala em relação a ele como sendo dada por: $v_b + v_h + v_o$.

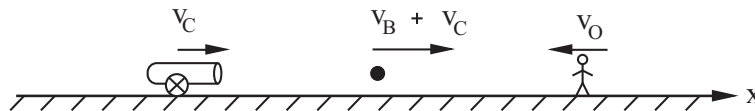



Figura 14.12: Observador e canhão movendo-se em relação à Terra.

Vamos agora analisar o caso balístico supondo que o ar esteja parado em relação ao solo. Seja um observador ou detector O movendo-se com uma velocidade $\vec{v}_o = -v_o\hat{x}$ em relação ao solo, figura 14.13. Vamos supor que temos um trem parado no solo e apitando. O som desloca-se para a frente no ar com uma velocidade $\vec{v}_s = v_s\hat{x}$ em relação ao solo. O observador vai encontrar a velocidade do som em relação a ele como sendo dada por $v_s + v_o$.

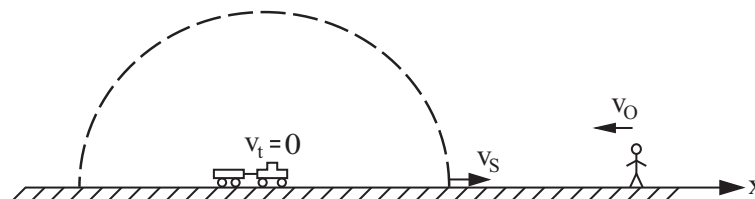



Figura 14.13: Observador movendo-se em relação à Terra e ao ar, enquanto o trem está em repouso.

Já no caso da figura 14.14 temos o mesmo observador movendo-se em relação ao solo com uma velocidade $\vec{v}_o = -v_o\hat{x}$, enquanto que o trem desloca-se em relação ao solo com velocidade $\vec{v}_t = v_t\hat{x}$. Neste caso a velocidade do som em relação ao observador continua dada por $v_s + v_o$, qualquer que seja a velocidade do trem.

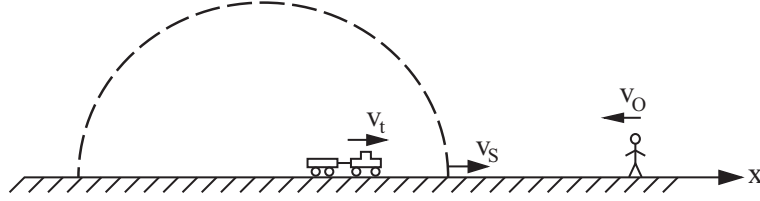



Figura 14.14: Observador e trem movendo-se em relação à Terra e ao ar.

Como vemos aqui, a velocidade das balas ou do som sempre dependem do estado de movimento do observador ou do detector. Por outro lado, Einstein concluiu que a luz é uma entidade completamente diferente, de tal forma que sua velocidade no vácuo nunca depende da velocidade do observador. Mas a luz é uma entidade física que carrega momento linear e energia, que é afetada pelo meio onde se propaga (reflexão, refração, difração, rotação de Faraday do plano de polarização etc.), que age sobre os corpos aquecendo-os, provocando reações químicas, ionizando átomos etc. Neste sentido ela não tem nada de especial e como tal tem similaridades tanto com corpúsculos quanto com fenômenos ondulatórios (como é o caso de uma onda mecânica em uma corda ou como é o caso do som propagando-se no ar). A aceitação desta conclusão de que a velocidade da luz é constante para todos observadores inerciais independente de seus movimentos em relação à fonte, criou problemas e paradoxos inumeráveis na física, nestes últimos 100 anos.

Para provar que a velocidade da luz não depende do movimento do observador, teria de ser necessário fazer experiências de laboratório em que o detector estivesse se movendo a altas velocidades (próximas de c) em relação à Terra e à fonte de luz (suposta em repouso na Terra). Não temos conhecimento de experiências deste tipo que tenham confirmado a conclusão de Einstein.

Wesley, Tolchelnikova-Murri, Hayden, Monti e diversos outros autores apresentaram argumentos bem fortes e convincentes de que os métodos utilizados por Roemer e por Bradley para obter o valor da velocidade da luz provam que o valor medido desta velocidade depende da velocidade do observador em relação à fonte.[28] O trabalho fundamental de Roemer pode ser encontrado no original em língua francesa.[29] A versão em língua inglesa também encontra-se disponível.[30] Já o artigo de Bradley pode ser encontrado em vários lugares.[31] Como já vimos, Einstein manteve o conceito newtoniano de espaço absoluto (ou de sistemas inerciais preferenciais) independente da matéria distante e introduziu uma outra quantidade absoluta na teoria, a velocidade da luz. Os trabalhos de Wesley e de Monti, por outro lado, mostram que a velocidade da luz é uma função do estado de movimento do observador.

14.5 Origens e Significados da Velocidade $\vec{v}$ que Aparece na Força Magnética $q\vec{v} \times \vec{B}$

O eletromagnetismo clássico é composto de duas partes principais, a saber, as equações de Maxwell e a força eletromagnética que atua sobre uma carga q na presença de um campo elétrico $\vec{E}$ e de um campo magnético $\vec{B}$. As equações de Maxwell relacionam $\vec{E}$ e $\vec{B}$ com suas fontes, a saber, a densidade volumétrica de carga ρ e a densidade de corrente $\vec{J}$. Os vetores $\vec{E}$ e $\vec{B}$ também podem ser expressos em termos do potencial escalar elétrico ϕ e do potencial vetor magnético $\vec{A}$ através das equações (2.40) e (2.41).

Já a força eletromagnética especifica como que os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ atuam sobre uma carga pontual q. Esta força é normalmente dada pela seguinte fórmula:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} = -q\nabla\phi - q\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + q\vec{v} \times \vec{B} \ . \tag{14.12}$$

[28] Ver [Wes91, Seções 2.2 (Roemer's measurement of the velocity of light) e 2.4 (Bradley aberration to measure velocity of light)]; [Tol92]; [Hay95]; [Mon96]; etc.

[29] [Coh40] e [Tat78, págs. 151-154].

[30] [Roe35] e [Coh40].

[31] [Bra29], [Sar31] e [Bra35].

O que nos interessa aqui é discutir a parte magnética desta expressão, a força magnética $\vec{F}_m$ sobre uma carga q em um campo magnético $\vec{B}$:

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} \ . \tag{14.13}$$

Nesta Seção vamos ver que um outro problema criado por Einstein foi sua interpretação da velocidade que aparece na força magnética $q\vec{v} \times \vec{B}$.[32] Nosso objetivo é discutir o significado da velocidade $\vec{v}$ que aparece nas equações (14.12) e (14.13). Em particular, $\vec{v}$ é a velocidade da carga q em relação a qual objeto ou entidade?

Algumas possíveis respostas a esta pergunta fundamental:

- Em relação ao espaço absoluto de Newton;
- Em relação ao laboratório ou à Terra;
- Em relação ao referencial das estrelas fixas;
- Em relação ao referencial das galáxias distantes;
- Em relação à fonte macroscópica do campo magnético (isto é, em relação ao ímã ou fio com corrente);
- Em relação ao movimento médio das cargas microscópicas (em geral elétrons) que geram o campo magnético;
- Em relação ao próprio campo magnético;
- Em relação a um sistema de referência inercial;
- Em relação a algum sistema de referência arbitrário;
- Em relação ao detector de campo magnético;
- Em relação ao éter;
- Etc.

Nesta Seção vamos discutir a história desta força e as diferentes interpretações que têm sido fornecidas ao longo dos anos para esta velocidade.

14.5.1 Significado da Velocidade para Maxwell

A força dada pela equação (14.12) é usualmente chamada de força de Lorentz nos livros didáticos. Contudo, parece que Maxwell foi o primeiro a chegar nela.[33] Por este motivo vamos denominá-la neste livro de "força de Maxwell-Lorentz."

Maxwell apresentou esta força em 1861-1862 em seu artigo sobre as linhas físicas de força,[34] discutindo-a também em 1864-1865 em seu artigo com uma teoria dinâmica do campo eletromagnético,[35] assim como em seu livro de 1873, *Tratado de Eletricidade e Magnetismo*.[36] Ele estava considerando a força sobre um corpo eletrizado, sendo que às vezes se referia a este corpo como um condutor, como um dielétrico ou isolante, como uma partícula, como um elemento de corrente de um circuito elétrico, ou simplesmente como eletricidade.

Esta força foi expressa da seguinte forma no *Tratado de Eletricidade e Magnetismo*:[37]

$$\left.\begin{array}{l} P = c\frac{dy}{dy} - b\frac{dz}{dt} - \frac{dF}{dt} - \frac{d\Psi}{dx} \ , \\ Q = a\frac{dz}{dt} - c\frac{dx}{dt} - \frac{dG}{dt} - \frac{d\Psi}{dy} \ , \\ R = b\frac{dx}{dt} - a\frac{dy}{dt} - \frac{dH}{dt} - \frac{d\Psi}{dz} \ . \end{array}\right\} \text{(B)} \tag{14.14}$$

Ele resumiu estas equações (B) da seguinte maneira:[38]

---

[32] [Ass92b, Apêndice (A): As Origens e os Significados da Força Magnética $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$], [AP92], [Ass94, Apêndice A: "The Origins and Meanings of the Magnetic Force $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$"] e em [Ass95b, Apêndice B: "Força magnética"].

[33] [Mar90, pág. 31], [Cur09, Seção 4.6: On the paternity of Lorentz's force, págs. 122-128], [Hur10, pág. 22], [Toma] e [Tomb].

[34] [Max, pág. 342, equação (77)] e [Max65b, equação (77)].

[35] [Max65, pág. 484, equação (D)] e [Max65a, equação (D)].

[36] [Max54, Vol. 2, §§598-599, págs. 238-241, equações (B) e (10)].

[37] [Max54, Vol. 2, §598, pág. 239, equação (B)].

[38] [Max54, Vol. 2, §599, pág. 241, equação (10). Maxwell utilizou outros símbolos. Como não conseguimos encontrar estes símbolos no editor de textos LaTeX, os substituímos pelos símbolos **Æ**, **v** e $\dot{\mathbf{A}}$.].

Portanto, a força eletromotriz, como definida pelas equações (B), pode ser escrita na forma quaterniônica,

Æ = V.**vB** - $\dot{\mathbf{A}}$ - $\nabla\Psi$. (10)

Em notação moderna esta equação (10) de Maxwell pode ser escrita como:

$$\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\Psi \ . \tag{14.15}$$

Ou seja, esta expressão de Maxwell é análoga à equação (14.12), expressando a força por unidade de carga.

Maxwell interpretava esta velocidade como sendo a velocidade do corpo em relação ao campo magnético. Vejamos algumas citações suas. No artigo de 1861 ele afirmou:[39]

> O primeiro e segundo termos de cada equação indicam o efeito do movimento de qualquer corpo no campo magnético.

No artigo de 1865 expressou-se da seguinte maneira:[40]

> O primeiro termo no lado direito de cada equação representa a força eletromotriz surgindo do movimento do próprio condutor. Esta força eletromotriz é perpendicular à direção do movimento e às linhas de força magnética [linhas de $\vec{B}$]; e se for traçado um paralelogramo cujos lados representam em módulo e direção a velocidade do condutor e a indução magnética naquele ponto do campo, então a área do paralelogramo representará a força eletromotriz devida ao movimento do condutor, e a direção da força é perpendicular ao plano do paralelogramo.

Já no *Tratado de Eletricidade e Magnetismo*, publicado em 1873, Maxwell afirmou o seguinte após apresentar as equações da força eletromotriz na equação (B), nossa ênfase:[41]

> O vetor **Æ**[42] é a força eletromotriz atuando no elemento móvel ds. Sua direção e magnitude dependem da posição e do movimento de ds, e da variação do campo magnético, mas não dependem da direção de ds. Portanto, podemos desconsiderar agora a circunstância de que ds é parte de um circuito, e considerá-lo simplesmente como uma porção de um corpo em movimento, que está sob a ação de uma força eletromotriz **Æ**. A força eletromotriz em um ponto já foi definida no Artigo 68.[43] Ela também é chamada de força elétrica resultante, sendo a força que seria sentida por uma unidade de eletricidade positiva colocada neste ponto. Obtivemos agora o valor mais geral desta grandeza *no caso de um corpo deslocando-se em um campo magnético* devida a um sistema elétrico variável.
>
> Se o corpo for um condutor, a força eletromotriz produzirá uma corrente; se ele for um dielétrico, a força eletromotriz produzirá apenas um deslocamento elétrico [isto é, uma polarização elétrica do dielétrico].
>
> A força eletromotriz em um ponto, ou sobre uma partícula, tem de ser distinguida cuidadosamente da força eletromotriz ao longo do arco de uma curva, sendo esta última grandeza a integral de linha da grandeza anterior. Ver o Artigo 69.
>
> 599.] A força eletromotriz, cujas componentes são definidas pelas equações (B), dependem de três circunstâncias. *A primeira destas é o movimento da partícula através do campo magnético.* A parte da força dependendo deste movimento é expressa pelos dois primeiros termos à direita de cada equação. Ela depende da velocidade da partícula transversa às linhas de indução magnética [isto é, depende das componentes da velocidade que são ortogonais ao campo magnético $\vec{B}$]. Se **v** é um vetor representando a velocidade, e **B** um outro vetor representando a indução magnética, então se **Æ**$_1$ é a parte da força eletromotriz dependendo do movimento,[44]

[39] [Max, pág. 342, logo abaixo da equação (77)].
[40] [Max65, pág. 484, logo abaixo da equação (D)].
[41] [Max54, Vol. 2, §598, págs. 238-241, abaixo da equação (B), nossa ênfase].
[42] Maxwell utiliza um outro símbolo. Como não conseguimos encontrar este símbolo no editor de textos LaTeX, o substituímos pelo símbolo **Æ**.
[43] Neste Artigo 68 Maxwell definiu a força eletromotriz como sendo a força por unidade de carga.
[44] Isto é, em notação moderna,

$$\vec{E}_1 = \vec{v} \times \vec{B} \ . \tag{14.16}$$

> $\text{Æ}_1 = \text{V}.\mathbf{vB}$, (7)
>
> ou, a força eletromotriz é a parte vetorial do produto da indução magnética multiplicada pela velocidade, isto é, a magnitude da força eletromotriz é representada pela área do paralelogramo, cujos lados representam a velocidade e a indução magnética, e sua direção é normal a este paralelogramo, traçado de tal forma que a velocidade, a indução magnética, e a força eletromotriz estejam em uma ordem cíclica destrógira.

Existem dois pontos importantes a serem enfatizados aqui relacionados com estas citações: (A) Maxwell parece ter sido a primeira pessoa a deduzir a força eletromagnética representada pela equação (14.12), publicando seus trabalhos a este respeito entre 1861 e 1873. (B) Maxwell interpretava a velocidade $\vec{v}$ que aparece na componente magnética desta força como sendo a velocidade do corpo eletrizado em relação ao campo magnético $\vec{B}$.

14.5.2 Significado da Velocidade para Thomson e para Heaviside

Em 1881 J. J. Thomson (1856-1940) chegou teoricamente na força magnética dada por $q\vec{v} \times \vec{B}/2$.[45] Esta velocidade $\vec{v}$ era, para Thomson, a velocidade da carga q em relação ao meio através do qual ela estava se movendo, meio cuja permeabilidade magnética era μ. Para Thomson esta velocidade $\vec{v}$ não era a velocidade da carga q em relação ao campo magnético, nem em relação ao éter luminífero, nem em relação ao ímã ou fio com corrente que gerava o campo magnético $\vec{B}$ e nem mesmo em relação ao observador. Ele chamava esta $\vec{v}$ de velocidade real [*actual velocity*] da partícula de carga q. Em seu artigo ele afirmou explicitamente o seguinte:[46]

> Deve ser enfatizado que aquilo que por conveniência chamamos de velocidade real da partícula é, na verdade, a velocidade da partícula em relação ao meio através do qual ela está se movendo [...], meio cuja permeabilidade magnética é μ.

Em 1889 Heaviside (1850-1925) chegou teoricamente a $q\vec{v} \times \vec{B}$ (isto é, duas vezes maior que o valor de Thomson) e aceitou a interpretação de Thomson para a velocidade $\vec{v}$. O título de seu artigo é "Sobre os efeitos eletromagnéticos devido ao movimento da eletrificação através de um dielétrico."[47] Este título mostra que para Heaviside esta velocidade $\vec{v}$ era a velocidade da carga q em relação a este meio dielétrico em relação ao qual ela estava se movendo.

14.5.3 Significado da Velocidade para Lorentz

H. A. Lorentz (1853-1928) apresentou em 1895 a lei de força na forma:[48]

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \ . \tag{14.17}$$

Não temos conhecimento de nenhuma experiência que ele tenha feito para chegar nesta expressão. Quais foram suas motivações ou seu caminho para chegar a ela? Para responder a esta pergunta, citamos um trecho de seu famoso livro *The Theory of Electrons*. Este livro é baseado em palestras ministradas na Universidade de Columbia em 1906, sendo publicado pela primeira vez em 1909. Vamos citar aqui trechos da segunda edição desta obra, de 1915. Entre colchetes vão nossas palavras e a apresentação moderna de algumas de suas fórmulas (por exemplo, $[\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}]$ é em geral representado hoje em dia por $\vec{a} \times \vec{b}$). Ele usava o sistema cgs de unidades e o que chamava de "elétron" representa uma carga elétrica qualquer (a partícula que chamamos hoje em dia de elétron, com carga $q = -1,6 \times 10^{-19}$ C e massa $m = 9,1 \times 10^{-31}$ kg, só foi descoberta em 1897). Palavras de Lorentz:[49]

> De qualquer forma temos certamente de falar em tal coisa como a força agindo sobre uma carga, ou sobre um elétron, sobre a matéria carregada, qualquer que seja a denominação que você prefira. Agora, de acordo com os princípios gerais da teoria de Maxwell, vamos considerar esta força como causada pelo estado do éter e mesmo, como este meio penetra os elétrons, como exercida pelo

[45] [Whi73, págs. 306-310].
[46] [Tho81, pág. 248].
[47] [Hea89].
[48] [Lor95], [Pai82, pág. 125] e [Pai86, pág. 76].
[49] [Lor15, págs. 14-15].

éter sobre todos os pontos internos destas partículas onde há uma carga. Se dividirmos todo o elétron em elementos de volume, haverá uma força agindo sobre cada elemento e determinada pelo estado do éter existindo dentro dele. Vamos supor que esta força seja proporcional à carga do elemento, de tal forma que só queremos saber a força atuando por unidade de carga. É a isto que agora podemos chamar apropriadamente de *força elétrica*. A representaremos por **f**. A fórmula pela qual ela é determinada e que é uma que ainda temos de adicionar a (17)-(20) [equações de Maxwell], é dada por:

$$\mathbf{f} = \mathbf{d} + \frac{1}{c}[\mathbf{v} \cdot \mathbf{h}]. \qquad \left[\vec{f} = \vec{d} + \frac{\vec{v} \times \vec{h}}{c}\right] . \qquad (23)$$

Como as nossas equações anteriores, ela é obtida generalizando os resultados de experiências eletromagnéticas. O primeiro termo representa a força agindo sobre um elétron em um campo eletrostático; na verdade, neste caso, a força por unidade de carga tem de ser completamente determinada pelo deslocamento elétrico. Por outro lado, a parte da força representada pelo segundo termo pode ser deduzida a partir da lei de acordo com a qual um elemento de um fio carregando uma corrente sofre a ação de um campo magnético com uma força perpendicular a ele mesmo e às linhas de força, ação esta que nas nossas unidades pode ser representada na notação vetorial por

$$\mathbf{F} = \frac{s}{c}[\mathbf{i} \cdot \mathbf{h}], \qquad \left[\vec{F} = \frac{i\vec{s} \times \vec{h}}{c}\right] ,$$

onde **i** é a intensidade da corrente considerada como um vetor e s o comprimento do elemento. De acordo com a teoria dos elétrons, **F** é composta de todas as forças com as quais o campo **h** age sobre os elétrons separados movendo-se no fio. Agora, simplificando a questão ao assumir apenas um tipo de elétrons em movimento com cargas iguais e e uma velocidade comum **v**, podemos escrever

$$s\mathbf{i} = Ne\mathbf{v} \ , \qquad [i\vec{s} = Ne\vec{v}] \ ,$$

se N é o número total destas partículas no elemento s. Portanto

$$\mathbf{F} = \frac{Ne}{c}[\mathbf{v} \cdot \mathbf{h}], \qquad \left[\vec{F} = \frac{Ne\vec{v} \times \vec{h}}{c}\right] ,$$

de tal forma que, dividindo por Ne, obtemos a força por unidade de carga

$$\frac{1}{c}[\mathbf{v} \cdot \mathbf{h}]. \qquad \left[\frac{\vec{v} \times \vec{h}}{c}\right] .$$

Como uma aplicação interessante e simples deste resultado, posso mencionar a explicação que ele permite da corrente induzida que é produzida em um fio movendo-se através das linhas de força magnéticas. Os dois tipos de elétrons tendo a velocidade **v** do fio, são neste caso forçados em direções opostas que são determinadas por nossa fórmula.

9. Após ter sido levados em um caso particular à existência da força **d** e em um outro à existência da força $\frac{1}{c}[\mathbf{v} \cdot \mathbf{h}]$, combinamos agora as duas na forma mostrada na equação (23), indo além do resultado direto das experiências pela suposição de que em geral as duas forças existem simultaneamente. Se, por exemplo, um elétron estivesse se movendo em um espaço atravessado por ondas hertzianas, poderíamos calcular a ação deste campo sobre ele utilizando os valores de **d** e **h**, tal como eles são no ponto do campo ocupado pela partícula.

Concordamos com O'Rahilly quando ele disse que esta prova apresentada por Lorentz da fórmula que fornece a força eletromagnética sobre um corpo eletrizado é extremamente insatisfatória pelos seguintes motivos:[50]

[50][O'R65, pág. 561].

> Há duas objeções esmagadoras em relação a esta suposta generalização. (1) Os dois 'casos particulares' aqui 'combinados' são bem incompatíveis. Em um caso temos cargas em repouso, no outro as cargas estão em movimento; elas não podem estar ao mesmo tempo estacionárias e em movimento. (2) Experiências com um 'fio carregando uma corrente' dizem respeito a correntes *neutras*, contudo a dedução contradiz esta neutralidade.

Como podemos ver da citação acima ("... força como causada pelo estado do éter e mesmo, como este meio penetra os elétrons, como exercida pelo éter ..."), para Lorentz esta era originalmente a velocidade da carga em relação ao éter e não, por exemplo, em relação ao observador ou sistema de referência. Lorentz sempre considerou que o éter estava em repouso em relação ao referencial das estrelas fixas.[51]

Uma prova conclusiva para esta interpretação do significado da velocidade que aparece no termo $q\vec{v} \times \vec{B}$ pode ser encontrada em um outro trabalho de Lorentz, *Lectures on Theoretical Physics*. Este trabalho é baseado em um conjunto de palestras sobre a teoria de Maxwell apresentadas entre 1900 e 1902, e em um outro conjunto de palestras ministradas entre 1910 e 1912 sobre o princípio da relatividade para translações uniformes. Neste trabalho Lorentz fez a seguinte afirmação:[52]

> 8-9. Existe ainda um outro problema que merece atenção. Imagine uma corrente elétrica fluindo em um circuito fechado sem resistência. Esta corrente vai agir sobre uma partícula que possui uma carga e colocada perto do circuito? Falamos de propósito de um circuito sem resistência. Pois, caso ele tivesse uma resistência, seria necessária uma certa força eletromotriz para manter a corrente, e isto inevitavelmente daria origem a um gradiente de potencial e a cargas (não interessa quão pequenas elas sejam) espalhadas sobre o condutor que iriam atuar sobre a partícula eletrizada. Enfim, nossa questão refere-se ao efeito da corrente *como tal* [atuando] sobre a partícula.
>
> A resposta a esta questão era, obviamente, que a corrente não agia sobre a partícula. Ela agiria sobre uma agulha magnética colocada em suas proximidades, já que ela é cercada por um campo magnético, mas não há traço de um campo elétrico. Certamente esta conclusão é correta enquanto a corrente e a partícula eletrizada estão em repouso. Contudo, suponha que ambos compartilhem em algum movimento, por exemplo, o movimento da Terra. O que acontece neste caso? Para começar, a partícula eletrizada vai deslocar-se com uma certa velocidade através do campo magnético da corrente e, portanto, vai sofrer a ação de alguma força.

Neste trabalho Lorentz afirmou que se um fio por onde circula uma corrente elétrica (e assim gerando um campo magnético) e uma carga externa estiverem em repouso entre si e em relação ao éter, que então não haverá força magnética sobre a carga. Por outro lado, se o fio e a carga estiverem em repouso entre si, mas se ambos estiverem deslocando-se com uma velocidade comum $\vec{v}$ de translação em relação ao éter (enquanto que o observador e o laboratório também estariam deslocando-se com esta mesma velocidade $\vec{v}$ em relação ao éter, já que ele fornece como exemplo deste deslocamento a velocidade da Terra em relação ao éter), então ele afirmou que vai haver uma força magnética sobre a carga teste. Neste exemplo não há movimento relativo entre a carga teste e vários corpos ou entidades tais como: o fio com corrente, o observador, o detector de campo magnético no laboratório, e a Terra. Só há velocidade da carga teste em relação ao éter. Logo, se há uma força magnética neste caso de acordo com Lorentz, só pode ser porque ele interpretava a velocidade $\vec{v}$ que aparece na expressão $q\vec{v} \times \vec{B}$ como sendo a velocidade da carga teste em relação ao éter.

14.5.4 Significado da Velocidade para Einstein

Vimos então que esta velocidade da carga teste teve vários significados ao longo da história. Para Maxwell era a velocidade da carga em relação ao campo magnético, para Thomson e Heaviside era a velocidade da carga em relação ao meio de permeabilidade magnética μ, enquanto que para Lorentz era a velocidade da carga em relação a um meio bem específico, o éter. Em todos estes casos estes autores interpretavam que esta força surgia da interação da carga teste com um meio material, a saber, o campo magnético, o meio de permeabilidade magnética μ, ou o éter. Como a carga estaria interagindo com este meio material, era natural interpretar $\vec{v}$ como sendo a velocidade da carga em relação a este meio.

Einstein modificou tudo isto em seu artigo de 1905 sobre a teoria especial de relatividade. Neste artigo Einstein introduziu que a velocidade $\vec{v}$ na força de Maxwell-Lorentz, equação (14.12), deve ser interpretada

[51] [Pai82, pág. 111].

[52] [Lor31, Volume 3, pág. 306] e [O'R65, Volume 2, pág. 566].

como a velocidade da carga teste em relação ao observador. Inicialmente obteve as transformações de Lorentz para as coordenadas espaciais e para o tempo. Estas transformações relacionam as grandezas expressas em um sistema de referência inercial, com as mesmas grandezas expressas em um outro referencial inercial que translada em relação ao primeiro com uma velocidade constante. Einstein obteve em seguida estas transformações para o campo elétrico e para o campo magnético. Einstein aplicou então estas transformações dos campos elétrico e magnético, na força eletromagnética dada pela equação (14.12). Desta forma Einstein começou a interpretar a velocidade $\vec{v}$ como sendo a velocidade da carga q em relação ao observador ou sistema de referência inercial. Por exemplo, neste trabalho ele apresentou a diferença entre o velho paradigma do eletromagnetismo e o novo paradigma baseado em sua teoria da relatividade nos seguintes termos (nas notas de rodapé vão nossas palavras para auxiliar na compreensão de algumas passagens):[53]

> Para interpretarmos estas equações,[54] consideremos uma carga elétrica pontual que apresente o valor "um" quando é medida no sistema em repouso,[55] isto é, uma carga que, estando imóvel no sistema em repouso, exerce a força de 1 dine sobre uma carga igual, colocada a distância de 1 cm dela. De acordo com o princípio da relatividade, a mesma carga elétrica apresentará também o valor "um" se for medida no sistema em movimento. Estando a carga em repouso em relação ao sistema imóvel, o vetor $(X,\ Y,\ Z)$[56] é, por definição, igual a força que atua sobre ela; mas, estando a carga em repouso relativamente ao sistema que se move (pelo menos no instante que se está considerando), então a força que atua sobre ela será igual, se for medida neste sistema móvel, ao vetor $(X',\ Y',\ Z')$. Consequentemente, as primeiras três equações acima[57] podem ser traduzidas em enunciados das duas seguintes maneiras:
>
> 1. Se um polo elétrico unidade,[58] puntiforme, se move num campo eletromagnético, exercer-se-á sobre ele, além da força elétrica,[59] uma força "eletromotriz"[60] que, desprezando termos em que entram como fatores potências de v/c de grau igual ou superior a 2, é igual ao quociente pela velocidade da luz do produto vetorial formado com a velocidade do polo unidade com a força magnética.[61] (Antigo enunciado.)
>
> 2. Se um polo elétrico puntiforme unidade se move num campo eletromagnético, exerce-se sobre ele uma força idêntica à força elétrica que se obtém no ponto ocupado pelo polo quando se submete o campo a uma transformação de coordenadas, a fim de o referir a um sistema de eixos que esteja imóvel em relação ao referido polo. (Novo enunciado.)

Isto é, de acordo com Einstein, no enunciado antigo temos $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$, enquanto que no novo enunciado temos $\vec{F} = q\vec{E}' + q\vec{v}\,' \times \vec{B}' = q\vec{E}'$, já que agora $\vec{v}\,' = \vec{0}$. A velocidade $\vec{v}\,'$ da carga em relação ao novo sistema de referência S' que está em repouso em relação à própria carga é, obviamente, nula, de tal forma que $q\vec{v}\,' \times \vec{B}' = \vec{0}$.

Com esta nova interpretação do significado da velocidade $\vec{v}$ que aparece na força eletromagnética dada pela equação (14.12), Einstein está introduzindo forças que dependem do sistema de referência. Isto é, forças cujos valores dependem do estado de movimento entre o corpo de teste e o observador. Esta introdução de forças físicas que passam a depender do estado de movimento do observador criou muitos problemas para a interpretação de experiências simples e, infelizmente, passou a fazer parte de toda a física teórica desde então. Nenhuma experiência sugeria ou obrigava que se fizesse esta nova interpretação. Tudo isto partiu da cabeça de Einstein. Poderia se manter a expressão usual da força magnética com $\vec{v}$ sendo a velocidade da carga q em relação ao ímã, ou a velocidade da carga em relação ao fio com corrente, sem que houvesse contradição com qualquer dado experimental. Em vez de adotar este ponto de vista razoável, Einstein resolveu mudar o significado desta velocidade, gerando uma grande confusão em toda a física teórica desde então.

---

[53] [Ein78c, pág. 71].

[54] A saber, as equações que fornecem as transformações de Lorentz para os campos elétricos e magnéticos.

[55] Sistema de coordenadas em que são válidas as equações da mecânica de Newton, isto é, sistema de referência inercial onde não se precisa introduzir a força fictícia de Coriolis e a força fictícia centrífuga.

[56] Este vetor $(X,\ Y,\ Z)$ é o vetor da força elétrica por unidade de carga. Ou seja, é o vetor campo elétrico, que hoje em dia seria expresso da seguinte maneira: $\vec{E} = (E_x,\ E_y,\ E_z)$.

[57] Ou seja, equações que fornecem as transformações dos campos entre dois sistemas inerciais diferentes que transladam em relação um ao outro.

[58] Ou seja, uma carga elétrica q de valor unitário.

[59] Ou seja, além da força $q\vec{E}$.

[60] Ou seja, uma força dada por $q\vec{v} \times \vec{B}$.

[61] Isto é, uma força eletromotriz que é igual ao produto vetorial da velocidade $\vec{v}$ com o campo magnético $\vec{B}$, sendo a força dada por $q\vec{v} \times \vec{B}$. A força resultante neste enunciado antigo é então dada por $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$.

Na mecânica newtoniana, por exemplo, também existem forças dependentes da velocidade dos corpos. Mas estas forças dependem apenas das velocidades *relativas entre os corpos que estão interagindo.* Ou seja, elas não dependem da velocidade de um corpo em relação ao observador, assim com não dependem da velocidade deste corpo em relação a um sistema de referência. Vamos dar aqui apenas dois exemplos, um da mecânica e outro do eletromagnetismo.

Vamos supor um pára-quedista que salta do alto de uma torre. Ele vai aumentando sua velocidade em relação ao solo até atingir uma velocidade constante de queda quando a força peso é equilibrada pela força de arraste exercida pelo ar sobre o corpo. Como visto na Seção 2.3, esta força de atrito depende apenas da velocidade *relativa* $\vec{v}_r$ entre o corpo e o ar ao seu redor. Esta velocidade relativa é dada por $\vec{v}_r = \vec{v} - \vec{v}_f$, onde $\vec{v}$ é a velocidade do corpo em relação ao solo, enquanto que $\vec{v}_f$ é a velocidade do fluido em relação ao solo na região onde o corpo se encontra. Vamos supor que o ar esteja parado em relação ao solo e que a velocidade terminal do pára-quedista seja $\vec{v}_t$. Logo a força de arraste sobre o pára-quedista no referencial terrestre dependerá de sua velocidade $\vec{v} = \vec{v}_t$. Também do ponto de vista do pára-quedista a força de arraste não será nula, embora ele esteja parado em relação a ele mesmo. Afinal de contas, no referencial S' do pára-quedista teremos $\vec{v}\,' = \vec{0}$, mas a velocidade $\vec{v}_f\,'$ do fluido não será nula. Por exemplo, quando o pára-quedista atingiu a velocidade terminal teremos $\vec{v}_f\,' = -\vec{v}_t$ apontando para cima, de tal forma que $\vec{v}\,' - \vec{v}_f\,' = \vec{v}_t$, assim como ocorria no referencial terrestre. Ou seja, podemos resolver o problema tanto no referencial terrestre quanto no referencial do pára-quedista, sem que surja nenhum paradoxo ou a necessidade de transformação entre campos.

O segundo exemplo é o da lei de Ohm. Se for aplicada uma diferença de potencial $\Delta\phi$ entre os terminais de um circuito com resistência R, a corrente I que fluirá sobre ele será dada por $\Delta\phi = RI$. Em termos microscópicos esta lei pode ser escrita como $\vec{J} = -\sigma\nabla\phi = \sigma\vec{E}$, onde $\vec{J}$ é a densidade de corrente, σ é a condutividade do meio e $\vec{E}$ é o campo elétrico que existe neste ponto (força por unidade de carga). No caso dos metais em que apenas os elétrons se deslocam em relação ao fio, esta densidade de corrente pode ser escrita como $\vec{J} = \rho_-\vec{v}_-$, onde ρ_- é a densidade volumétrica de cargas negativas no fio e $\vec{v}_-$ é a velocidade *relativa* entre o elétron e o fio. Ela pode ser escrita como $\vec{v}_- = \vec{v}_q - \vec{v}_f$, onde $\vec{v}_q$ é a velocidade do elétron em relação ao solo, enquanto que $\vec{v}_f$ é a velocidade do fio em relação ao solo. Assim como no caso anterior, podemos analisar a lei de Ohm tanto no referencial preso ao fio, quanto no referencial que se desloca junto com o elétron. Nos dois casos vai haver a mesma força exercida pelo fio sobre o elétron, já que a velocidade relativa entre eles é sempre a mesma, não importando o referencial.

14.6 Experiência de Michelson-Morley

Um outro problema gerado pela relatividade especial de Einstein surge na interpretação da experiência de Michelson-Morley. Nesta experiência famosa procurou-se por figuras de interferência devidas a dois feixes de luz que deveriam depender do movimento da Terra em relação ao éter. A experiência foi realizada por Michelson em 1881 com precisão de primeira ordem em v/c, sendo v a suposta velocidade da Terra em relação ao éter, tomada na prática como a velocidade da Terra em relação ao referencial das estrelas fixas. Em 1887 uma experiência análoga foi realizada por Michelson e Morley com precisão de segunda ordem em v/c. O efeito não foi encontrado com a ordem de grandeza prevista.

A interpretação mais direta desta experiência é que não existe nenhum éter e que apenas os movimentos relativos entre a luz, os espelhos, as cargas destes espelhos e a Terra são importantes, não interessando o movimento absoluto (ou em relação ao éter) de nenhum destes corpos. Neste sentido os resultados obtidos por Michelson e Morley concordam completamente com a eletrodinâmica de Weber, já que nesta teoria o éter não desempenha nenhum papel.

Mas Lorentz e Fitzgerald (1851-1901) acreditavam no éter. Para explicar o resultado negativo da experiência, mantendo a suposição de um éter que estava em repouso em relação ao céu de estrelas fixas e que não era arrastado pelo movimento da Terra, tiveram de introduzir a ideia de uma contração de comprimento dos corpos rígidos ao transladarem em relação ao éter. Isto é estranho e *ad hoc* mas funciona. Vejamos algumas palavras de Lorentz em seu texto de 1895, parte do qual já está traduzido para a língua portuguesa,[62] nossa ênfase:

> *A Experiência Interferencial de Michelson*
>
> 1. Foi, pela primeira vez, notado por Maxwell — deduz-se com um cálculo muito simples — que o intervalo de tempo que é necessário a um raio de luz para efetuar um percurso de ida e

[62] [Lor78].

volta entre dois pontos A e B muda de valor logo que esses pontos entrem solidariamente *em movimento, sem arrastarem consigo o éter.* É certo que essa variação de valor é uma quantidade de segunda ordem de grandeza, mas é, no entanto, suficientemente grande para poder ser posta em evidência por um método interferencial sensível.

Tal método foi posto em prática por Michelson no ano de 1881[63]. O seu aparelho era uma espécie de interferômetro com dois braços horizontais, P e Q, de igual comprimento, perpendiculares entre si. Dos dois feixes interferentes, um fazia o percurso de ida e volta ao longo do braço P e o outro ao longo do braço Q. Todo o instrumento, incluindo a fonte luminosa e o dispositivo de observação, podia rodar em volta de um eixo vertical, tomando-se especialmente em consideração as duas posições em que um dos braços, ou P ou Q, tinha, tão aproximadamente quanto possível, a mesma direção que o movimento terrestre. Esperava-se então, com fundamento na teoria de Fresnel, que as franjas de interferência sofressem um deslocamento quando, por rotação, o aparelho passasse de uma daquelas "posições principais" para a outra.

De tal desvio de franjas, que a alteração no tempo de propagação deveria determinar, e a que por brevidade, chamaremos desvio de Maxwell, não se encontrou porém o menor vestígio, e por isso entendeu Michelson poder concluir que o éter não permanece em repouso durante o movimento da Terra, conclusão esta cuja justeza em breve viria a ser contestada. Com efeito, Michelson tinha erroneamente avaliado no dobro do seu verdadeiro valor a alteração das diferenças de fase, que, segundo a teoria, seria de esperar; se este erro for corrigido, chega-se a desvios que podiam ainda ficar encobertos pelos erros de observação.

Michelson retomou mais tarde esta investigação, em colaboração com Morley[64], tendo então melhorado a sensibilidade, obrigando para isso cada feixe luminoso a refletir-se diversas vezes entre vários espelhos. Este artifício equivalia a um alongamento considerável dos braços do primitivo aparelho. Os espelhos tinham pesados suportes de pedra a flutuar em mercúrio para poder rodar facilmente.

Cada feixe de luz tinha agora que efetuar um percurso total de 22 metros, e era de esperar, com a teoria de Fresnel, um desvio de 0,4 na distância entre as franjas de interferência, quando se passasse de uma posição principal para a outra. No entanto, na rotação, só se verificaram desvios não superiores a 0,02 da distância entre as franjas, os quais bem podiam resultar de erros de observação.

Dever-se-á, com base neste resultado, aceitar que o éter toma parte no movimento da Terra e, deste modo, que a teoria da aberração de Stokes é a teoria correta? As dificuldades que esta teoria encontra na explicação da aberração parecem-me demasiado grandes para poder aceitar esta opinião e, pelo contrário, levaram-me a procurar a maneira de remover a contradição entre a teoria de Fresnel e o resultado de Michelson.

Consegui isso com uma hipótese que tinha apresentado algum tempo antes[65] e que, como depois vim a saber, também ocorrera a Fitzgerald[66]. No parágrafo seguinte mostrarei em que consiste tal hipótese.

[...]

Daqui resulta que estas mudanças de fase poderão ser compensadas fazendo nas dimensões dos braços modificações que se oponham a elas.

Se admitirmos que o braço colocado segundo a direção do movimento da Terra é mais curto do que o outro, sendo $L.\frac{p^2}{2c^2}$ a diferença de comprimentos, e, ao mesmo tempo, que a translação tem a influência prevista pela teoria de Fresnel, então o resultado da experiência de Michelson fica completamente explicado. Ter-se-ia assim que postular que *o movimento de um corpo sólido através do éter em repouso*, por exemplo o de uma vara de latão, ou o do suporte de pedra utilizada na segunda experiência, tem sobre as suas dimensões uma influência que varia com a orientação do corpo em relação à direção do movimento. [...]

[63] Michelson, American Journal of Science (3) 22 (1881), pág. 120.

[64] Michelson e Morley, American Journal of Science (3) 34 (1887), pág. 333; Phil. Mag. (5) 24 (1887), pág. 449.

[65] Lorentz, Zittingsverslagen der Akad. v. Wet, te Amsterdam, 1892-93, pág. 74.

[66] Como Fitzgerald muito amavelmente me comunicou, ele tinha já, desde há muito tempo, utilizado nas suas lições a sua hipótese. Na literatura só a encontrei mencionada em Lodge, no artigo "Aberration problems" (London Phil. Trans. 184 A [1893], pág. 727).

> [...] Invertendo um raciocínio que atrás se fez, poder-se-ia dizer agora que o desvio proveniente das variações de comprimento é compensado pelo desvio de Maxwell.

Vamos ilustrar o raciocínio empregado por Lorentz e Fitzgerald fazendo uma analogia com cargas elétricas. De acordo com os cálculos de Maxwell, deveria haver um desvio na distância entre as franjas de interferência quando o interferômetro estivesse deslocando-se em relação ao éter. Na nossa analogia, vamos supor que era esperado encontrar uma carga positiva nesta experiência quando houvesse um deslocamento do interferômetro em relação ao éter. Porém, nenhum desvio foi encontrado. Em nossa analogia, encontraram carga nula. A conclusão mais simples seria a de que o éter não existe ou então de que o éter está parado em relação à Terra. Mas como Lorentz e Fitzgerald queriam manter a hipótese da existência do éter, fizeram uma hipótese nova. Além do efeito previsto pelos cálculos de Maxwell, supuseram que um corpo deslocando-se em relação ao éter sofre um encurtamento ao longo desta direção. Na nossa analogia, vamos supor que este encurtamento é análogo ao corpo ficar negativamente carregado sempre que se deslocar em relação ao éter. Ajustaram ainda sua hipótese tal que os dois efeitos se cancelassem exatamente até segunda ordem em v/c. Ou seja, é como se o corpo adquirisse uma carga positiva devida ao efeito previsto por Maxwell, mas passasse a adquirir também uma carga negativa devida à nova hipótese introduzida por eles. Haveria um cancelamento exato destas duas cargas, de tal forma que a carga resultante fosse nula. E isto estava de acordo com a experiência de Michelson e Morley, que não encontraram nenhum desvio na distância entre as franjas de interferência com a ordem de grandeza prevista inicialmente.

Veio então Einstein e afirmou[67] que "a introdução de um 'éter luminífero' revelar-se-á supérflua." Se este é o caso, então ele deveria ter descartado também a ideia de uma contração do comprimento das réguas e dos corpos rígidos. Afinal de contas, esta contração só havia sido introduzida para reconciliar o resultado negativo da experiência de Michelson e Morley com o conceito de éter. Se não há éter, então não se esperaria nenhuma mudança nas franjas de interferência, como de fato não se encontrou. Mas neste caso não faz sentido introduzir ou manter a contração de comprimentos. Afinal de contas, ao eliminar o éter e manter a contração de comprimentos, faz com que se espere novamente uma mudança nas franjas de interferência, só que agora no sentido oposto. Se o éter for supérfluo, então obrigatoriamente a contração de comprimentos também torna-se supérflua. Isto foi claramente apontado por O'Rahilly em seu livro excelente, *Electromagnetic Theory - A Critical Examination of Fundamentals*.[68] Só que Einstein manteve a contração de comprimentos apesar de ter descartado o éter. Com isto mais uma confusão foi introduzida na física.

Na nossa analogia, quando Einstein tornou o éter supérfluo, não mais era esperada nenhuma carga elétrica nesta experiência. Mas ao mesmo tempo em que supôs o éter supérfluo, Einstein manteve a hipótese de contração dos comprimentos. Logo, seria de se esperar uma carga negativa nesta experiência. Mas nenhuma carga foi medida. Portanto, não apenas a introdução do éter deveria ser considerada supérflua por Einstein, mas também a própria hipótese da contração dos comprimentos! Mas não foi isto que ele fez. Por mais incrível que pareça, Einstein eliminou o éter, mantendo ao mesmo tempo a contração dos comprimentos. Obviamente a consequência disto foi uma enorme confusão para explicar a experiência de Michelson-Morley. Além disso, esta hipótese da contração dos comprimentos introduziu inumeráveis problemas e paradoxos em outras áreas da física.

Há diversos outros problemas com a teoria da relatividade especial como sua dificuldade para explicar as experiências de Sagnac e de Michelson-Gale;[69] o argumento de Einstein sobre o disco em rotação;[70] as observações do efeito Doppler para Vênus que parecem contradizer a relatividade especial;[71] soluções superluminais das equações de Maxwell levam a problemas com o princípio de relatividade;[72] etc. Não entraremos em maiores detalhes aqui.

Analisamos em seguida sua teoria da relatividade geral.

---

[67] [Ein78c, pág. 48].
[68] [O'R65, Volume 1, Capítulo VIII, Seção 1, pág. 259].
[69] [Hay95], [Mon96], [Kel97] e [Kel01].
[70] [CR82].
[71] [Tol93].
[72] [RL97].

Capítulo 15

Teoria da Relatividade Geral

A teoria da relatividade geral de Einstein foi apresentada de forma completa em seu trabalho de 1916 intitulado "Os fundamentos da teoria da relatividade geral," que já está traduzido para as línguas portuguesa e inglesa.[1] Apresentamos aqui diversos problemas com esta teoria, como já havíamos feito com a relatividade restrita.

15.1 Grandezas Relacionais

Einstein inicia seu artigo com o seguinte parágrafo:[2]

> A teoria da relatividade especial assenta no seguinte postulado, ao qual satisfaz também a mecânica de Galileu-Newton: se um sistema de coordenadas K for de tal maneira escolhido que as leis da física sejam nele válidas na sua forma mais simples, então as *mesmas* leis serão igualmente válidas em relação a qualquer outro sistema de coordenadas K' que em relação a K esteja animado de um movimento de translação uniforme. Chamaremos a este postulado o "Princípio da Relatividade Especial." Com a palavra "especial" deve entender-se que o princípio se restringe ao caso em que K' tem um *movimento de translação uniforme* em relação a K, não devendo portanto a equivalência de K e K' estender-se ao caso em que haja movimento *não uniforme* de K' em relação a K.

Na teoria da relatividade geral Einstein tentou generalizar sua teoria da relatividade especial introduzindo o seguinte postulado:[3]

> *As leis da física devem ter uma estrutura tal que a sua validade permaneça em sistemas de referência animados de qualquer movimento.*

Isto é, as leis da física devem valer não apenas em referenciais inerciais, mas também em referenciais que estejam acelerados em relação aos referenciais inerciais. Teve Einstein sucesso em sua tentativa? Achamos que não. Talvez um dos motivos tenha sido o caminho escolhido por ele para implementar suas ideias.

De acordo com Barbour:[4]

> O próprio Einstein comentou[5] que a maneira mais simples de realizar o objetivo da teoria da relatividade seria formular as leis do movimento diretamente e desde o início apenas em termos das distâncias relativas e velocidades relativas — nada mais devendo aparecer na teoria. Ele apontou a impraticabilidade desta rota como o motivo para *não* escolhê-la. De acordo com ele, a história da ciência tinha demonstrado a impossibilidade prática de dispensar com os sistemas de coordenadas.

Aqui vão as palavras relevantes de Einstein neste trecho citado por Barbour (há uma tradução para a língua inglesa deste trecho):[6]

---

[1] [Ein16], [Ein52b] e [Ein78b].
[2] [Ein16], [Ein52b] e [Ein78b].
[3] [Ein16, pág. 772], [Ein52b, pág. 113] e [Ein78b, pág. 144].
[4] [Bar89, pág. 6].
[5] A. Einstein, *Naturwissenschaften*, 6-er Jahrgang, No. 48, 697 (1918) (passagem na pág. 699).
[6] [Ein18a, pág. 699] e [BP95, pág. 186].

> Queremos distinguir mais claramente entre as quantidades que pertencem a um sistema físico como tal (que são independentes da escolha do sistema de coordenadas) e as quantidades que dependem do sistema de coordenadas. Nossa reação inicial seria requerer que a física devesse introduzir em suas leis apenas grandezas do primeiro tipo. Contudo, se encontrou que este enfoque não pode ser realizado na prática, como já mostrou claramente o desenvolvimento da mecânica clássica. Poderíamos, por exemplo, pensar — e isto já foi tentado de fato[7] — em introduzir nas leis da mecânica clássica apenas as distâncias dos pontos materiais uns aos outros ao invés das coordenadas; *a priori* poderíamos esperar que desta maneira o objetivo da teoria da relatividade seria obtido mais prontamente. Contudo, o desenvolvimento científico não confirmou esta conjectura. Ele não pode dispensar com os sistemas de coordenadas e, portanto, tem de usar coordenadas de quantidades que não podem ser consideradas como o resultado de medidas definíveis.

Como veremos neste livro, é possível seguir esta rota com sucesso utilizando uma lei de Weber para a gravitação. Einstein errou ao afirmar que este caminho era impraticável. Weber tinha introduzido sua força relacional em 1846, setenta anos antes desta afirmação de Einstein. Neste livro mostramos que com uma lei de Weber aplicada para a gravitação (como sugerido por diversas pessoas desde a década de 1870) implementamos quantitativamente todas as ideias de Mach. Ou seja, mostramos que ao girar o conjunto de galáxias ao redor de um corpo de teste, forças centrífugas e forças de Coriolis vão passar a existir; implementamos uma mecânica sem o conceito de espaço absoluto e também sem grandezas que dependam apenas das coordenadas; os referenciais inerciais passam a ser relacionados com o referencial no qual o conjunto de galáxias está em repouso ou em movimento retilíneo uniforme; a energia cinética passa a ser vista como uma energia de interação; e a dinâmica fica equivalente à cinemática, tal que sempre que duas situações sejam cinematicamente equivalentes (como os pontos de vista ptolomaico e copernicano), elas passam a ser dinamicamente equivalentes (o mesmo achatamento da Terra nos dois casos, a mesma precessão do pêndulo de Foucault em relação ao solo nos dois casos etc.).

15.2 Invariância da Forma das Equações

Em outra parte de seu artigo de 1916 Einstein explicou o que ele entendia pela afirmação de que[8] "as leis da física devem ter uma estrutura tal que a sua validade permaneça em sistemas de referência animados de qualquer movimento." O significado foi clarificado quando postulou o seguinte:[9]

> *As leis gerais da natureza devem ser representadas por equações que tenham validade em todos os sistemas de coordenadas, isto é, que sejam covariantes em relação a toda e qualquer substituição (covariância geral).*

O termo "covariante" havia sido introduzido por Minkowski (1864-1909) em 1907-1908. Ele chamava de "covariância" à *identidade ou igualdade na forma das equações* em dois sistemas inerciais diferentes.[10] Isto é, por leis da mesma *natureza* ou da mesma *estrutura*, Einstein queria dizer leis da mesma *forma*.

Mas sabe-se que isto não é verdadeiro quando comparamos um sistema de referência inercial com um referencial não inercial, ou quando comparamos entre si dois sistemas de referência não inerciais. Por exemplo, em um sistema de referência inercial O temos a segunda lei do movimento de Newton na forma

$$\vec{F} = m_i \vec{a} \ . \tag{15.1}$$

Já em um sistema de referência não inercial O' que gira em relação ao referencial O com uma velocidade angular constante $\vec{\omega}$, esta lei fica na forma da equação (10.40):

$$\vec{F} = m_i \left[\vec{a}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') + 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,' \right] \ . \tag{15.2}$$

Esta equação (15.2) funciona perfeitamente bem nos referenciais não inerciais, como vimos no Capítulo 10. Ou seja, embora a segunda lei de Newton seja expressa pela equação (15.2) no referencial não inercial O', equação esta que possui uma forma diferente da segunda lei de Newton expressa no referencial inercial O,

[7] De acordo com Julian Barbour, Einstein estaria se referindo aqui presumivelmente aos trabalhos de Hofmann e de Reissner.
[8] [Ein16, pág. 772], [Ein52b, pág. 113] e [Ein78b, pág. 144].
[9] [Ein16, pág. 776], [Ein52b, pág. 117] e [Ein78b, pág. 149].
[10] [Mil81, págs. 14, 240-241 e 288].

equação (15.1), obtêm-se resultados equivalentes nestes dois referenciais. Por exemplo, nos dois referenciais obtém-se o mesmo achatamento da Terra, a mesma concavidade da água na experiência do balde de Newton, a mesma velocidade angular de precessão do pêndulo de Foucault em relação ao solo, etc.

Isto significa que a afirmação de Einstein de que as leis da física devem ter a mesma forma em todos os referenciais só vai gerar confusões e ambiguidades. Teremos de modificar muitos conceitos de espaço, de tempo, de medida e de outras grandezas para que esta teoria possa prever corretamente os fatos em sistemas de referência acelerados. Teria sido muito mais simples e coerente com o conhecimento anterior das leis da física impor ou requerer que toda força entre um par de corpos tenha sempre o mesmo valor numérico (embora não necessariamente a mesma forma) em todos os sistemas de referência. Até mesmo as forças inerciais de Newton têm esta propriedade. Por exemplo, o valor $m_i\vec{a}$ no sistema de referência inercial O que aparece na equação (15.1) é exatamente igual em módulo, direção e sentido ao valor $m_i\left[\vec{a}\,' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,') + 2\vec{\omega}\times\vec{v}\,'\right]$ que aparece na equação (15.2) no sistema não inercial O', embora a forma seja completamente diferente nos dois casos. Esta equivalência é implementada na mecânica relacional.

15.3 As Forças Exercidas por Cascas Esféricas

15.3.1 O Que Seria Necessário para Implementar as Ideias de Mach

Há muitos outros problemas com a teoria da relatividade geral de Einstein. Em particular, embora Einstein tivesse tentado implementar com esta teoria o princípio de Mach, ele não conseguiu seu objetivo, como ele próprio admitiu diversas vezes.

Em um livro publicado originalmente em 1922, *O Significado da Relatividade*, baseado em palestras que ministrou em 1921 na Universidade de Princeton, Einstein apresentou três consequências que têm de ser obtidas em qualquer teoria que implemente o princípio de Mach.[11] Este livro já se encontra totalmente traduzido para a língua portuguesa,[12] de onde tiramos as citações. As três consequências apontadas corretamente por Einstein são as seguintes:[13]

> Que é que poderá esperar-se do desenvolvimento do pensamento de Mach?
>
> 1.º A inércia de um corpo deve aumentar se se acumulam na sua vizinhança massas ponderáveis.
>
> 2.º Um corpo deve sofrer uma força aceleradora quando massas vizinhas são aceleradas; a força deve ser do mesmo sentido que a aceleração.
>
> 3.º Um corpo oco animado de um movimento de rotação deve produzir no seu interior um 'campo de Coriolis' que faz com que corpos em movimento sejam desviados no sentido da rotação; deve ainda produzir um campo de forças centrífugas radial.
>
> Vamos mostrar que, segundo a nossa teoria, estes três efeitos previstos por Mach devem realmente manifestar-se, se bem que numa medida de tal maneira mínima que não se põe a questão de os demonstrar por experiências de laboratório.

De acordo com Einstein, uma quarta consequência que se deve esperar de qualquer teoria incorporando o princípio de Mach é que:[14] "Um corpo em um universo vazio não deve ter inércia." Relacionado com isto está a afirmativa de que:

> *Toda* a inércia de qualquer corpo tem de vir de sua interação com outras massas no universo.

Talvez a primeira vez que Einstein disse algo assim tenha sido em seu artigo de 1912 quando afirmou:[15]

> Este resultado, por si próprio, é de grande interesse. Ele mostra que a presença da casca inercial K aumenta a massa inercial do ponto material P dentro dela. Este resultado torna plausível que *toda* a inércia de um ponto material seja o efeito da presença de todas as outras massas, resultando de um tipo de interação com elas. Este é exatamente o ponto de vista defendido persuasivamente por E. Mach em suas investigações profundas desta questão.

---

[11] [Ein80].
[12] [Ein58].
[13] [Ein58, pág. 123].
[14] [Rei73].
[15] [Ein12], [BP95, pág. 180] e [Ein96].

Uma outra afirmação de Einstein corroborando que ele dava esta interpretação para a origem da inércia se encontra em seu artigo de 1917, também já traduzido para a língua portuguesa, intitulado "Considerações cosmológicas sobre a teoria da relatividade geral," onde afirmou:[16]

> Numa teoria da relatividade consequente não pode existir inércia *em relação ao "espaço"*, mas somente inércia das massas *em relação umas às outras.* Portanto, se eu colocar uma massa a uma distância espacial suficientemente grande de todas as outras massas do Universo, a sua inércia deverá desvanecer-se.

Outra afirmação análoga de Einstein, nossa ênfase:[17]

> Se bem que todos estes efeitos sejam inacessíveis à experiência, em virtude do pequeno valor de k, não pode duvidar-se da sua existência como o exige a teoria da relatividade geral. É preciso ver nisso um apoio sólido da concepção de Mach da *relatividade de todos os efeitos da inércia. Se se leva esta ideia até ao fim, deverá compreender-se que toda a inércia, isto é, todo o campo $g_{\mu\nu}$, seja determinado pela matéria do universo*, e não por condições de limite, no infinito.

Embora Einstein pensasse inicialmente que estas quatro consequências podiam ser obtidas de sua teoria da relatividade geral, ele logo percebeu que este não era o caso. Para uma análise detalhada mostrando que a relatividade geral não implementa o princípio de Mach e para as referências originais, ver os trabalhos de Dennis Sciama (1926-1999), Reinhardt, Raine e Pais.[18] Nas próximas Subseções veremos alguns aspectos nos quais a teoria da relatividade geral falhou ao implementar o princípio de Mach, frustrando as expectativas de Einstein.

15.3.2 Força Exercida por uma Casca Esférica Parada

A primeira consequência apresentada na Subseção 15.3.1 não aparece na relatividade geral.[19] Isto é, não há efeitos observáveis no laboratório devidos a uma aglomeração simetricamente esférica de matéria em repouso ao redor dele. Isto significa que a inércia de um corpo não é aumentada na relatividade geral com a aglomeração de massas ao redor dele.

Em 1912 Einstein formulou uma teoria escalar da gravitação relativística.[20] Neste trabalho chegou inicialmente na conclusão errada de que a relatividade geral previa este efeito. Para isto considerou uma casca esférica K de raio R, no centro da qual supôs um ponto material P, figura 15.1.

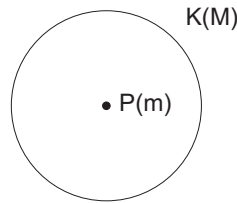



Figura 15.1: Casca esférica de massa M e raio R, com massa pontual m em seu centro.

Einstein supôs ainda que M denotava a massa inercial da casca esférica K na ausência do ponto material P, enquanto que m indicava a massa inercial da partícula P na ausência da casca esférica K. Obteve então, dentro de sua teoria escalar, que a presença da casca esférica M induzia um aumento na massa da partícula teste, de m para m', tal que

$$m' = m\left(1 + \frac{GM}{Rc^2}\right) . \tag{15.3}$$

De acordo com Einstein,[21] este resultado "mostra que a presença da casca inercial K aumenta a massa inercial do ponto material P dentro da casca." Em seu livro de 1922 ele manteve esta conclusão ao afirmar:[22] "A

[16] [Ein17], [Ein52a, pág. 180] e [Ein78a, pág. 229].
[17] [Ein58, pág. 126].
[18] [Sci53], [Rei73], [Rai81] e [Pai82, págs. 282-288].
[19] [Rei73] e [Pfi95].
[20] [Ein12], com tradução para a língua inglesa em [Ein96].
[21] [Ein12], com tradução para a língua inglesa em [Ein96].
[22] [Ein58, pág. 125].

massa inerte é proporcional a $1 + \bar{\sigma}$, e portanto aumenta quando massas ponderáveis se aproximam do corpo de prova."

Contudo, este foi um resultado errado baseado em uma interpretação de um cálculo feito em um sistema de coordenadas particular, como foi apontado por Brans em 1962.[23] Reinhardt resumiu a situação da seguinte forma, referindo-se ao primeiro efeito apontado por Einstein de que a inércia de um corpo deve aumentar quando se acumulam na sua vizinhança massas ponderáveis:[24]

> Einstein[25] pensou que o efeito (i) ocorria na relatividade geral. Contudo, isto foi baseado em uma interpretação errônea de um cálculo realizado em um sistema de coordenadas especial como Brans[26] foi capaz de mostrar. Não existem efeitos observáveis em um laboratório devidos a uma aglomeração simetricamente esférica de matéria ao redor dele. Este é um sério golpe ao princípio de Mach.

Concordamos com tudo o que foi dito por Reinhardt, exceto a última frase. Este resultado obtido por Brans não deve ser considerado um sério golpe ao princípio de Mach. Ao contrário disto, este resultado obtido por Brans tem de ser considerado um sério golpe contra a teoria da relatividade geral de Einstein!

Este resultado final da relatividade geral, como obtido por Brans e todos os outros que se seguiram desde então, é análogo ao que acontece com a lei de Newton da gravitação, como visto na Seção 1.4. Ou seja, também na relatividade geral obtém-se que uma casca esférica parada, de raio R e massa gravitacional M_g, não exerce forças sobre corpos em seu interior, quaisquer que sejam as posições, velocidades e acelerações destes corpos em relação à casca, figura 15.2.

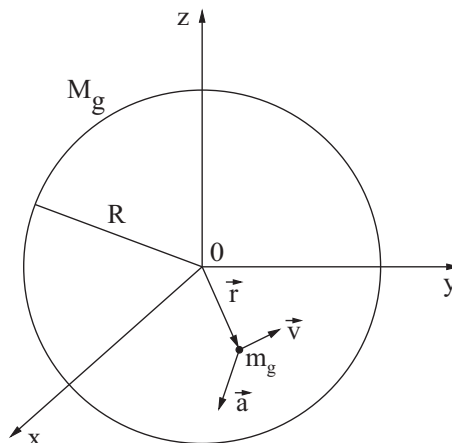



Figura 15.2: De acordo com a relatividade geral de Einstein, uma casca esférica parada não exerce força sobre um corpúsculo localizado em qualquer ponto de seu interior.

Esta força é nula qualquer que seja a velocidade $\vec{v}$ ou aceleração $\vec{a}$ da partícula teste:

$$\vec{F}_{casca\ em\ m_g} = \vec{0}\ . \tag{15.4}$$

Outra maneira de expressar o resultado dado pela equação (15.4) é afirmando que a massa inercial de uma partícula de prova não aumenta, de acordo com a relatividade geral, quando se acumulam massas ponderáveis ao redor desta partícula. Este resultado obtido pela relatividade geral em sua formulação final é contrário às expectativas iniciais de Einstein. Este resultado também é totalmente contrário ao princípio de Mach.

15.3.3 Força Exercida por uma Casca Esférica Linearmente Acelerada

Como visto na Subseção 15.3.1, a segunda consequência prevista por Einstein e que teria de ser satisfeita em qualquer teoria que implementasse o princípio de Mach, é a de que um corpo deve sofrer uma força aceleradora quando massas vizinhas são aceleradas. Além do mais, esta força deve ter o mesmo sentido

[23] [Bra62b], [Bra62a], [Rei73] e [Pfi95].
[24] [Rei73].
[25] A. Einstein, The Meaning of Relativity, Princeton University Press, Princeton 1955.
[26] C. Brans, Phys. Rev. **125**, 2194 [1962].

que a aceleração da massa vizinha. Einstein calculou este efeito pela primeira vez em 1912.[27] Considerou novamente a casca esférica K de massa M e raio R com um ponto material P de massa m em seu centro. Supôs então que uma força externa fornecesse uma aceleração linear Γ à casca esférica, figura 15.3.

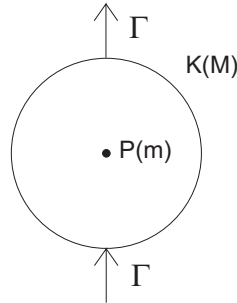



Figura 15.3: Casca esférica K de massa M e raio R, com uma aceleração Γ, tendo uma massa pontual m em seu centro P.

Fez-se então a seguinte pergunta:[28] "Vai agir uma força sobre o ponto material fixo P caso eu forneça uma aceleração Γ à casca K?" Após realizar os cálculos, concluiu que haveria esta força, sendo ela dada por $F_{Mm} = 3GmM\Gamma/2Rc^2$. Ou seja, a partícula teste sofreria uma aceleração induzida γ dada por $\gamma = F_{Mm}/m$, isto é, $\gamma = (3MG/2Rc^2)\Gamma$.

No mesmo ano Einstein começou a desenvolver uma teoria tensorial do campo gravitacional. Em junho de 1913 ele escreveu um texto com seu amigo Michele Besso (1873-1955). Eles fizeram um novo cálculo do arraste induzido sobre uma partícula no interior de uma casca esférica ao fornecer uma aceleração linear Γ à casca. O resultado que obtiveram[29] foi o de que a partícula sofreria uma aceleração induzida γ dada por $\gamma = (2MG/Rc^2)\Gamma$. Ou seja, um fator $4/3$ maior do que o resultado anterior de 1912.

Também no livro de 1922 Einstein concluiu[30] que "há uma ação indutiva das massas aceleradas sobre o corpo de prova."

Embora na relatividade geral um corpo sofra uma aceleração se corpos próximos são acelerados, a interpretação deste efeito não é única.[31]

Qual é o valor da força exercida pela casca esférica acelerada ao atuar sobre uma partícula em seu interior? Embora esta pergunta pareça simples, até hoje não há um consenso sobre a resposta correta a esta pergunta dentro da teoria da relatividade geral. Os cálculos para chegar na resposta final estão ficando cada vez mais complicados, na medida em que se colocam mais fatores para fazer as contas corretamente. As interpretações dos resultados finais também ficam mais complicados a cada dia. Em particular, os autores têm de levar em conta a fonte de energia que mantém a aceleração da casca, as tensões sobre a casca acelerada, se a casca esférica possui ou não uma carga elétrica além de uma massa gravitacional, se estamos na região de campo forte ou campo fraco, etc. As referências sobre estes diversos tratamentos, assim como os resultados divergentes obtidos por diferentes autores, podem ser encontradas nos artigos de Reinhardt e Pfister, assim como nas referências citadas por estes autores.[32]

15.3.4 Força Exercida por uma Casca Esférica Girando

A terceira consequência apontada por Einstein na Subseção 15.3.1 é a de que um corpo oco animado de um movimento de rotação devia produzir no seu interior um 'campo de Coriolis' que fizesse com que corpos em movimento fossem desviados no sentido da rotação. Além disso, este corpo oco deveria produzir também um 'campo de forças centrífugas radial.'

Estes efeitos aparecem na relatividade geral, como foi obtido pela primeira vez por H. Thirring (1888-1976) em 1918, com uma correção de seu trabalho aparecendo em 1921.[33] Inicialmente Thirring trabalhou com uma casca esférica oca girando e calculou sua influência sobre outros corpos. Depois pesquisou também uma esfera sólida girando e calculou sua influência sobre corpos deslocando-se fora da esfera, em um trabalho

[27] [Ein12], com tradução para a língua inglesa em [Ein96].
[28] [Ein12], com tradução para a língua inglesa em [Ein96].
[29] [Pfi07].
[30] [Ein58, pág. 125].
[31] [Rei73] e [PFH05].
[32] [Rei73] e [PFH05].
[33] [Thi18] e [Thi21].

conjunto com J. Lense (1890-1985).[34] Há uma tradução para a língua inglesa destes três trabalhos básicos de Thirring e Lense em um artigo de Mashhoon, Hehl e Theiss.[35]

Contudo, os termos obtidos na relatividade geral não são exatamente como deviam ser.

Seja uma casca esférica de massa M, raio R, girando com uma velocidade angular constante $\vec{\Omega}$ em relação a um certo referencial O, figura 15.4.

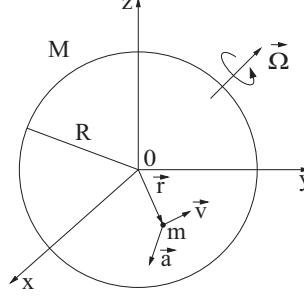



Figura 15.4: Casca esférica girando.

Vamos supor ainda que no interior desta casca temos uma partícula teste interna de massa m, localizada em $\vec{r}$ em relação ao centro da casca e movendo-se no referencial O com uma velocidade $\vec{v}$ e aceleração $\vec{a}$. Trabalhando na aproximação de campo fraco, Thirring mostrou que esta casca exerce uma força $\vec{F}$ sobre a partícula interna m, dada por:[36]

$$\vec{F} = -\frac{8GMm(\vec{\Omega}\cdot\vec{r})\vec{\Omega}}{15Rc^2} - \frac{4GMm\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r})}{15Rc^2} - \frac{8GMm(\vec{v}\times\vec{\Omega})}{3Rc^2} \ . \tag{15.5}$$

Colocando em evidência o termo $-4GM/(15Rc^2)$ obtém-se que esta equação fica na forma:

$$\vec{F} = -\frac{4GM}{15Rc^2}\left[2m(\vec{\Omega}\cdot\vec{r})\vec{\Omega} + m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}) + 10m(\vec{v}\times\vec{\Omega})\right] \ . \tag{15.6}$$

Há um termo espúrio axial $m(\vec{\Omega}\cdot\vec{r})\vec{\Omega}$ nestas equações que não tem equivalente na mecânica newtoniana. Isto é, não há nenhuma "força fictícia" que se comporta como ele. Além do mais, o coeficiente $4/15$ do termo centrífugo $m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r})$ é diferente do coeficiente $4/3$ do termo de Coriolis $2m\vec{v}\times\vec{\Omega}$ da equação (15.5). Ou seja, o coeficiente do termo centrífugo $m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r})$ é 5 vezes menor do que o coeficiente do termo de Coriolis $2m\vec{v}\times\vec{\Omega}$ da equação (15.6). Já na força fictícia newtoniana $\vec{F}_f$ estes termos têm coeficientes com o mesmo valor, ver a equação (10.39):

$$\vec{F}_f = -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,') - 2m(\vec{\omega}\times\vec{v}\,') - m\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}\,' - m\frac{d^2\vec{h}}{dt^2} \ , \tag{15.7}$$

onde $d^2\vec{h}/dt^2$ é a aceleração da origem do referencial não inercial O' em relação à origem do referencial inercial O.

Isto mostra que a teoria da relatividade geral de Einstein não conseguiu deduzir simultaneamente a força centrífuga e a força de Coriolis, ao contrário do que Einstein almejava. Desenvolvimentos posteriores feitos por Bass, Pirani, Brill, Cohen e muitos outros também não tiveram sucesso neste sentido.[37] Isto é, eles não conseguiram deduzir, baseados na relatividade geral, estes dois termos simultaneamente com os coeficientes corretos, como se sabe que eles existem nos referenciais não inerciais da teoria newtoniana. Também não foi possível eliminar o termo espúrio axial, dado por $-8GMm(\vec{\Omega}\cdot\vec{r})\vec{\Omega}/(15Rc^2)$, que aponta na direção de $\vec{\Omega}$. Este termo espúrio é previsto pela relatividade geral, embora se saiba que não exista nenhuma força fictícia que se comporte assim em referenciais não inerciais da mecânica clássica.[38] Isto mostra que não podemos deduzir os resultados corretos da mecânica clássica em referenciais não inerciais a partir da teoria da relatividade geral de Einstein.

[34] [LT18].
[35] [MHT84].
[36] [Thi21], [PR94] e [Pfi95].
[37] [BP55], [BC66], [CB68], [Rei73], [PR94] e [Pfi95].
[38] [BP55], [BC66], [CB68], [Rei73], [PR94] e [Pfi95].

Colocando $\vec{\Omega} = \vec{0}$ na equação (15.5) reobtém-se a equação (15.4). Ou seja, mostra-se mais uma vez que a primeira consequência apontada na Subseção 15.3.1 não ocorre na relatividade geral. Isto é, uma casca esférica estacionária e sem girar não exerce qualquer força sobre uma partícula teste interna, não interessando a posição, velocidade e aceleração da partícula em relação à casca. Isto significa que na relatividade geral, a inércia de um corpo não é aumentada quando colocamos cascas esféricas materiais ao redor dele, ao contrário do que Einstein almejava.

Vale a pena observar aqui que Einstein chegou na terceira consequência (que uma casca girando deve gerar forças centrífugas em corpos que estão em seu interior) influenciado pelas ideias de Mach. Como vimos anteriormente na Subseção 12.1.2, Clarke concluiu que as ideias de Leibniz levavam exatamente ao mesmo efeito, mas de trás para a frente. Isto é, se aniquilarmos o conjunto de estrelas (cascas esféricas) que giram ao redor da Terra e do Sol, as forças centrífugas teriam de desaparecer (a Terra não seria mais achatada nos polos etc). Isto mostra quão similares são as ideias de Leibniz e de Mach.

15.3.5 Na Relatividade Geral um Corpo Tem Inércia Mesmo em um Universo Vazio, Contrariando o Princípio de Mach

Como visto na Subseção 15.3.1, Einstein previu ainda uma quarta consequência para implementar o princípio de Mach, a saber, que um corpo não deve ter inércia se estiver em um universo vazio, isto é, em um universo que não tenha outros corpos. Ou seja, toda a inércia de qualquer corpo deveria vir de suas interações com outras massas no universo.

Contudo, esta consequência também não ocorre na relatividade geral, contrariando mais uma vez as expectativas iniciais de Einstein. Ele próprio mostrou que suas equações de campo levavam à consequência de que uma partícula teste em um universo vazio tinha propriedades inerciais.[39] O conceito de massa inercial é tão intrínseco ao corpo e ao espaço na relatividade geral quanto o era na mecânica newtoniana. Einstein não teve sucesso em construir uma teoria onde toda a inércia de um corpo viria de suas interações gravitacionais com outros corpos no universo, de tal forma que se os outros corpos do universo fossem aniquilados ou não existissem, então a inércia deste corpo também desapareceria.

Reinhardt resumiu bem a situação nas seguintes palavras:[40]

> A consequência (ii)[41] também não ocorre na relatividade geral. Uma solução para espaço-tempo vazio (o tensor energia-momento $T_{\mu\nu} = 0$ em todo lugar) é o espaço de Minkowski da relatividade especial no qual um corpo de prova infinitesimal possui sua inércia usual. Também no caso do espaço-tempo de Schwarzschild, isto é, de um corpo isolado em um espaço de outra maneira vazio, o teorema de Birkhoff mostra que ao prescrever simetria esférica somos obrigados a chegar na métrica de Minkowski pseudo-euclidiana no infinito, de tal forma que mais uma vez um corpo de prova possui sua inércia integral, não interessando o quão distante ele possa estar de outras massas no universo.

Para evitar esta consequência indesejável de sua teoria da relatividade geral, Einstein chegou a introduzir em 1917 um termo novo em suas equações, representado por λ ou por Λ.[42] Este termo é denominado hoje em dia de *constante cosmológica*. Einstein pensou que as equações de campo com $\Lambda > 0$ não teriam soluções para $T_{\mu\nu} = 0$, ou seja, que não haveria inércia na ausência de matéria, de acordo com o princípio de Mach.[43]

Mas esta tentativa não funcionou, já que W. de Sitter (1872-1934) encontrou em 1917 uma solução para suas equações de campo modificadas na ausência de matéria.[44]

Einstein acabou abandonando sua constante cosmológica como sendo supérflua e sem justificativa.[45]

Einstein nunca pôde evitar o aparecimento da inércia em relação ao espaço nas suas teorias, embora isto fosse uma exigência do princípio de Mach.

---

[39] [Sci53] e [Rei73].
[40] [Rei73].
[41] Reinhardt está referindo-se aqui à previsão de Einstein de que um corpo em um universo vazio não deveria ter inércia.
[42] [Ein17], com tradução para a língua inglesa em [Ein52a] e para a língua portuguesa em [Ein78a].
[43] [Rei73].
[44] [dS17], [Rei73], [Pai82, pág. 287] e [Jam10, pág. 238].
[45] [Ein31] e [Rei73].

15.4 Outros Aspectos pelos quais a Relatividade Geral Não Implementa o Princípio de Mach

Uma discussão importante mostrando que a teoria da relatividade geral de Einstein ainda mantém o conceito de espaço-tempo absoluto com existência independente da matéria distante (estrelas e galáxias), não satisfazendo portanto às ideias de Mach, se encontra nos trabalhos de Michel Ghins.[46] Uma outra análise mostrando diversos aspectos em que a relatividade não implementa o princípio de Mach se encontra em Jammer.[47]

Erwin Schrödinger (1887-1961) apresentou de uma forma clara o fato de que a relatividade geral não implementa o princípio de Mach. Em um artigo muito importante de 1925, que já se encontra traduzido para as línguas inglesa e portuguesa, ele afirmou o seguinte:[48]

> A teoria da relatividade geral também não satisfaz, em sua forma original, ao postulado de Mach, como logo se viu. Após a derivação do movimento secular do periélio de Mercúrio, que se mostrou em espantosa concordância com a experiência, qualquer pessoa ingênua pode se perguntar: Em relação a que se dá, de acordo com a teoria, o movimento da elipse, o qual, de acordo com a experiência, se dá em relação ao sistema aproximado de estrelas fixas? Tem-se como resposta que a teoria exige tal movimento em relação a um sistema de coordenadas que satisfaz, no infinito, a determinadas condições de fronteira. O vínculo entre estas condições e a presença das estrelas fixas não é, de nenhuma maneira, claro, já que as estrelas não são levadas em conta nos cálculos.

Ou seja, como as estrelas não são levadas em conta no cálculo da precessão do periélio dos planetas na relatividade geral, não faz sentido dizer que esta precessão ocorre em relação ao pano de fundo formado pelas estrelas fixas. Por outro lado, as observações dos astrônomos indicam que esta precessão ocorre em relação às estrelas fixas. Isto só pode ser uma coincidência na relatividade geral. Na mecânica relacional, isto deixa de ser uma coincidência. Vai-se mostrar que é o conjunto de galáxias que gera a força "inercial" $-m\vec{a}$ ou a energia "cinética" $mv^2/2$. Ou seja, a massa gravitacional das galáxias tem uma influência fundamental sobre o movimento dos corpos do sistema solar. A precessão do periélio dos planetas calculada com a mecânica relacional ocorre realmente em relação ao pano de fundo das galáxias, e não em relação a um referencial abstrato desvinculado da matéria distante, como será visto na Seção 23.1.

Tudo isto mostra que mesmo na teoria da relatividade geral de Einstein os conceitos de espaço absoluto ou de sistemas de referência inerciais preferenciais desvinculados da matéria distante ainda estão presentes, o mesmo ocorrendo com a inércia ou com as massas inerciais.

15.5 Incoerências da Teoria da Relatividade Geral

Nesta Seção vamos analisar algumas experiências e fenômenos observacionais que mostram diversas incoerências com a teoria da relatividade geral de Einstein.

15.5.1 Força Gravitacional Exercida pelas Galáxias sobre Corpos no Sistema Solar

Nesta Subseção vamos calcular a força gravitacional exercida pelas galáxias sobre corpos localizados no sistema solar. Vamos fazer estas contas em dois sistemas de referência diferentes. O primeiro é o referencial inercial U no qual o conjunto de galáxias está em repouso, sem aceleração linear e sem rotação. Este é o chamado *referencial universal*, como visto na Seção 1.7, figura 15.5 (a). O segundo sistema de referência é o referencial não inercial R no qual o conjunto de galáxias está girando como um todo com uma velocidade angular $\vec{\Omega}_{GR}$ ao redor da Via Láctea e do sistema solar, figura 15.5 (b).

Vamos calcular no referencial universal U a força gravitacional exercida pelo conjunto de galáxias sobre um corpo de massa gravitacional m_g que está no sistema solar. O universo é essencialmente isotrópico em larga escala, com uma densidade constante de massa gravitacional ρ_{go}. Pode-se então considerar o conjunto de galáxias como compondo várias cascas esféricas ao redor da Via Láctea. Foi visto na equação (15.4) que, de acordo com a relatividade geral, a força gravitacional exercida por uma casca esférica em repouso ao

[46] [Ghi91] e [Ghi92].
[47] [Jam93, págs. 194-199] e [Jam10, págs. 234-241].
[48] [Sch25], [XA94] e [Sch95].

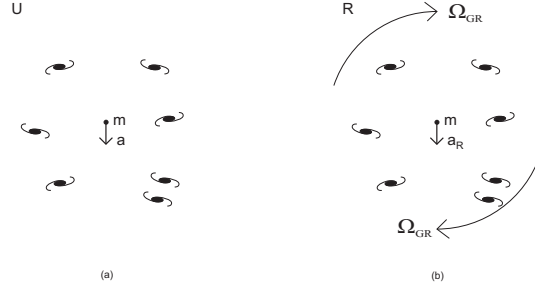



Figura 15.5: (a) Referencial universal U. (b) Referencial não inercial R no qual o conjunto de galáxias gira com velocidade angular $\vec{\Omega}_{GR}$ ao redor do sistema solar.

atuar sobre um corpo em seu interior é nula, não interessando a velocidade nem a aceleração deste corpo em relação à casca. Ao integrar este resultado para todo o universo continuaremos a ter uma força gravitacional nula exercida pelo conjunto de galáxias sobre qualquer corpo da Via Láctea, assim como ocorria na mecânica newtoniana. Ou seja, nestas duas teorias obtém-se que:

$$\vec{F}^{referencial\ U}_{gal\acute{a}xias\ em\ m_g} = \vec{0} \ . \tag{15.8}$$

Isto significa que a equação de movimento na relatividade geral para corpos de massa inercial m_i pertencentes ao sistema solar que deslocam-se com aceleração $\vec{a}_{mU}$ em relação ao referencial inercial U reduz-se na maioria dos casos ao resultado newtoniano dado pelas equações (1.3) ou (1.4), isto é:

$$\vec{F} = m_i \vec{a}_{mU} \ , \tag{15.9}$$

onde $\vec{a}_{mU} = d\vec{v}_{mU}/dt$ é a aceleração do corpo em relação ao referencial universal U, sendo $\vec{v}_{mU}$ sua velocidade neste referencial. Nesta equação $\vec{F}$ representa a força resultante atuando sobre m_i e sendo devida a suas interações com os outros corpos do universo.

Agora calculamos a força gravitacional exercida sobre m_g pelo conjunto de galáxias no referencial não inercial R, figura 15.5 (b). A partícula de massa m_g tem vetor posição $\vec{r}_{mR}$, velocidade $\vec{v}_{mR}$ e aceleração $\vec{a}_{mR}$ em relação à origem do referencial R. Temos então um conjunto de cascas esféricas girando ao redor da Via Láctea com uma velocidade angular constante $\vec{\Omega}_{GR}$. De acordo com a relatividade geral, a força $d\vec{F}$ exercida sobre m_g por cada uma destas cascas esféricas de massa gravitacional dM_g é dada pela equação (15.5):

$$d\vec{F} = -d\phi_{RG} \left[\frac{2m_g(\vec{\Omega}_{GR} \cdot \vec{r}_{mR})\vec{\Omega}_{GR}}{5} + \frac{m_g \vec{\Omega}_{GR} \times (\vec{\Omega}_{GR} \times \vec{r}_{mR})}{5} + 2m_g(\vec{v}_{mR} \times \vec{\Omega}_{GR}) \right] \ , \tag{15.10}$$

onde a grandeza adimensional $d\phi_{RG}$ foi definida por:

$$d\phi_{RG} \equiv \frac{4GdM_g}{3Rc^2} \ . \tag{15.11}$$

Na equação (15.10) temos que $\vec{r}_{mR}$ e $\vec{v}_{mR}$ são o vetor posição e a velocidade de m_g em relação ao centro da casca, como medidos no referencial R.

Para saber a força resultante exercida pelo conjunto de galáxias, é necessário integrar esta força para todo o universo conhecido. Usando que o universo é essencialmente isotrópico em larga escala, com uma densidade constante de massa gravitacional ρ_{go}, pode-se escrever a massa dM_g de uma casca esférica de raio R e espessura dR como sendo dada por: $dM_g = 4\pi\rho_{go}R^2dR$. Ao integrar a equação (15.10) de $R = 0$ até o raio R_U do universo conhecido obtém-se a força $\vec{F}^{referencial\ R}_{gal\acute{a}xias\ em\ m_g}$ exercida pelo conjunto de galáxias sobre m_g, no referencial R, como sendo dada por:

$$\vec{F}^{referencial\ R}_{gal\acute{a}xias\ em\ m_g} = -\Phi_{RG} \left[\frac{2m_g(\vec{\Omega}_{GR} \cdot \vec{r}_{mR})\vec{\Omega}_{GR}}{5} + \frac{m_g \vec{\Omega}_{GR} \times (\vec{\Omega}_{GR} \times \vec{r}_{mR})}{5} + 2m_g(\vec{v}_{mR} \times \vec{\Omega}_{GR}) \right] \ , \tag{15.12}$$

onde a grandeza adimensional Φ_{RG} foi definida por:

$$\Phi_{RG} \equiv \int_0^{R_U} d\phi = \int_0^{R_U} \frac{4GdM_g}{3Rc^2} = \frac{16\pi\rho_{go}G}{3c^2}\int_0^{R_U} RdR = \frac{8\pi\rho_{go}GR_U^2}{3c^2} \ . \tag{15.13}$$

Pode-se ter uma ideia da ordem de grandeza da constante Φ_{RG} usando que $G = 6,67\times 10^{-11}\ m^3kg^{-1}s^{-2}$, supondo que R_U tenha o valor do comprimento de Hubble, c/H_o, e usando os limites dos valores da constante de Hubble, H_o, dados pela equação (3.33). Com isto obtém-se:

$$0,025 < \Phi_{RG} < 1,2 \ . \tag{15.14}$$

A média destes valores fornece $\Phi_{RG} \approx 0,6$.

Deve-se lembrar que na mecânica newtoniana é nula a força exercida pelo conjunto de galáxias ao atuar sobre uma massa gravitacional m_g, tanto no referencial U quanto no referencial R, devido às equações (1.15) e (1.21). Isto é:

$$\vec{F}^{referencial\ U}_{gal\acute{a}xias\ em\ m_g} = \vec{F}^{referencial\ R}_{gal\acute{a}xias\ em\ m_g} = \vec{0} \quad \text{na mecânica clássica} \ . \tag{15.15}$$

Vamos agora obter, na relatividade geral, a equação de movimento de uma partícula de massa inercial m_i neste referencial não inercial R. Além das forças de interação entre m_i e os outros corpos representadas por $\vec{F}$, é necessário introduzir as forças fictícias da mecânica newtoniana e a força gravitacional exercida pelas galáxias distantes sobre a partícula teste. As forças fictícias são dadas pela equação (10.39), onde $\vec{\omega}$ é a velocidade angular do sistema de referência não inercial em relação ao sistema de referência inercial. Como o sistema de referência inercial que está sendo considerado aqui é o referencial universal U e o referencial não inercial é o referencial R no qual o conjunto das galáxias gira com uma velocidade angular $\vec{\Omega}_{GR}$ em relação ao referencial U, temos $\vec{\omega} = \vec{\Omega}_{GR}$. Combinando as equações (10.40) com a equação (15.12), juntamente com $\vec{\omega} = \vec{\Omega}_{GR}$, e usando $m_i = m_g = m$, obtém-se:

$$\vec{F} - m\vec{\Omega}_{GR}\times(\vec{\Omega}_{GR}\times\vec{r}_{mR}) - 2m\vec{\Omega}_{GR}\times\vec{v}_{mR}$$

$$-\ \Phi_{RG}\left[\frac{2m(\vec{\Omega}_{GR}\cdot\vec{r}_{mR})\vec{\Omega}_{GR}}{5} + \frac{m\vec{\Omega}_{GR}\times(\vec{\Omega}_{GR}\times\vec{r}_{mR})}{5} + 2m(\vec{v}_{mR}\times\vec{\Omega}_{GR})\right] = m\vec{a}_{mR} \ , \tag{15.16}$$

onde Φ_{RG} é dado pelas equações (15.13) e (15.14), enquanto que $\vec{a}_{mR}$ é a aceleração da massa m em relação ao referencial R. Juntando os termos em comum obtemos:

$$\vec{F} - \left(1+\frac{\Phi_{RG}}{5}\right)m\vec{\Omega}_{GR}\times(\vec{\Omega}_{GR}\times\vec{r}_{mR}) - (1-\Phi_{RG})2m\vec{v}_{mR}\times\vec{\Omega}_{GR} - \frac{2\Phi_{RG}}{5}m(\vec{\Omega}_{GR}\cdot\vec{r}_{mR})\vec{\Omega}_{GR} = m\vec{a}_{mR} \ . \tag{15.17}$$

Por outro lado, na mecânica newtoniana é nula a força $\vec{F}^{referencial\ R}_{gal\acute{a}xias\ em\ m_g}$ exercida pelas galáxias sobre m, equação (15.15). Logo, a equação de movimento na mecânica newtoniana neste referencial não inercial R é dada pela equação (10.40) com $\vec{\omega} = \vec{\Omega}_{GR}$, $d\vec{\Omega}_{GR}/dt = \vec{0}$ e $d^2\vec{h}/dt^2 = \vec{0}$, isto é:

$$\vec{F} - m\vec{\Omega}_{GR}\times(\vec{\Omega}_{GR}\times\vec{r}_{mR}) - \ 2m\vec{\Omega}_{GR}\times\vec{v}_{mR} = m\vec{a}_{mR} \ . \tag{15.18}$$

Comparando as equações (15.17) e (15.18) observam-se algumas discrepâncias. Em primeiro lugar, na relatividade geral aparece um termo espúrio axial proporcional a $m(\vec{\Omega}_{GR}\cdot\vec{r}_{mR})\vec{\Omega}_{GR}$. Não há nenhuma força fictícia análoga a esta força na mecânica clássica. Além disso, na mecânica clássica temos o coeficiente 1 multiplicando não apenas a força centrífuga $-m\vec{\Omega}_{GR}\times(\vec{\Omega}_{GR}\times\vec{r}_{mR})$, mas também a força de Coriolis $-\ 2m\vec{\Omega}_{GR}\times\vec{v}_{mR}$. Já na relatividade geral, o coeficiente que multiplica a força centrífuga é dado por $1+\Phi_{RG}/5$, enquanto que o coeficiente que multiplica a força de Coriolis é dado por $1-\Phi_{RG}$. Estes dois coeficientes são diferentes entre si. Além do mais, Φ_{RG} não é desprezível comparado com 1. Como visto na equação (15.14), utilizando os valores estimados da constante de Hubble obtém-se que $0,025 < \Phi_{RG} < 1,2$. Isto significa que não se pode desprezar, no referencial não inercial R, a força exercida pelas galáxias distantes girando ao redor do corpo de prova.

Estas diferenças entre as equações (15.17) e (15.18) geram diversas inconsistências na teoria da relatividade geral. Nas próximas Subseções veremos alguns destes problemas em situações específicas.

15.5.2 Achatamento da Terra

Vamos agora analisar o achatamento da Terra na teoria da relatividade geral. Observa-se que há uma rotação relativa entre a Terra e os corpos astronômicos ao seu redor com um período de um dia sideral. Newton foi o primeiro a prever o achatamento da Terra devido à sua rotação diária, sendo este efeito desde então confirmado experimentalmente. Como a velocidade angular diária da Terra em relação às estrelas é muito maior do que a velocidade angular do conjunto das estrelas fixas em relação ao pano de fundo das galáxias distantes, vamos desprezar aqui esta última rotação. Na figura 15.6 (a) apresentamos a rotação diária da Terra em relação ao conjunto das estrelas e galáxias. O plano do papel está sendo considerado em repouso em relação ao referencial das galáxias distantes.

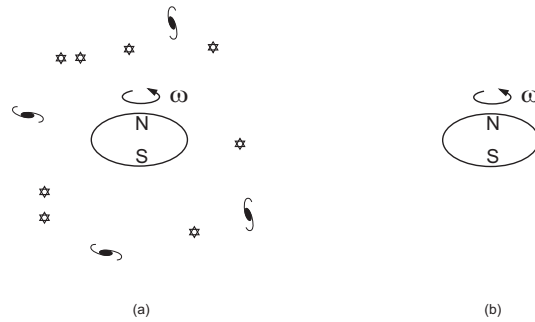



Figura 15.6: Referencial universal U. (a) Galáxias e estrelas paradas, enquanto que a Terra gira diariamente ao redor de seu eixo com uma velocidade angular $\vec{\omega}$, achatando-se nos polos. (b) De acordo com a relatividade geral, o achatamento vai continuar mesmo se não houverem estrelas e galáxias.

No referencial universal U a relatividade geral volta aos mesmos resultados da mecânica newtoniana. As forças atuando sobre um pequeno volume de água são a força gravitacional devida ao restante da massa da Terra no formato elipsoidal e a força de empuxo devida ao gradiente de pressão. Igualando estas forças com $dm\vec{a}$ obtém-se a equação de movimento dada pela equação (9.2). Ao resolver-se esta equação obtém-se o achatamento da Terra da mecânica newtoniana dado pela equação (9.42).

Vamos imaginar uma experiência de pensamento na qual todas as estrelas e galáxias fossem aniquiladas do universo. Qual seria o formato da Terra? De acordo com a relatividade geral, o conjunto de estrelas e galáxias não realiza força sobre a Terra, equação (15.4). Isto significa que podemos desaparecer com as estrelas e galáxias ao redor da Terra sem afetar seu achatamento, como indicado na figura 15.6 (b).

Esta previsão da relatividade geral é contrária ao princípio de Mach. Se a Terra estiver sozinha no universo, não faz sentido falar que ela gira. Logo, também não podem existir efeitos que surgiriam desta hipotética rotação da Terra. Ou seja, uma Terra existindo sozinha no universo teria de ser esférica.

Vamos agora analisar o mesmo problema do ponto de vista de alguém que está parado no solo. Neste referencial terrestre T observa-se as estrelas e galáxias girando ao redor da Terra com uma velocidade angular $\vec{\Omega}_{GT} = -\vec{\omega}$, onde $\vec{\omega}$ é a velocidade angular da Terra em relação ao referencial universal U, figura 15.7.

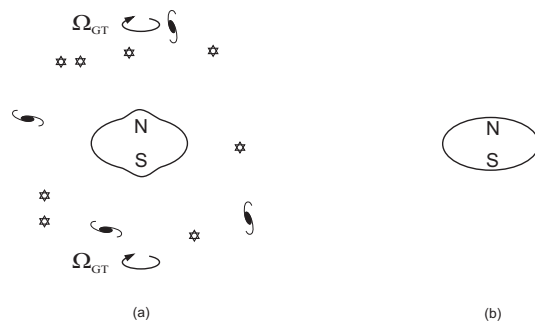



Figura 15.7: Forma qualitativa da Terra, no referencial terrestre T, no qual a Terra está parada enquanto que as galáxias e estrelas giram juntas com uma velocidade angular $\vec{\Omega}_{GT}$ ao redor do eixo Norte-Sul terrestre. (a) Formato qualitativo da Terra de acordo com a relatividade geral. Observe que ela deixa de ser elipsoidal. (b) De acordo com a relatividade geral, o achatamento vai continuar a existir mesmo se não houverem estrelas e galáxias.

Neste referencial não inercial vão haver, de acordo com a relatividade geral, quatro forças atuando sobre um pequeno volume de água, a saber: a força gravitacional devida ao restante da massa da Terra, a força de empuxo devida ao gradiente de pressão, a força centrífuga fictícia, e a força exercida pelas galáxias distantes. Esta última força era nula na mecânica newtoniana, equação (1.21), de tal forma que a equação de movimento na mecânica newtoniana era dada pelas equações (10.28) e (15.15).

Já na relatividade geral a força exercida pelas galáxias distantes sobre qualquer elemento de massa localizado sobre a Terra não é nula, sendo dada pela equação (15.12). A equação de movimento no referencial terrestre, de acordo com a relatividade geral, fica dada pela equação (15.17), a saber:

$$dm\vec{g}-(\nabla p)dV-\left(1+\frac{\Phi_{RG}}{5}\right)m\vec{\Omega}_{GT}\times(\vec{\Omega}_{GT}\times\vec{r}_{mT})-(1-\Phi_{RG})2m\vec{\Omega}_{GT}\times\vec{v}_{mT}-\frac{2\Phi_{RG}}{5}m(\vec{\Omega}_{GT}\cdot\vec{r}_{mT})\vec{\Omega}_{GT}=m\vec{a}_{mT} . \tag{15.19}$$

com Φ_{RG} dado pelas equações (15.13) e (15.14).

Neste referencial terrestre tem-se que a água está parada, tal que $\vec{v}_{mT}=\vec{0}$ e $\vec{a}_{mT}=\vec{0}$. Podemos então desprezar a força de Coriolis. Mas não podemos desprezar a força que aponta na direção de $\vec{\Omega}_{GT}$ que aparece na equação (15.19). Ficamos então com a seguinte equação:

$$dm\vec{g}-(\nabla p)dV-\left(1+\frac{\Phi_{RG}}{5}\right)m\vec{\Omega}_{GT}\times(\vec{\Omega}_{GT}\times\vec{r}_{mT})-\frac{2\Phi_{RG}}{5}m(\vec{\Omega}_{GT}\cdot\vec{r}_{mT})\vec{\Omega}_{GT}=\vec{0} . \tag{15.20}$$

A equação de movimento que fornecia a forma elipsoidal achatada da Terra na mecânica newtoniana neste referencial não inercial R era dada pela equação (10.28). Ou seja, impondo que $\vec{a}_{mT}=\vec{0}$:

$$dm\vec{g}-(\nabla p)dV-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_{mT})=\vec{0} . \tag{15.21}$$

Como as equações (15.20) e (15.21) são diferentes, não podem fornecer a mesma solução para a pressão em todos os pontos do interior da Terra. A equação da mecânica newtoniana fornece um elipsoide para a superfície livre do fluido que compõe a Terra. Este elipsoide tem seu formato dado pela equação (9.39), com o valor correto do achatamento dado pela equação (9.42). Já a equação (15.20) não fornece este elipsoide devido ao termo espúrio que aponta na direção de $\vec{\Omega}_{GT}$, ou seja, apontando na direção do eixo Norte-Sul terrestre. A figura 15.7 (a) ilustra de forma qualitativa o formato da Terra de acordo com a relatividade geral. A força espúria axial dada por $-2\Phi_{RG}m(\vec{\Omega}_{GT}\cdot\vec{r}_{mT})/5$ não é desprezível. Ela tem a mesma ordem de grandeza que a força centrífuga dada por $-(1+\Phi_{RG}/5)m\vec{\Omega}_{GT}\times(\vec{\Omega}_{GT}\times\vec{r}_{mT})$.

Observe que a Terra deixa de ter um formato elipsoidal de acordo com a teoria de Einstein. Esta previsão errônea está em gritante conflito com os dados observacionais sobre o achatamento da Terra.

Além disso, o coeficiente $(1+\Phi_{RG}/5)$ que multiplica a força centrífuga $m\vec{\Omega}_{GT}\times(\vec{\Omega}_{GT}\times\vec{r}_{mT})$ também vai gerar um elipsoide, porém com uma achatamento diferente daquele que é observado pelas medidas. Tudo isto mostra as inconsistências que existem nos cálculos da relatividade geral quando comparados com o resultado da teoria newtoniana. O resultado teórico do achatamento da Terra obtido com a relatividade geral no referencial terrestre discorda não apenas do cálculo com a mecânica clássica, mas também discorda do valor empírico que é medido para este achatamento.

Vamos agora imaginar uma experiência de pensamento na qual todas as estrelas e galáxias distantes desaparecessem do universo, deixando a Terra sozinha. Neste caso sobraria, no cálculo do achatamento realizado no referencial não inercial terrestre, a força centrífuga fictícia, mas desapareceria a força das galáxias distantes. O formato da Terra seria então elipsoidal de acordo com a relatividade geral. Embora este resultado coincida com a previsão newtoniana, ele não é compatível com as ideias de Mach. Afinal de contas, se a Terra estiver sozinha no universo, não faz sentido dizer que ela gira. Logo, todos os efeitos que surgiam da rotação da Terra, como era o caso de seu achatamento, deveriam desaparecer juntamente com a aniquilação dos corpos ao redor da Terra. Nada disto acontece na relatividade geral, mostrando mais uma vez que esta não é uma teoria que implemente quantitativamente as ideias de Mach.

15.5.3 Pêndulo de Foucault

Vamos analisar o pêndulo de Foucault na relatividade geral. Inicialmente consideramos o referencial universal U no qual o conjunto de galáxias está em repouso enquanto que a Terra dá uma volta por dia ao redor de seu eixo Norte-Sul. Depois analisamos o mesmo problema no referencial não inercial terrestre T, no qual a

Terra está em repouso e no qual o conjunto de galáxias é visto girando ao redor do eixo Norte-Sul da Terra com um período de um dia.

Para simplificar a análise vamos supor que o pêndulo esteja oscilando com uma frequência angular ω_p sobre o polo Norte da Terra, figura 15.8. A Terra gira diariamente ao redor de seu eixo Norte-Sul com uma velocidade angular ω_{TU} em relação ao referencial inercial universal U.

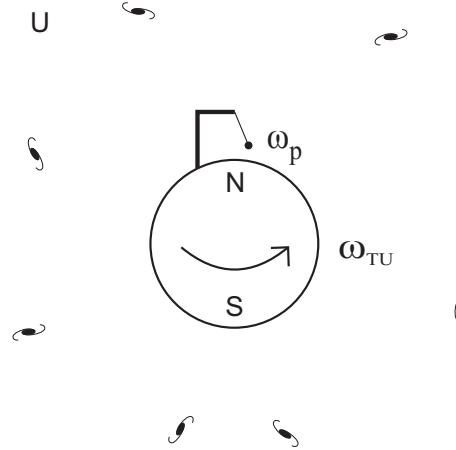



Figura 15.8: Pêndulo de Foucault no referencial universal U na qual a Terra gira uma vez por dia com uma velocidade angular ω_{TU}.

A equação de movimento na relatividade geral reduz-se essencialmente à segunda lei de Newton dada pelas equações (1.3) e (1.4). O plano de oscilação do pêndulo ficará fixo em relação ao referencial universal U, enquanto que a Terra está dando uma volta por dia em relação às galáxias distantes. A situação vista neste referencial universal é representada na figura 15.9. Em (a) temos a situação inicial, enquanto que em (b) temos a situação depois de 3 horas.

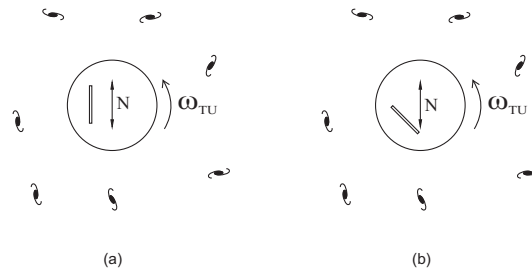



Figura 15.9: O retângulo indica uma parede presa ao solo e girando com a Terra em relação às galáxias, enquanto que o plano de oscilação do pêndulo permanece fixo em relação às galáxias. (a) Situação inicial. (b) Situação depois de 3 horas.

Vamos agora imaginar uma experiência de pensamento na qual todas as estrelas e galáxias distantes fossem aniquiladas. Na relatividade geral o conjunto de galáxias não exerce força sobre o pêndulo, equação (15.8), assim como ocorria na mecânica newtoniana. Logo elas não exercem influência sobre o movimento do pêndulo. Podemos aumentar ou diminuir cascas esféricas de matéria ao redor da Terra sem afetar sobre o que ocorre por aqui. Ou seja, a Terra vai continuar girando em relação ao espaço absoluto de Newton, mesmo na ausência das estrelas e galáxias distantes, enquanto que o plano de oscilação do pêndulo continuará fixo neste espaço vazio, figura 15.10. Em (a) temos a situação inicial, enquanto que em (b) temos a situação depois de 3 horas.

Embora esta previsão seja a mesma previsão da mecânica newtoniana, ela não é compatível com as ideias de Mach. De acordo com Mach, como a Terra está sozinha no espaço, não faz sentido filosófico dizer que ela gira em relação ao espaço vazio. Logo, o plano de oscilação do pêndulo teria de ficar fixo em relação ao solo. Isto mostra mais uma vez que a relatividade geral não implementou o princípio de Mach.

Mas a situação fica realmente incoerente quando analisada do referencial terrestre T. Neste caso a Terra está parada enquanto que o conjunto de galáxias gira ao redor do eixo Norte-Sul da Terra com um período

Figura 15.10: Mesmo desaparecendo com as estrelas e galáxias, a Terra vai continuar girando neste referencial inercial, enquanto que o plano de oscilação do pêndulo continuará fixo no espaço. (a) Situação inicial. (b) Situação depois de 3 horas.

de 1 dia, figura 15.11.

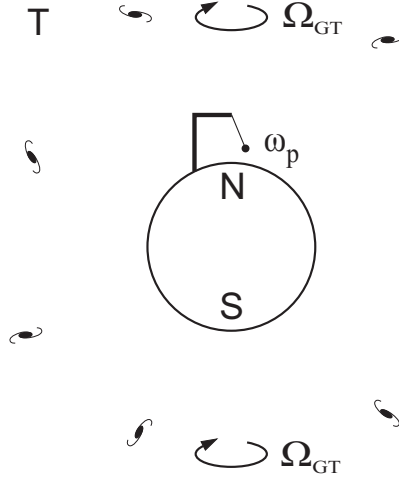



Figura 15.11: Pêndulo de Foucault no referencial terrestre T na qual a Terra está em repouso enquanto que as galáxias giram ao redor de seu eixo Norte-Sul uma vez por dia, com uma velocidade angular Ω_{GT}.

Como o referencial terrestre é não inercial, é necessário introduzir neste referencial tanto as forças fictícias (em particular a força centrífuga e a força de Coriolis), quanto a força gravitacional exercida pelas galáxias distantes que estão girando ao redor da Terra. A equação de movimento para um corpo de teste de massa m é dada então pela equação (15.17). A força centrífuga e a força axial que aponta na direção de $\vec{\Omega}_{GR} = \vec{\omega}_U$ não vão afetar a precessão do pêndulo de Foucault. Logo, serão desconsideradas nesta análise. As forças de interação que atuam sobre o pêndulo são a tensão $\vec{T}$ no fio e o peso do corpo preso ao pêndulo, $m_g\vec{g}$, tal que $\vec{F} = \vec{T} + m_g\vec{g}$. Ficamos então com a seguinte equação de movimento, usando $m_g = m_i = m$:

$$\vec{T} + m\vec{g} - (1 - \Phi_{RG})2m\vec{\Omega}_{GT} \times \vec{v}_{mT} = m\vec{a}_{mT} \ , \tag{15.22}$$

onde $\vec{v}_{mT}$ e $\vec{a}_{mT}$ são a velocidade e aceleração da partícula de massa m_g em relação à Terra.

Esta equação tem a mesma forma da equação de movimento newtoniana dada pela equação (10.31). A única diferença é que temos $(1 - \Phi_{RG})\vec{\Omega}_{GT} \times \vec{v}_{mT}$ em vez de $\vec{\omega}_d \times \vec{v}_{mT}$. A solução terá então a mesma forma da solução newtoniana, só que multiplicada pelo termo $(1 - \Phi_{RG})$. Ou seja, teremos o termo $(1 - \Phi_{RG})$ multiplicando a equação (10.35) no caso particular em que $\operatorname{sen}\alpha = \pi/2\ rad$, já que estamos considerando a situação na qual o pêndulo de Foucault está sobre o polo Norte. A precessão do plano de oscilação de um pêndulo de Foucault colocado no polo Norte, calculada no referencial terrestre T, de acordo com a teoria da relatividade geral, é então dada por:

$$\Omega_{pT} = (1 - \Phi_{RG})\Omega_{GT} \ . \tag{15.23}$$

Nesta equação Ω_{pT} é a velocidade angular do plano de oscilação do pêndulo de Foucault em relação ao solo.

No polo Norte a precessão observada do plano de oscilação do pêndulo tem o período de 1 dia sideral, ou seja, $\Omega_{pT} = 7,29 \times 10^{-5}\ rad/s$. Este é o mesmo valor da velocidade angular das galáxias ao redor da Terra, ou seja, $\Omega_{GT} = 7,29 \times 10^{-5}\ rad/s$. Por outro lado, de acordo com a equação (15.14), temos que $0,025 < \Phi_{RG} < 1,2$. Isto significa que a relatividade geral, de acordo com a equação (15.23), prevê uma

precessão do plano de oscilação do pêndulo diferente do valor observado para esta precessão. Ou seja, ela é inconsistente com as observações experimentais.

E o que aconteceria na situação hipotética em que todas as estrelas e galáxias fossem aniquiladas? De acordo com a relatividade geral, desapareceria a força exercida pelas galáxias sobre o pêndulo, mas ainda existiria a força fictícia de Coriolis atuando no referencial terrestre não inercial. Seria apenas nesta situação hipotética que a relatividade geral preveria uma precessão do plano de oscilação do pêndulo de Foucault com um período de um dia quando ele está oscilando sobre o polo Norte. Embora esta precessão coincida com a previsão da mecânica newtoniana, ela é incompatível com as ideias de Mach. Nesta situação hipotética em que a Terra estivesse sozinha no universo, o plano de oscilação do pêndulo deveria ficar fixo em relação ao solo, já que não faz sentido dizer que a Terra gira em relação a nada material. Logo, todos os efeitos que indicavam a rotação da Terra em relação aos corpos astronômicos distantes deveriam desaparecer juntamente com a aniquilação destes corpos astronômicos. Porém, esta não é a previsão da relatividade geral, contrariando as expectativas iniciais de Einstein.

15.5.4 A Experiência do Balde de Newton

Como a teoria da relatividade geral de Einstein lida com a experiência do balde de Newton? Para analisar este problema vamos nos concentrar em duas situações. Na primeira situação a água e o balde estão em repouso em relação à Terra, enquanto que na segunda situação ambos estão girando juntos com uma velocidade angular constante ω_b em relação à Terra, figura 15.12.

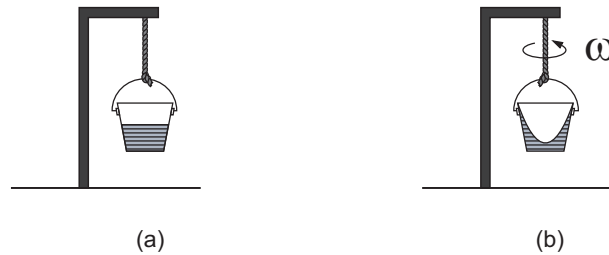



Figura 15.12: Experiência do balde de Newton. (a) Balde e água parados em relação ao solo, com a superfície plana da água. (b) Balde e água girando juntos com velocidade angular ω_b em relação ao solo, com a superfície côncava da água.

Seja $\omega_T \approx 7 \times 10^{-5}$ rad/s a velocidade angular diurna da Terra em relação às estrelas fixas, $\omega_s \approx 2 \times 10^{-7}$ rad/s a velocidade angular anual da Terra em relação às estrelas fixas com o período de um ano, e $\omega_g \approx 7,9 \times 10^{-16}$ rad/s a velocidade angular do sistema solar ao redor do centro de nossa galáxia em relação ao referencial das galáxias distantes (isto é, a velocidade angular de nossa galáxia na posição do sistema solar) com um período de $2,5 \times 10^8$ $anos = 7,9 \times 10^{15}$ s. Como $\omega_b \gg \omega_T > \omega_s \gg \omega_g$, podemos considerar durante esta experiência a Terra como essencialmente sem rotação em relação ao referencial das estrelas fixas e também sem rotação em relação ao referencial das galáxias distantes.

Nosso objetivo nesta Subseção é tentar entender como surge, na teoria da relatividade geral, a curvatura da água na experiência do balde de Newton. Em particular, queremos saber se esta curvatura pode ser devida à rotação da água em relação ao balde, se é devida à rotação da água em relação à Terra, ou ainda se é devida à rotação da água em relação às galáxias. Ou seja, vamos analisar se as propriedades inerciais da água são devidas à sua rotação em relação ao espaço vazio, ou se surgem devido à sua rotação em relação aos corpos materiais que estão ao seu redor, como esperava Einstein.

Como já discutimos na Subseção 8.4.3, a força exercida pelo balde sobre as moléculas de água é a mesma em ambas as situações, já que em ambos os casos o balde está em repouso em relação à água. Logo, na relatividade geral também não é o balde que causa a forma côncava da água.

Na relatividade geral a força exercida pela Terra sobre a água na primeira situação é essencialmente o resultado newtoniano do peso da água apontando verticalmente para baixo. E na segunda situação este resultado permanece praticamente o mesmo, já que $v_a \ll c$, onde v_a é a velocidade tangencial de qualquer molécula de água em relação à Terra, isto é, velocidade horizontal em um plano perpendicular ao eixo de rotação do balde. Ou seja, como as velocidades envolvidas neste problema são desprezíveis quando comparadas com a velocidade da luz, as correções relativísticas (que em geral só começam a ser relevantes para velocidades próximas de c) não precisarão ser levadas em conta pois não serão importantes. Isto significa que também na relatividade geral a rotação da água em relação à Terra não pode ser a responsável pela

concavidade da água. Afinal de contas, tanto na primeira situação quanto na segunda, a força gravitacional exercida pela Terra sobre a água aponta verticalmente para baixo.

E o que podemos dizer sobre as estrelas fixas e galáxias distantes? Como vimos na Seção 13.7, Mach acreditava que a resposta do enigma estava na rotação da água em relação à matéria distante. Mas na relatividade geral não há efeitos observáveis no laboratório devidos a aglomerações simetricamente esféricas de matéria em repouso ao redor dele. Isto é, na relatividade geral as estrelas fixas e galáxias distantes não exercem força resultante ou influência sobre qualquer molécula da água na primeira situação, já que elas estão distribuídas mais ou menos homogeneamente ao redor da Terra, equação (15.4). E na segunda situação, figura 15.12 (b) como vista no referencial terrestre, as estrelas e galáxias continuam não exercendo forças sobre as moléculas da água. Agora temos a água se movendo em relação aos corpos fixos distantes, mas a força resultante exercida pelas estrelas e galáxias ao redor da Terra continua sendo nula, equação (15.4). Isto significa que as estrelas fixas e galáxias distantes não vão exercer qualquer força do tipo $-m\vec{a}$ sobre as moléculas da água. Ou seja, na relatividade geral a forma côncava da superfície da água, na segunda situação, também não é devida à rotação da água em relação às estrelas fixas e galáxias distantes.

Isto significa que na relatividade geral a curvatura da água na segunda situação da figura 15.12 não é devida à rotação da água em relação a qualquer corpo material ao seu redor (tais como o balde, a Terra, as estrelas e galáxias). Mas o efeito é real, já que a água pode até entornar do balde se estiver girando muito rápido. A única explicação oferecida pela relatividade geral tem de ser análoga à explicação de Newton. Isto é, esta concavidade só pode ser devida à rotação da água em relação a alguma coisa imaterial. Esta entidade imaterial pode ser o espaço absoluto de Newton, que nada mais é do que o espaço vazio. Ou então teria de ser a rotação da água em relação a qualquer sistema de referência inercial, desde que este sistema de referência inercial seja desvinculado da matéria distante no universo. Ou seja, desde que este referencial inercial não tenha qualquer relação física com as estrelas e galáxias. Daqui vemos mais uma vez que a relatividade geral manteve os conceitos newtonianos de espaço e movimento absolutos ou, se preferir, manteve o conceito de referenciais inerciais independentes da matéria distante.

Para enfatizar este ponto, vamos supor uma situação hipotética na qual estamos no referencial universal U descrito na Seção 1.7 no qual o conjunto de galáxias está em repouso neste referencial. Vamos supor ainda que um planeta como a Terra também está em repouso neste referencial. Quando a água e o balde estão parados em relação a este planeta, a superfície da água fica plana, figura 15.13 (a). Quando a água e o balde estão girando juntos com uma velocidade angular constante ω em relação ao solo, a superfície da água fica côncava, figura 15.13 (b).

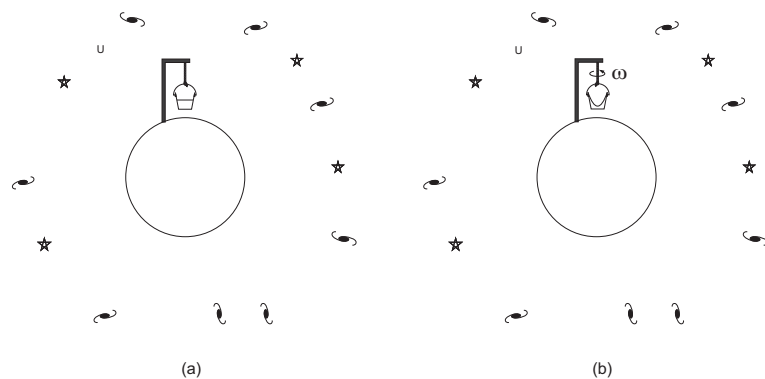



Figura 15.13: Referencial universal U no qual o planeta e o conjunto de galáxias está em repouso. (a) Balde e água parados em relação ao solo, com a superfície plana da água. (b) Balde e água girando juntos com velocidade angular ω_b em relação ao solo, com a superfície côncava da água.

Na relatividade geral não existem efeitos observáveis devidos a distribuições esfericamente simétricas de matéria em repouso ao redor do laboratório. Logo, podemos dobrar o número e a quantidade de massa gravitacional das galáxias ao redor do balde sem afetar a concavidade da água, figura 15.14 (a). Ou então, podemos fazer com que todas as estrelas e galáxias distantes sejam aniquiladas ou desapareçam sem causar a menor diferença na forma da superfície da água, figura 15.14 (b). Esta previsão é completamente contrária às ideias de Mach, já que de acordo com ele a concavidade da água era devida à sua rotação em relação à matéria distante. Isto significa que, de acordo com as ideias de Mach, se a matéria distante desaparecesse, então a concavidade da água deveria desaparecer conjuntamente. Ou, se pudéssemos dobrar a quantidade de massa gravitacional distante, a concavidade da água deveria dobrar, supondo a mesma rotação relativa

de antes (dando uma volta por segundo, por exemplo). E nada disto acontece na teoria da relatividade geral de Einstein.

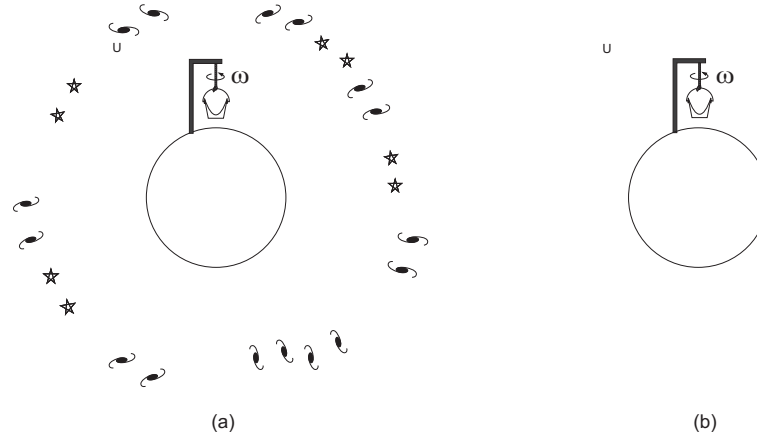



Figura 15.14: Balde e água girando juntos com velocidade angular ω_b em relação ao solo. (a) A concavidade da água não muda em relação ao caso da figura 15.13 (b) mesmo quando é dobrado o número de galáxias. (b) A concavidade da água não muda mesmo quando são aniquiladas todas as galáxias ao redor do planeta.

Mas a situação fica realmente ruim ao ser analisada no sistema de referência R que gira junto com o balde e a água na segunda situação. Temos então a água e o balde em repouso em relação a este novo referencial, apesar da concavidade da superfície da água. Na mecânica newtoniana o termo $m_i\vec{a}$ descrevendo o movimento da água e responsável pela sua concavidade no referencial inercial U anterior torna-se nulo neste referencial R, já que a água está agora em repouso. Isto é, como $\vec{a}_{mR} = \vec{0}$, sendo $\vec{a}_{mR}$ a aceleração da massa m_i em relação ao referencial R, obtemos $m_i\vec{a}_{mR} = \vec{0}$. Mas no referencial R aparece, de acordo com a mecânica newtoniana, uma força centrífuga $m_i\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{mR})$ agindo sobre a água que tem exatamente o mesmo valor que $m_i\vec{a}$ tinha no referencial U anterior. Podemos também dizer que o termo $m_i\vec{a}$ foi transformado na força centrífuga. E esta força centrífuga tem então exatamente o valor correto para deformar a superfície da água o mesmo tanto que no referencial U anterior. Isto significa que a explicação quantitativa da experiência do balde é possível na mecânica newtoniana não apenas no referencial inercial U (utilizando $m_i\vec{a}$), mas também no referencial não inercial R (utilizando a força centrífuga).

Já na teoria da relatividade geral de Einstein acontece algo muito estranho. Embora as estrelas fixas e galáxias distantes não exerçam qualquer força resultante sobre a água no referencial U no qual as galáxias são vistas em repouso, o mesmo não acontece no referencial R do balde no qual as estrelas e galáxias são vistas girando com uma velocidade angular $\vec{\Omega}_{GR}$ dada por: $\vec{\Omega}_{GR} = -\vec{\omega}_b$, onde $\vec{\omega}_b$ é a velocidade angular do balde e da água em relação ao referencial U. Agora, devido à expressão de Thirring, equação (15.5), vai aparecer uma força gravitacional real exercida pela matéria girante distante atuando sobre a água, força esta que não existia no referencial U. O problema é que esta nova força não é exatamente igual à força centrífuga fictícia newtoniana. Aparecem novos termos como o axial $m(\vec{\Omega}_{GR} \cdot \vec{r}_{mR})\vec{\Omega}_{GR}$ que não têm análogos na teoria newtoniana, ver a equação (15.5).

Esta força espúria axial dada por $-2\Phi_{RG}m(\vec{\Omega}_{GR} \cdot \vec{r}_{mR})\vec{\Omega}_{GR}/5$, equação (15.17), vai fazer com que a superfície da água deixe de ser parabólica, figura 15.15.

Vimos anteriormente que, de acordo com a relatividade geral, se estivermos em um referencial inercial U, a concavidade da água será independente da quantidade de massa gravitacional distante ao redor do balde. Mas agora estamos vendo que se estivermos no referencial R que gira junto com o balde e com a água, aparecerá algo novo. Neste referencial R, de acordo com a relatividade geral, a matéria distante vai exercer uma força gravitacional real sobre a água, com esta força sendo dada pela expressão de Thirring. Ou seja, neste referencial as estrelas e galáxias passam a influenciar o movimento da água e a forma de sua superfície. Se dobrarmos a quantidade ou a massa das galáxias, a concavidade da água vai ser alterada concomitantemente.

Isto é uma consequência indesejável, já que a situação física é sempre a mesma, apenas vista em referenciais diferentes. Logo, não faz sentido afirmar que em um referencial as galáxias não exerçam qualquer influência sobre a água, enquanto que em outro referencial elas passem a ter influência real e em princípio com possíveis consequências físicas. Ou seja, no referencial U, dobrando ou sumindo com as galáxias, não se altera a concavidade da água. Já no referencial R, ao analisarmos a mesma experiência de um referencial

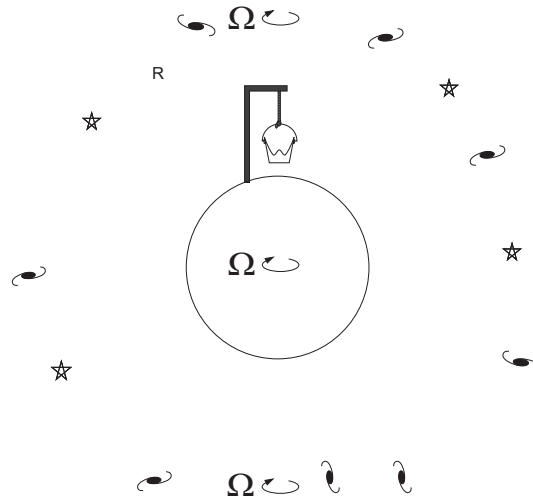



Figura 15.15: Referencial R no qual o balde e a água estão parados. Neste referencial o planeta gira, juntamente com o conjunto de galáxias, ao redor do eixo do balde. A superfície da água deixa de ser parabólica.

diferente, isto passa a acontecer, de tal forma que se dobrarmos a quantidade de galáxias, a água pode entornar do balde.

Na mecânica newtoniana a situação era muito melhor e mais coerente. Isto é, não importando se o conjunto de galáxias distantes (ou um conjunto de cascas esféricas com matéria) está em repouso ou girando, este conjunto de galáxias ou de cascas esféricas nunca vai exercer qualquer força resultante sobre a água, de acordo com as equações (1.15) e (1.21). Podíamos explicar a concavidade da água no referencial inercial U utilizando $m_i\vec{a}$ e também no referencial não inercial R utilizando a força centrífuga $m_i\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{mR})$. Isto é, a força inercial $-m_i\vec{a}$ do referencial U era transformada em $m_i\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{mR})$ do referencial R, mas nos dois casos as contas levavam à mesma concavidade da água. Tanto a força inercial $-m_i\vec{a}$, quanto a força centrífuga, não tinham qualquer relação com a matéria distante na mecânica clássica.

Já na relatividade geral passamos a ter uma força gravitacional que depende do sistema de referência. Isto é, a força gravitacional entre corpos materiais (como entre a água e as galáxias distantes neste exemplo) passa a depender do estado de movimento do observador. Quando as galáxias distantes estão em repouso no referencial U e a água está girando em relação às galáxias, estas galáxias não influenciam a concavidade da superfície da água. Quando elas desaparecem ou dobram em quantidade, a superfície da água continua a mesma. Mas quando vemos a mesma situação física no referencial R no qual há uma rotação das galáxias distante em relação ao referencial U, de tal forma que o balde e a água sejam vistos em repouso em relação ao referencial R, então de acordo com a expressão de Thirring vai haver uma influência gravitacional real exercida pelas galáxias distantes sobre a água. Isto significa que neste referencial R o grau ou quantidade de concavidade (isto é, se a água vai ou não entornar do balde) passa a ser uma função do número e da massa das galáxias distantes. Além disso, a superfície da água deixa de ter um formato parabólico, como representado qualitativamente na figura 15.15. É certamente indesejável esta teoria física na qual a força exercida por um corpo B sobre um corpo A depende do estado de movimento do observador.

A mesma coisa vai acontecer na experiência dos dois globos de Newton de acordo com a teoria da relatividade geral de Einstein. Isto é, no referencial das galáxias distantes a tensão na corda é independente do número e massa das galáxias, enquanto que no referencial que gira com os globos a tensão na corda passa a ser uma função da quantidade de galáxias distantes, devido à força de Thirring.

Esta discussão simples mostra que a teoria da relatividade geral não se reduz à teoria newtoniana no limite de baixas velocidades. Isto é, no referencial que gira com o balde, há uma força sobre a água devida ao universo que gira, de acordo com a relatividade geral. Já de acordo com a teoria newtoniana, não há força resultante sobre a água devida ao universo girando. Poderia se pensar que este efeito é desprezível, mas este não é o caso. Quando integramos a expressão de Thirring sobre todo o universo obtemos a equação (15.12). Os termos desta expressão possuem a mesma ordem de grandeza que a força de Coriolis ou que a força centrífuga da mecânica clássica, equação (10.39). Mas a forma e os valores numéricos da expressão de Thirring são diferentes da forma e dos valores numéricos tanto da força "fictícia" de Coriolis, quanto da força "fictícia" centrífuga, como visto na equação (15.17) ao compará-la com a equação de movimento análoga da

mecânica clássica, equação (15.18).

Mesmo se não pensarmos no universo como um todo, pode-se ver que a teoria da relatividade geral não se reduz à teoria newtoniana no limite de baixas velocidades. Suponhamos uma casca esférica de raio 1 metro girando com uma velocidade angular de 1 radiano por segundo em relação à Terra. Obviamente todas as velocidades tangenciais são baixas aqui comparadas com a velocidade da luz. Um ponto material dentro desta casca girando não vai sofrer nenhuma força de acordo com Newton. Já a expressão de Thirring prevê uma força que é função da massa da casca. Mesmo mantendo inalterado o raio da casca e mantendo inalterada sua velocidade angular, pode-se aumentar este efeito aumentando a massa da casca. E nada disto ocorre na mecânica newtoniana. Isto mostra que as duas teorias são incompatíveis mesmo no limite de baixas velocidades.

Esta análise mostra claramente que na relatividade geral situações cinematicamente equivalentes não são dinamicamente equivalentes. Já Mach acreditava que seria possível formular a mecânica de tal forma que ocorresse esta equivalência. Mais uma vez observa-se que as teorias de Einstein não implementam as ideias de Mach. A discussão desta Subseção mostra que a relatividade geral não consegue lidar com a experiência do balde de Newton em todos os sistemas de referência. A mecânica newtoniana, por outro lado, pode explicar esta experiência em todos os referenciais. Para obter esta explicação utiliza-se o termo $m_i\vec{a}$ nos referenciais inerciais (em outras palavras, utiliza-se a força inercial $-m_i\vec{a}$ atuando sobre as moléculas da água). Já nos referenciais não inerciais utiliza-se a força centrífuga $-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ para explicar a concavidade da água na experiência do balde na mecânica clássica. E todas estas forças, tanto a força inercial $-m_i\vec{a}$ quanto a força centrífuga, não estão relacionadas com a matéria distante, o que mostra a coerência da teoria clássica. Já a teoria de Einstein não apresenta a mesma coerência. Além disso, suas previsões sobre o formato da Terra e sobre o formato da superfície da água na experiência do balde, ilustradas pelas figuras 15.7 (a) e 15.15, estão em desacordo com os dados observacionais.

15.6 Comentários Gerais

Concluindo, podemos dizer que há muitos problemas com as teorias especial e geral da relatividade de Einstein. Enfatizamos alguns aqui.

1) Elas são baseadas na formulação de Lorentz da eletrodinâmica de Maxwell, formulação esta que apresenta diversas assimetrias como as apontadas por Einstein e muitos outros. Estas assimetrias de explicação não aparecem nos fenômenos observados de indução e de outros tipos. Há uma outra teoria do eletromagnetismo que evita todas estas assimetrias de forma natural, ou seja, onde elas não aparecem: a eletrodinâmica de Weber.[49] A teoria weberiana é um ponto de partida para se explicar a inércia muito melhor do que a força de Maxwell-Lorentz, equação (14.12).

2) A teoria da relatividade especial de Einstein mantém, assim como na mecânica clássica, o conceito de espaço absoluto e o conceito de referenciais inerciais desvinculados da matéria distante. E ainda por cima introduz uma outra grandeza absoluta na física, a velocidade da luz no vácuo. Nada na física leva à conclusão de que a velocidade da luz deva ser constante qualquer que seja o movimento do observador ou do detector. Todas as velocidades conhecidas por nós são constantes ou em relação à fonte (como no caso de projéteis) ou constantes em relação ao meio (como no caso da velocidade do som, que não depende da velocidade da fonte). Mas todas elas mudam dependendo do movimento do observador ou do detector. Afirmar o oposto, como fez Einstein, só pode gerar a necessidade de introduzir conceitos estranhos e desnecessários como os conceitos de dilatação do tempo, contração de comprimento, tempo próprio etc. Esta teoria manteve o conceito de espaço absoluto (ou de referencial inercial desvinculado de qualquer matéria) e ainda introduziu o caráter absoluto da velocidade da luz no vácuo. Para evitar confusão com as teorias de Einstein, estamos utilizando o nome de "Mecânica Relacional" ao trabalho desenvolvido aqui. Nosso trabalho é realmente baseado apenas em conceitos relativos, sem usar o espaço absoluto ou a velocidade absoluta da luz no vácuo.

3) Einstein passou a gerar confusões em toda a física quando começou a interpretar a velocidade que aparece na força de Maxwell-Lorentz, equação (14.12), como sendo a velocidade da carga teste em relação ao observador. Outros autores haviam dado outras interpretações para esta velocidade. Para Maxwell era a velocidade da carga em relação ao campo magnético. Para Thomson e Heaviside era a velocidade da carga em relação ao meio dielétrico no qual a carga se deslocava, enquanto que para Lorentz era a velocidade da carga em relação ao éter. Nenhum fenômeno físico sugere que se devam introduzir forças que dependam do estado de movimento do corpo em relação ao observador.

[49] [Ass92b], [Ass94] e [Ass95b].

4) Einstein apontou corretamente que a melhor maneira de implementar o princípio de Mach era utilizar apenas a distância entre os corpos interagentes e derivadas temporais desta distância. Infelizmente ele próprio não seguiu este caminho pois pensou que ele era impraticável. Ele estava errado nesta conclusão, como mostramos neste livro. Sua conclusão só pode ser devida ao fato de ele não conhecer a eletrodinâmica de Weber, assim como não conhecia as aplicações de uma força análoga para a gravitação.

5) Ele corretamente apontou quatro consequências que têm de surgir em qualquer modelo que incorpore o princípio de Mach, como visto na Seção 15.3. Porém, sua teoria da relatividade geral não implementou completamente estas quatro consequências, como ele próprio mostrou e como indicamos neste trabalho. Como vamos ver neste livro, todas estas quatro consequências seguem diretamente e quantitativamente da mecânica relacional baseada nos trabalhos de Mach e de Weber.

6) As expressões do tipo da força centrífuga e do tipo da força de Coriolis que surgem na relatividade geral com a expressão de Thirring não aparecem como o esperado. Ou seja, os coeficientes numéricos na frente destes termos não são exatamente equivalentes aos coeficientes que sabemos existir em referenciais não inerciais na mecânica clássica, como se percebe ao comparar as equações (15.17) e (15.18). Além do mais, na relatividade geral aparece a força espúria axial dada por $-2\Phi_{RG}m(\vec{\Omega}_{GR} \cdot \vec{r}_{mR})\vec{\Omega}_{GR}/5$, equação (15.12). Não se conseguiu eliminar este termo da teoria de Einstein. Por outro lado, sabe-se que este termo axial não existe. Nunca se encontrou nenhum efeito ou força em referenciais não inerciais que apontasse na direção de $\vec{\Omega}$. Isto é, nunca se observou qualquer efeito devido a este termo, embora a ordem de grandeza deste termo espúrio seja a mesma dos outros termos como a força centrífuga que achata a Terra ou que empurra a água para a parede do balde, ou a força de Coriolis que altera o plano de oscilação do pêndulo de Foucault, quando analisamos estes fenômenos em referenciais que giram em relação às estrelas.

7) Como visto nas Subseções 15.5.2 e 15.5.4, a relatividade geral não pode explicar o achatamento da Terra e a experiência do balde de Newton em todos os referenciais, ao contrário do que ocorria com a mecânica clássica.

8) As únicas forças dependentes do referencial na mecânica newtoniana eram as forças inerciais (como o termo $-m_i\vec{a}$ da segunda lei de Newton, a força centrífuga, a força de Coriolis, etc.). De acordo com Newton, estas forças não tinham relação com as estrelas fixas ou com os corpos distantes no universo, de tal forma que se podia compreender ou aceitar sem maiores problemas este comportamento anômalo. Todas as outras forças entre os corpos materiais eram relacionais, ou seja, só dependendo de grandezas intrínsecas ao sistema, tais como a distância entre corpos materiais, a velocidade radial entre eles, ou a aceleração radial entre eles. Exemplos: a força gravitacional de Newton, a força elástica de uma mola, a força eletrostática, as forças de contato, as forças de atrito que só dependiam da velocidade relativa entre o corpo de prova e o meio material ao seu redor, etc. Einstein mudou tudo isto introduzindo forças eletromagnéticas dependentes do sistema de referência ou dependentes do observador com sua nova interpretação da velocidade na força de Maxwell-Lorentz, equação (14.12). Ele também introduziu forças gravitacionais dependentes do sistema de referência ou dependentes do observador com sua teoria da relatividade geral, como vimos na Subseção 15.5.4 ao discutir a experiência do balde com esta teoria.

Concordamos completamente com O'Rahilly sobre os diversos problemas e confusões que as teorias da relatividade de Einstein trouxeram para a física.[50]

Parece-nos que todos estes conceitos teóricos de contração de comprimento, dilatação do tempo, invariância de Lorentz, leis covariantes e invariantes, métrica de Minkowski, espaço-tempo quadri-dimensional, tensor de energia-momento, geometria riemanniana aplicada na física, elemento de Schwarzschild, álgebras tensoriais em espaços quadri-dimensionais, quadri-vetores, tensor métrico $g_{\mu\nu}$, símbolos de Christoffel, super cordas, curvatura do espaço, matéria escura, energia escura, ..., desempenham o mesmo papel que os epiciclos na teoria ptolomaica. A mecânica relacional apresentada neste livro é contrária às teorias de Einstein e elimina todos estes epiciclos.

15.7 Mach Rejeitou as Teorias da Relatividade de Einstein

Embora Einstein tenha sido fortemente influenciado pelas ideias de Mach como ele mesmo afirmou diversas vezes,[51] o próprio Mach rejeitou as teorias da relatividade de Einstein. No prefácio de seu último livro intitulado *Os Princípios da Física Óptica - Um Tratamento Histórico e Filosófico*, Mach escreveu (nossa ênfase):[52]

---

[50] [O'R65, Volume 2, Capítulo XIII, Seção 5, págs. 662-71].

[51] [Ein82, pág. 29].

[52] [Mac26, págs. vii-viii].

> Por causa de minha velhice e doença decidi, cedendo à pressão do meu editor, mas contrariamente à minha prática usual, entregar esta parte do livro para ser publicada, enquanto que a radiação, o declínio da teoria de emissão da luz, a teoria de Maxwell, juntamente com a relatividade, serão tratados brevemente em uma parte subsequente. As questões e dúvidas surgindo do estudo destes capítulos formaram o assunto de pesquisas tediosas realizadas conjuntamente com meu filho, que tem sido meu colega por muitos anos. Teria sido desejável que a segunda parte feita em colaboração fosse publicada quase que imediatamente, mas *sou compelido, naquela que pode ser minha última oportunidade, a cancelar minha contemplação da teoria da relatividade.*
>
> *Concluo a partir das publicações que têm chegado a mim e especialmente da minha correspondência, que estou sendo gradualmente considerado como o precursor da relatividade. Mesmo agora sou capaz de visualizar aproximadamente quais as novas exposições e interpretações que muitas das ideias expressas em meu livro sobre a Mecânica vão receber no futuro do ponto de vista da relatividade.*
>
> Era para ser esperado que os filósofos e físicos devessem conduzir uma cruzada contra mim pois, como já observei repetidamente, fui meramente um caminhante sem preconceitos, dotado de ideias originais em vários campos do conhecimento. *Tenho, contudo, certamente de negar ser um precursor dos relativistas assim como recuso a crença atomística dos dias de hoje.*
>
> *O motivo pelo qual e a extensão a que desacredito da teoria da relatividade dos dias de hoje, a qual encontro estar ficando cada vez mais dogmática, juntamente com os motivos particulares que me levaram a tal ponto de vista — considerações baseadas na fisiologia dos sentidos, nas ideias teóricas e acima de tudo nas concepções resultantes de minhas experiências — têm de ser tratados na sequência.*
>
> A quantidade sempre crescente de pensamento devotado ao estudo da relatividade não será, na verdade, perdida; ela já foi frutífera e de valor permanente para a matemática. Será ela, contudo, capaz de manter sua posição no conceito físico do universo de algum período futuro como uma teoria que tem de encontrar um lugar em um universo aumentado por uma multidão de novas ideias? *Provará ela ser mais do que uma inspiração transitória na história da ciência?*

Provas adicionais de que Mach se opôs às teorias da relatividade de Einstein podem ser encontradas na biografia de Mach escrita por Blackmore,[53] e em seu importante artigo intitulado "Ernst Mach leaves 'The Church of Physics'."[54] Também nos opomos às teorias da relatividade de Einstein (tanto a geral quanto a especial) pelos motivos expostos nos Capítulos 14 e 15. No lugar das teorias de Einstein propomos a Mecânica Relacional como desenvolvida nas próximas páginas.

[53] [Bla72].
[54] [Bla89].

Parte V

Mundo Novo

Capítulo 16

Mecânica Relacional

16.1 Conceitos Primitivos e Postulados

Apresentamos agora a nova mecânica que estamos propondo para substituir tanto a formulação newtoniana quanto a formulação einsteiniana. A denominamos de "Mecânica Relacional." Inicialmente mostramos a formulação completa da teoria e discutimos suas aplicações. No Capítulo 24 apresentamos a história da mecânica relacional enfatizando os principais desenvolvimentos e colocando todos os aspectos na perspectiva histórica.

A mecânica é o ramo da ciência que estuda o equilíbrio e o movimento dos corpos. Por mecânica relacional entendemos uma formulação da mecânica baseada apenas em grandezas *relacionais*. Esta expressão "relacional" se refere às seguintes grandezas intrínsecas ao sistema de corpos que estão interagindo entre si: as distâncias r entre os corpos, as velocidades radiais entre eles, dr/dt, assim como as acelerações radiais entre eles, d^2r/dt^2. Na mecânica relacional não utilizamos os conceitos newtonianos de espaço absoluto, tempo absoluto e movimento absoluto. Também se evita na mecânica relacional grandezas que dependam do observador, como a velocidade $\vec{v}$ na força de Maxwell-Lorentz, equação (14.12), da forma interpretada por Einstein para o significado desta velocidade $\vec{v}$. Não denominamos esta nova mecânica de "mecânica relativa," nem de "mecânica relativística," para evitar confusões com as teorias especial e geral da relatividade de Einstein.

Começamos apresentando alguns conceitos primitivos, isto é, conceitos básicos necessários para se definir e compreender outros conceitos mais complexos. Não definimos estes conceitos primitivos para evitar círculos viciosos. Os conceitos primitivos que vamos precisar são:

1. Massa gravitacional,

2. carga elétrica,

3. distância entre corpos materiais,

4. tempo entre eventos físicos, e

5. força ou interação entre corpos materiais.

Pode ser que a força gravitacional tenha origem a partir de uma força eletromagnética, sendo uma força residual entre dipolos oscilando.[1] Se este for o caso, então o conceito de massa gravitacional também passará a ser redundante. Como esta dedução da força gravitacional a partir da força eletromagnética ainda não está confirmada experimentalmente, vamos continuar a tratar a massa gravitacional como um conceito primitivo.

Em nenhum lugar da mecânica relacional introduzimos os seguintes conceitos da mecânica clássica: inércia, massa inercial, sistemas inerciais de referência, espaço absoluto, tempo absoluto e movimento absoluto. Estes conceitos só vão aparecer ao compararmos a mecânica relacional com a mecânica newtoniana.

Agora apresentamos os três postulados ou axiomas da mecânica relacional:

- *(I) Força é uma grandeza vetorial que descreve a interação entre corpos materiais.*

[1] [Ass92c] e [Ass95d].

- *(II) A força que uma partícula pontual A exerce sobre uma partícula pontual B é igual e oposta à força que B exerce sobre A e está direcionada ao longo da linha reta conectando A até B.*

- *(III) A soma de todas as forças de qualquer natureza (gravitacional, elétrica, magnética, elástica, nuclear, ...) agindo sobre qualquer corpo é sempre nula em todos os sistemas de referência.*

O primeiro postulado qualifica a natureza de uma força (dizendo que ela é uma grandeza vetorial, com módulo, direção e sentido). Mais importante do que isto é que este postulado especifica a propriedade de se poder adicionar forças como vetores. Ou seja, a lei do paralelogramo de forças está sendo postulada por este primeiro axioma. Observe apenas que ainda não estamos falando de acelerações, mas apenas de forças. Este postulado também deixa claro que força é uma interação entre corpos materiais. Na mecânica relacional a força não descreve, por exemplo, a interação de um corpo com o "espaço," de um corpo com o observador, de um corpo com o sistema de referência, nem a interação de um corpo com o "campo," seja este campo gravitacional, elétrico ou magnético.

O segundo postulado é similar à lei da ação e reação de Newton. Vamos representar a força que A exerce sobre B por $\vec{F}_{AB}$, enquanto que a força exercida por B sobre A será representada por $\vec{F}_{BA}$. Seja ainda $\hat{r}_{AB}$ o vetor unitário apontando de B para A. O segundo postulado da mecânica relacional pode então ser escrito na forma de duas equações, a saber:

$$\vec{F}_{AB} = -\,\vec{F}_{BA} \ , \tag{16.1}$$

e

$$\vec{F}_{AB} \text{ aponta ao longo de } \hat{r}_{AB} \ . \tag{16.2}$$

Além do mais, estamos especificando que todas as forças entre duas partículas pontuais, não interessando sua origem (elétrica, elástica, gravitacional, ...), estão direcionadas ao longo da linha reta conectando estas duas partículas.

É importante enfatizar aqui partículas "pontuais." O motivo é simples e podemos ilustrar o assunto com um contra-exemplo. Seja um dipolo elétrico constituído de duas cargas pontuais $q_1 > 0$ e $-q_1$ separadas por uma distância d_1. Escolhemos um sistema de referência O com origem no centro deste dipolo, com eixo z ao longo da reta que une q_1 e $-q_1$, apontando de $-q_1$ para q_1. O momento de dipolo elétrico $\vec{p}_1$ é então dado por $\vec{p}_1 = q_1 d_1 \hat{z}$. Seja uma outra carga pontual $q_2 > 0$ colocada sobre o eixo x a uma distância r_2 da origem. Consideramos todas as cargas em repouso entre si, sendo este caso um problema simples de eletrostática. A força exercida por q_1 sobre q_2 está ao longo da reta que as une. A força exercida por $-q_1$ sobre q_2 está ao longo da reta que une estas duas últimas cargas. Já a força exercida pelo dipolo $\vec{p}_1$ sobre q_2 (ou seja, a soma destas duas forças anteriores) está ao longo do eixo z, ver a figura 16.1.

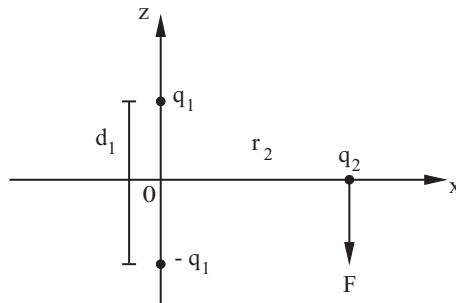



Figura 16.1: Carga interagindo com um dipolo elétrico. A força $\vec{F}$ é a força resultante atuando sobre q_2.

Ou seja, mesmo se $d_1 \ll r_2$, a força entre o dipolo e q_2 não estará ao longo do eixo x, que poderia ser considerada a reta unindo o dipolo "pontual" (isto é, seu centro) com a carga q_2 muito afastada. O motivo para isto é que mesmo neste caso em que $d_1 \ll r_2$, o dipolo não é de fato pontual, havendo uma pequena distância entre suas cargas constituintes.

Tirando casos como estes, muitas vezes podemos aproximar dois corpos extensos A e B por partículas pontuais quando seus tamanhos (diâmetros máximos) são muito menores do que a distância entre eles (entre seus centros).

O terceiro postulado apresenta a principal mudança em relação à mecânica newtoniana. Podemos chamá-lo de *princípio de equilíbrio dinâmico*. Dizemos aqui que a soma de todas as forças atuando em um corpo é sempre nula, mesmo quando este corpo está em movimento acelerado em relação a outros corpos, em relação a nós mesmos, ou em relação a qualquer outro referencial. Mais tarde vamos *deduzir* a partir da mecânica relacional uma equação de movimento que é similar à segunda lei do movimento de Newton, equação (1.5).

A vantagem deste terceiro postulado comparado com a segunda lei do movimento de Newton dada pela equações (1.3), (1.4) ou (1.5), é que não introduzimos neste postulado os conceitos de inércia, de massa inercial, de espaço absoluto, nem o conceito de sistema de referência inercial. Na mecânica newtoniana tínhamos que a soma de todas as forças atuando sobre um corpo era igual à variação do momento linear deste corpo (produto de sua massa inercial pela sua velocidade) com o tempo, equação (1.3). No caso de massa constante, esta força resultante era então igual ao produto da massa inercial do corpo por sua aceleração em relação ao espaço absoluto, ou em relação a um sistema de referência inercial, equações (1.4) e (1.5). Isto significa que estes conceitos tinham de ter sido introduzidos e clarificados antes da introdução desta lei e que formavam uma parte essencial da segunda lei do movimento de Newton. O terceiro postulado da mecânica relacional evita tudo isto e esta é sua maior vantagem em relação à mecânica clássica. Além do mais, este terceiro postulado é válido em todos os sistemas de referência. Por outro lado, a segunda lei de Newton só era válida em sistemas inerciais, caso contrário seria necessário introduzir as forças fictícias, como visto no Capítulo 10.

Suponha uma pessoa sobre a superfície da Terra jogando uma pedra para cima na presença de um forte vento que afeta o movimento da pedra em direção e magnitude. Durante todo o tempo a pessoa vai aplicar o postulado de que a força resultante agindo sobre a pedra é nula, mesmo quando a pedra está subindo, descendo, batendo no solo e permanecendo lá em repouso. No referencial da pedra (isto é, em um referencial sempre em repouso em relação à pedra) também deve-se aplicar o postulado de que a força resultante agindo sobre ela é nula durante todo este tempo. E em qualquer outro sistema de referência arbitrário que se move em relação à Terra e à pedra, também se deve utilizar este postulado de que a força resultante agindo sobre a pedra é sempre nula.

A palavra "sempre" no terceiro postulado da mecânica relacional foi utilizada para indicar que, em qualquer instante, é nula a somatória de forças atuando em qualquer corpo. Ou seja, a somatória de forças será nula para qualquer tempo, em todos os instantes, não interessando as modificações que ocorram nas distâncias entre os corpos ou em suas velocidades relativas.

Seja $\vec{F}_{qk}$ a força exercida pelo corpo q sobre o corpo k. O terceiro postulado da mecânica relacional aplicado ao corpo k pode ser expresso matematicamente da seguinte maneira:

$$\sum_{\substack{\text{todo } q \\ q \neq k}} \vec{F}_{qk} = \vec{0} \ . \tag{16.3}$$

Este postulado vai ser aplicado nesta forma em todos os sistemas de referência. Por exemplo, no caso da pedra que está sendo discutido aqui, será possível aplicar a equação (16.3) no referencial terrestre, no referencial da pedra, em algum referencial que esteja acelerado em relação ao solo, no referencial das estrelas fixas, no referencial das galáxias distantes, ou em qualquer outro referencial. Veremos que em todos estes referenciais chegaremos no mesmo movimento relativo entre a pedra e o solo.

Ao aplicar o terceiro postulado da mecânica relacional chegamos a outro resultado que concorda com as ideias de Mach. Isto é, podemos multiplicar todas as forças por uma mesma constante (constante esta que pode ser adimensional ou ter uma dimensão qualquer), sem afetar os resultados. Na mecânica relacional a única coisa que interessa é a razão entre cada par de forças. Nunca podemos saber o valor absoluto de qualquer força, mas apenas quantas vezes uma força é maior ou menor do que outra força. As dimensões das forças também ficam indefinidas, desde que todas as forças tenham a mesma dimensão. Este é um exemplo do chamado princípio das proporções físicas.[2]

Se trabalharmos com energias ao invés de forças, estes três postulados podem ser substituídos por um único axioma, a saber:

> *A soma de todas as energias de interação (gravitacional, elétrica, elástica, ...) entre todos os pares de partículas do universo é sempre nula em todos os sistemas de referência.*

Vamos representar por U_{pq} à energia de interação entre o corpo p e o corpo q. Quando temos N corpos

[2] [Ass01], [Ass03a] e [Ass04].

interagindo entre si, então este postulado pode ser expresso matematicamente da seguinte forma:

$$\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N}\sum_{\substack{q=1\\ q\neq p}}^{N} U_{pq} = 0 \ . \tag{16.4}$$

Mais uma vez, apenas a razão entre energias vai ter relevância. Este postulado pode ser chamado de *princípio de conservação da energia* ou de *postulado de conservação da energia*.

Na Seção 3.4, equação (3.31), vimos que o postulado de conservação da energia da mecânica clássica afirmava que a energia total (soma das energias potenciais de interação, juntamente com a soma das energias cinéticas de todas as partículas) era uma constante no tempo no caso de forças conservativas. A vantagem deste postulado fundamental da mecânica relacional em relação ao postulado análogo da mecânica clássica é que não introduzimos aqui o conceito de energia cinética $m_i v^2/2$. Esta grandeza tem embutido nela o conceito de massa inercial. A energia cinética também tem embutido nela o conceito de espaço absoluto ou o conceito dos sistemas inerciais (os sistemas em relação aos quais se deve medir a velocidade v). Mais tarde vamos *deduzir* na mecânica relacional uma energia similar a esta energia cinética da mecânica clássica, mas com uma nova interpretação do significado da massa que aparece nesta energia e também com uma nova interpretação do significado da velocidade que aparece nesta energia. Também deduziremos um postulado de conservação da energia análogo à equação (3.31) da mecânica clássica.

A palavra "sempre" que aparece no postulado de conservação de energia na mecânica relacional foi utilizada para indicar que, em qualquer instante, é nula a somatória das energias de interação de um sistema de partículas. Ou seja, a somatória das energias de interação será nula para qualquer tempo, em todos os instantes, não interessando as modificações que ocorram nas distâncias entre os corpos ou em suas velocidades relativas.

Entre 1989 e 1999 havíamos utilizado uma formulação um pouco diferente deste postulado, a saber:[3] A soma de todas as energias de interação (gravitacional, elétrica, elástica, ...) entre qualquer corpo e todos os outros corpos do universo é sempre nula em todos os sistemas de referência. Contudo, esta formulação antiga não nos parece adequada para todos os casos. A formulação que estamos apresentando agora é mais apropriada e geral, podendo ser aplicada em todas as situações.

No estudo das rotações dos corpos em relação ao referencial universal U das galáxias distantes é também útil utilizar o seguinte axioma:

- *A soma de todos os torques de qualquer natureza (torque gravitacional, elétrico, magnético, elástico, nuclear, ...) agindo sobre qualquer corpo é sempre nula em todos os sistemas de referência.*

16.2 Equação de Movimento na Mecânica Relacional

Nesta Seção vamos ver como obter a equação descrevendo o movimento de uma partícula na mecânica relacional. Isto vai levar a uma implementação quantitativa do princípio de Mach baseada nos postulados da mecânica relacional e na força de Weber.

Para obter a equação de movimento para o corpo de prova, precisamos incluir sua interação com todos os outros corpos do universo. Dividimos todos os corpos do universo em dois grupos, a saber, (A) e (B). Na sequência descrevemos cada um destes grupos.

(A) O primeiro grupo é composto pelo corpo de prova e pelos corpos locais com os quais o corpo de prova está interagindo, juntamente com as distribuições anisotrópicas de corpos ao redor do corpo de prova. Entre estes corpos locais podem encontrar-se a Terra, ímãs, cargas elétricas, molas, fluidos ou superfícies que exercem forças de atrito, correntes elétricas etc. Entre as distribuições anisotrópicas de corpos ao redor do corpo de prova podem encontrar-se a Lua, o Sol, a matéria ao redor do centro da Via Láctea etc. Vamos supor que este grupo (A) é composto por N corpos, a saber: o corpo de prova, os outros corpos locais e as distribuições anisotrópicas de matéria ao redor do corpo de prova.

(B) O segundo grupo é composto pelas distribuições isotrópicas de matéria ao redor do corpo de prova. Por distribuições isotrópicas queremos dizer corpos espalhados com simetria esférica ao redor do corpo de prova, tal que este corpo esteja dentro destas distribuições com simetria esférica, embora não precise estar necessariamente no centro destas distribuições esfericamente simétricas.

A energia dos N corpos do grupo (A) interagindo entre si será representada por U_{aa}, sendo dada por:

[3] [Ass89a], [Ass92f], [Ass98, pág. 203] e [Ass99a, pág. 166].

$$U_{aa} \equiv \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{N} \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^{N} U_{pq} \ , \tag{16.5}$$

onde U_{pq} é a energia de interação do corpo p com o corpo q. Neste caso tanto p quanto q pertencem ao grupo (A). O fator 1/2 que aparece nesta expressão é para garantir que a energia de interação entre cada par de partículas seja contada apenas uma vez. Isto é, como $U_{pq} = U_{qp}$, temos $(U_{pq} + U_{qp})/2 = U_{pq}$. Por exemplo, se tivermos três cargas interagindo entre si, sendo o corpo de prova uma destas cargas, a energia U_{aa} será dada por $U_{12} + U_{13} + U_{23}$. O subíndice aa em U_{aa} vem das iniciais da expressão "anisotrópica-anisotrópica." Ou seja, esta é a energia de interação entre os corpos que estão distribuídos anisotropicamente no espaço.

A energia de interação entre os corpos do grupo (B) que compõem as distribuições isotrópicas de matéria ao redor do corpo de prova será representada por U_{ii}, onde o subíndice ii vem das iniciais da expressão "isotrópica-isotrópica." Ou seja, ela contém a soma da energia U_{pq} de uma partícula p qualquer destas distribuições isotrópicas de matéria interagindo com uma outra partícula p qualquer destas distribuições isotrópicas de matéria, sendo que tanto p quanto q pertencem ao grupo (B). Esta energia pode ser escrita como:

$$U_{ii} = \frac{1}{2} \sum_{\text{todo } p} \sum_{\substack{\text{todo } q \\ q \neq p}} U_{pq} \ , \tag{16.6}$$

onde p e q pertencem ao grupo (B).

Temos ainda a energia dos N corpos locais do grupo (A) interagindo com as distribuições isotrópicas de matéria ao redor destes corpos locais. Esta energia será representada por U_{ai}. O subíndice ai vem das iniciais da expressão "anisotrópica-isotrópica." A energia de cada partícula p do grupo (A) interagindo com todas as partículas q do grupo (B), denominada de U_i^p, pode ser escrita como:

$$U_i^p = \sum_{\text{todo } q} U_{pq} \ . \tag{16.7}$$

Esta energia será denominada de *energia inercial*, sendo também representada simplesmente por U_i, na qual o subíndice i vem da inicial da palavra "inercial." O significado desta expressão na mecânica relacional será discutido na Seção 18.8.

Utilizando a equação (16.7) obtém-se que a energia U_{ai} total dos N corpos do grupo (A) interagindo com todas as distribuições isotrópicas de matéria ao redor deles pode ser escrita da seguinte forma:

$$U_{ai} = \sum_{p=1}^{N} U_i^p \ . \tag{16.8}$$

Como visto na Seção 16.1, o postulado fundamental da mecânica relacional em termos das energias de interação afirma que "a soma de todas as energias de interação entre todos os pares de partículas do universo é sempre nula em todos os sistemas de referência." Com esta divisão dos corpos entre uma parte (A) composta de N corpos locais e distribuições anisotrópicas de matéria, e uma outra parte (B) composta de distribuições isotrópicas de matéria ao redor dos corpos locais, a equação (16.4) pode ser escrita como:

$$U_{aa} + U_{ii} + U_{ai} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{N} \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^{N} U_{pq} + U_{ii} + \sum_{p=1}^{N} U_i^p = 0 \ . \tag{16.9}$$

Em termos das forças de interação, foi visto na Seção 16.1 que o postulado fundamental da mecânica relacional afirma que a soma de todas as forças de qualquer natureza agindo sobre qualquer corpo k é sempre nula em todos os sistemas de referência, equação (16.3). Vamos supor que k seja um corpo pertencente ao grupo (A). Com esta divisão dos corpos em dois grupos (A) e (B), a equação (16.3) pode ser escrita como:

$$\sum_{\substack{\text{todo } q \\ q \neq k}} \vec{F}_{qk} \equiv \vec{F}_{ak} + \vec{F}_{ik} \equiv \vec{F}_a + \vec{F}_i = \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^{N} \vec{F}_{pk} + \vec{F}_i = \vec{0} \ . \tag{16.10}$$

Nesta equação $\vec{F}_{ak} \equiv \vec{F}_a$ representa a força resultante atuando sobre um corpo de prova k com massa gravitacional m_{gk} exercida pelas $N - 1$ partículas que compõem o grupo (A), sendo $\vec{F}_{pk}$ a força exercida

pelo corpo p pertencente ao grupo (A) sobre o corpo de prova k também pertencente ao grupo (A). O subíndice a vem da inicial da palavra "anisotrópica." Já $\vec{F}_{ik} \equiv \vec{F}_i$ representa a força resultante atuando sobre o corpo de prova k e sendo exercida por todos os corpos do grupo (B). Ela será denominada de *força inercial*. O subíndice i refere-se tanto à inicial das palavra "isotrópica," quanto à inicial da palavra "inercial." O significado desta expressão tanto na mecânica newtoniana quanto na mecânica relacional será discutido na Seção 18.8.

Estas são as equações de movimento da mecânica relacional. Para poder utilizar estas equações temos de obter, em particular, U_{ai} e $\vec{F}_i$.

Devido à grande distância entre as galáxias, ao fato de elas serem na média eletricamente neutras e de possuírem propriedades magnéticas de intensidade muito baixa, elas só podem interagir de maneira significativa com corpos distantes através de forças gravitacionais. Para obter U_{ai} temos então de considerar a energia de interação gravitacional entre os corpos locais e uma casca esférica. Em seguida, esta expressão é integrada para todo o universo conhecido. Da mesma forma, para obter a força gravitacional exercida por toda a distribuição isotrópica de matéria ao atuar sobre o corpo de prova com massa gravitacional m_{gk}, temos de fazer duas contas. Inicialmente calcularemos a força exercida por uma casca esférica ao atuar sobre o corpo k localizado internamente à casca. Em seguida, será necessário integrar para todo o universo conhecido a força gravitacional exercida por uma casca esférica atuando sobre m_{gk}.

Nas próximas Seções consideramos estas integrações em vários sistemas de referência.

16.3 Forças Eletromagnéticas e Gravitacionais

Os postulados da Seção 16.1 referem-se às forças de interação entre corpos. Até o momento ainda não foi necessário introduzir os conceitos de carga elétrica nem de massa gravitacional. Para implementar os postulados da mecânica relacional e para obter equações de movimento que satisfaçam ao princípio de Mach, ainda são necessárias expressões especificando como ocorrem as interações elétricas e gravitacionais entre os corpos. Estes postulados só vão fazer sentido ao apresentarmos expressões de força e de energia descrevendo os vários tipos de interação. O mesmo ocorria com a segunda lei de Newton. Ela só fazia sentido quando se juntava a ela expressões como a força de Newton da gravitação, a força elétrica entre cargas etc.

É neste ponto que aparece a principal contribuição de Wilhelm Eduard Weber (1804-1891). Em 1846 ele apresentou uma lei de força fundamental descrevendo a interação entre cargas elétricas que dependia não apenas da distância entre as cargas, mas também da velocidade radial entre elas e da aceleração radial entre elas, como visto na Seção 2.8. Propomos como a base da mecânica relacional que a força $\vec{F}_{21}$ exercida pela carga elétrica q_2 sobre a carga elétrica q_1 seja dada pela lei de Weber, equação (2.21). Em notação vetorial temos a seguinte expressão:

$$\vec{F}_{21} = H_e q_1 q_2 \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2}\left(1 - \frac{\dot{r}_{12}^2}{2c^2} + \frac{r_{12}\ddot{r}_{12}}{c^2}\right) = -\vec{F}_{12} \ , \tag{16.11}$$

onde $\vec{F}_{12}$ é a força exercida por q_1 sobre q_2. As grandezas c, $r_{12} = r$, $\hat{r}_{12} = \hat{r}$, $\dot{r}_{12} \equiv dr_{12}/dt = \dot{r}$ e $\ddot{r}_{12} \equiv d\dot{r}_{12}/dt = d^2 r_{12}/dt^2 = \ddot{r}$ foram definidas nas equações (2.22) até (2.29). Com isto a força de Weber dada pela equação (16.11) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\vec{F}_{21} = H_e q_1 q_2 \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2}\left[1 + \frac{1}{c^2}\left(\vec{v}_{12}\cdot\vec{v}_{12} - \frac{3}{2}\left(\hat{r}_{12}\cdot\vec{v}_{12}\right)^2 + \vec{r}_{12}\cdot\vec{a}_{12}\right)\right] = -\vec{F}_{12} \ . \tag{16.12}$$

A grandeza H_e que aparece nas equações (16.11) e (16.12) depende do sistema de unidades. Quando a força de Weber era utilizada na mecânica newtoniana em conjunto com a segunda lei de Newton, no Sistema Internacional de Unidades, tínhamos $1/(4\pi\varepsilon_o)$ em vez de H_e, como visto nas equações (2.21) e (2.30). Por hora não vamos especificar o valor desta grandeza H_e, apenas assumimos que ela seja uma constante.

Propomos ainda que a energia elétrica U_{12} de interação entre estas duas cargas q_1 e q_2 seja dada pela expressão introduzida por Weber em 1848, equação (3.25), a saber:

$$U_{12} = H_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}}\left(1 - \frac{\dot{r}_{12}^2}{2c^2}\right) \ . \tag{16.13}$$

A força $\vec{F}_{21}$ pode ser deduzida da energia U_{12} a partir da equação (3.27), a saber:

$$\vec{F}_{21} = -\frac{dU}{dr_{12}}\hat{r}_{12} \ = -\vec{F}_{12} \ , \tag{16.14}$$

onde $\vec{F}_{12}$ é a força exercida por 1 em 2, sendo $\hat{r}_{12}$ o vetor unitário apontando de 2 para 1.

Em analogia com a eletrodinâmica de Weber, propomos como a base da mecânica relacional que a lei de Newton da gravitação universal seja modificada para ficar nos moldes da lei de Weber. Em particular, a energia de interação entre duas massas gravitacionais m_{g1} e m_{g2}, assim como a força $\vec{F}_{21}$ exercida por 2 em 1, devem ser dadas por, respectivamente:

$$U_{12} = -H_g \frac{m_{g1} m_{g2}}{r_{12}} \left(1 - \xi \frac{\dot{r}_{12}^2}{2c^2}\right) \ , \tag{16.15}$$

e

$$\vec{F}_{21} = -H_g m_{g1} m_{g2} \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \left[1 - \frac{\xi}{c^2}\left(\frac{\dot{r}_{12}^2}{2} - r_{12}\ddot{r}_{12}\right)\right] = -\vec{F}_{12} \ . \tag{16.16}$$

Temos novamente que $\vec{F}_{12}$ é a força exercida por 1 em 2.

Nestas equações se assume que H_g e ξ são constantes fundamentais, sendo ξ uma constante adimensional. Com $\xi = 0$ ou com $c \to \infty$ reobtemos a energia potencial e a força gravitacional da mecânica clássica. Por hora apenas impomos que $\xi > 0$. Na Seção 23.1, equação (23.20), veremos que $\xi = 6$ para que se possa deduzir a precessão do periélio dos planetas com o valor observado pelos astrônomos.

Para evitar o paradoxo gravitacional apresentado no Capítulo 11, assim como para evitar um outro paradoxo análogo que aparece quando implementamos o princípio de Mach através da mecânica relacional, podemos utilizar uma lei de Weber gravitacional com um decaimento exponencial. Neste caso postula-se que a energia U_{12} de interação gravitacional entre duas partículas, assim como a força $\vec{F}_{21}$ exercida por 2 sobre 1, ficam dadas por, respectivamente:

$$U_{12} = -H_g \frac{m_{g1} m_{g2}}{r_{12}} \left(1 - \xi \frac{\dot{r}_{12}^2}{2c^2}\right) e^{-\alpha r_{12}} \ , \tag{16.17}$$

e

$$\vec{F}_{21} = -H_g m_{g1} m_{g2} \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \left[1 - \frac{\xi}{c^2}\left(\frac{\dot{r}_{12}^2}{2} - r_{12}\ddot{r}_{12}\right) + \alpha r_{12}\left(1 - \frac{\xi}{2}\frac{\dot{r}_{12}^2}{c^2}\right)\right] e^{-\alpha r_{12}} = -\vec{F}_{12} \ . \tag{16.18}$$

Nestas equações α é uma constante com dimensão do inverso de comprimento.

A força dada pela equação (16.18) também foi deduzida a partir da energia dada pela equação (16.17) ao utilizar a equação (16.14).

16.4 Propriedades da Energia Potencial e da Força de Weber Aplicadas ao Eletromagnetismo e à Gravitação

As principais propriedades da energia potencial e da força de Weber aplicadas ao eletromagnetismo e à gravitação são as seguintes:

A) Estas forças seguem estritamente o segundo postulado da mecânica relacional, equações (16.1) e (16.2). Ou seja, elas obedecem ao princípio de ação e reação, além de estarem ao longo da linha reta que une os corpos interagentes.

B) Obtemos a força eletrostática entre duas cargas e a força gravitacional de Newton quando não há movimento entre as partículas, isto é, quando $\dot{r}_{12} = 0$ e $\ddot{r}_{12} = 0$. Isto acontece quando a distância entre as partículas é constante no tempo, mesmo que elas estejam se movendo juntas em relação a um sistema de referência arbitrário, ou quando estejam se movendo juntas em relação a outros corpos.

C) A propriedade mais importante da força e da energia de Weber é que elas são *relacionais*. Isto é, estas energias e forças dependem apenas da distância r entre os corpos que estão interagindo, da velocidade radial relativa entre eles, dr/dt, assim como da aceleração radial relativa entre eles, d^2r/dt^2. Embora a posição, velocidade e aceleração de uma partícula em relação a um sistema de referência O possam ser diferentes da posição, velocidade e aceleração da mesma partícula em relação a um outro sistema de referência O', a distância, velocidade radial relativa e aceleração radial relativa entre duas partículas são as mesmas em ambos os sistemas de referência.[4] Isto é, estas forças e energias são completamente relacionais por natureza.

[4][Ass92b, Capítulo 2], [Ass94, Seção 3.2] e [Ass95b, Capítulo 2].

Elas têm o mesmo valor para todos os observadores e para todos os sistemas de referência, independente se eles são ou não inerciais do ponto de vista newtoniano.

Todas as energias e leis de força a serem propostas no futuro têm de ter esta propriedade para poder implementar o princípio de Mach de forma coerente. Como já mostramos na Seção 13.6, Mach enfatizou[5] que "todas as massas e todas as velocidades e, consequentemente, todas as forças são relativas."

Mesmo quando temos um meio, como no caso da força de atrito agindo entre um projétil e o ar ou a água que o circundam, só devem aparecer quantidades relacionais. Por exemplo, a força de atrito dinâmico tem de ser escrita em termos da velocidade relativa entre o projétil e o meio (ar ou água neste caso), assim como foi feito nas equações (2.7) até (2.11). Se algum dia for encontrado um éter entre os corpos, o mesmo terá de ser válido para este meio. Ou seja, a força entre o éter e qualquer corpo deslocando-se em relação ao éter deverá depender apenas da velocidade relativa entre este corpo e o éter.

A situação na física de hoje em dia é bem diferente. Na segunda lei do movimento de Newton temos acelerações relativas ao espaço absoluto ou relativas a sistemas de referência inerciais. A situação é ainda pior na força eletromagnética chamada usualmente de força de Lorentz e que está sendo denominada neste livro de força de Maxwell-Lorentz, equação (14.12), a saber, $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$. Neste caso a velocidade $\vec{v}$ da carga de prova q é entendida (após Einstein) como sua velocidade em relação ao observador e não em relação ao ímã ou ao fio com corrente com o qual a carga teste está obviamente interagindo. Isto foi discutido detalhadamente na Seção 14.5.

16.5 As Forças Exercidas por Cascas Esféricas

Para obter uma equação que descreva o movimento de um corpo qualquer que está interagindo com todos os outros corpos do universo é necessário começar com a interação entre uma casca esférica e uma partícula. É neste cálculo que surge a principal distinção entre a mecânica relacional e a mecânica newtoniana. Aqui também está a chave para a implementação matemática do princípio de Mach utilizando os postulados e as forças relacionais desta nova mecânica.

16.5.1 Força Exercida por uma Casca Esférica Parada

Inicialmente consideramos uma partícula teste com massa gravitacional m_g interagindo com uma casca esférica que tem massa gravitacional M_g. A casca tem um raio R, uma densidade superficial de massa gravitacional isotrópica σ_g que tem o mesmo valor em todos os pontos da casca esférica. Consideramos um sistema de referência U no qual a casca esteja parada, com seu centro na origem O deste referencial U. A partícula pontual m_g está localizada no vetor posição $\vec{r}_{mU}$, deslocando-se com velocidade $\vec{v}_{mU} = d\vec{r}_{mU}/dt$ e aceleração $\vec{a}_{mU} = d\vec{v}_{mU}/dt = d^2\vec{a}_{mU}/dt^2$ em relação à origem de U, figura 16.2.

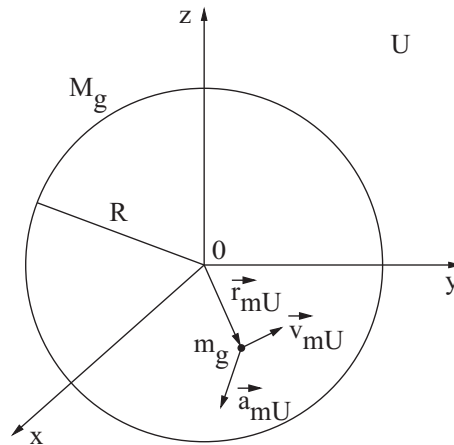



Figura 16.2: Casca esférica parada no referencial U interagindo com uma partícula deslocando-se em relação à casca.

A massa gravitacional da casca esférica é dada por:

[5][Mac60, pág. 279].

$$M_g = 4\pi\sigma_g R^2 \ . \tag{16.19}$$

No Apêndice A, Seção A.1, mostra-se como calcular a energia de interação entre esta partícula m_g e a casca esférica de massa M_g a partir da equação (16.15). O resultado é dado por:

$$U_{Mm}(r_{mU} < R) = -\frac{H_g m_g M_g}{R}\left(1 - \frac{\xi}{6}\frac{\vec{v}_{mU}\cdot\vec{v}_{mU}}{c^2}\right) \ , \tag{16.20}$$

e

$$U_{Mm}(r_{mU} > R) = -\frac{H_g m_g M_g}{r_{mU}}\left[1 - \frac{\xi(\hat{r}_{mU}\cdot\vec{v}_{mU})^2}{2c^2} - \frac{\xi}{6}\frac{R^2}{r_{mU}^2}\frac{\vec{v}_{mU}\cdot\vec{v}_{mU} - 3(\hat{r}_{mU}\cdot\vec{v}_{mU})^2}{c^2}\right] \ . \tag{16.21}$$

A energia potencial gravitacional newtoniana pode ser obtida a partir destas equações fazendo $\xi/c^2 \to 0$.

A equação (16.20) é a mais importante para a implementação do princípio de Mach. Na mecânica newtoniana a energia de interação era dada apenas pelo termo constante $-H_g m_g M_g/R$. Por outro lado, é o termo no qual aparece a velocidade $\vec{v}_{mU}$ da partícula que vai dar origem, na mecânica relacional, a uma energia similar à energia cinética $m_i v^2/2$ da mecânica clássica. Ou seja, este será o termo fundamental para a implementação matemática do princípio de Mach com a mecânica relacional.

Também no Apêndice A, Seção A.1, mostra-se como calcular a força gravitacional exercida por esta casca esférica de massa M_g ao atuar sobre a partícula de massa m_g deslocando-se em relação à casca. Para isto é necessário integrar a equação (16.16). O resultado da integração é dado por:

$$\vec{F}_{casca\ parada}(r_{mU} < R) = -\frac{H_g \xi m_g M_g}{3Rc^2}\vec{a}_{mU} \ , \tag{16.22}$$

e

$$\vec{F}_{casca\ parada}(r_{mU} > R) = -\frac{H_g m_g M_g}{r_{mU}^2}\left\{\left[1 + \frac{\xi}{c^2}\left(\vec{v}_{mU}\cdot\vec{v}_{mU} - \frac{3}{2}(\hat{r}_{mU}\cdot\vec{v}_{mU})^2 + \vec{r}_{mU}\cdot\vec{a}_{mU}\right)\right]\hat{r}_{mU}\right.$$

$$\left. + \frac{\xi}{c^2}\frac{R^2}{r_{mU}^2}\left[\frac{r_{mU}}{3}\vec{a}_{mU} - (\hat{r}_{mU}\cdot\vec{v}_{mU})\vec{v}_{mU} - \frac{\vec{v}_{mU}\cdot\vec{v}_{mU}}{2}\hat{r}_{mU} + \frac{5}{2}(\hat{r}_{mU}\cdot\vec{v}_{mU})^2\hat{r}_{mU} - (\vec{r}_{mU}\cdot\vec{a}_{mU})\hat{r}_{mU}\right]\right\} \ . \tag{16.23}$$

A força gravitacional newtoniana exercida pela casca parada sobre a partícula pode ser obtida a partir destas equações fazendo $\xi/c^2 \to 0$.

A equação (16.22) é a mais importante para a implementação do princípio de Mach. Esta força seria nula com uma lei de Newton para a gravitação. Por outro lado, com uma força de Weber para a gravitação esta força deixa de ser nula sempre que a partícula teste estiver acelerada em relação à casca esférica. Esta força tem sempre o mesmo valor, não interessando a posição da partícula em relação ao centro da casca esférica. É esta força que vai dar origem, na mecânica relacional, a um termo similar à expressão $m_i\vec{a}$ que aparece na segunda lei de Newton da mecânica clássica, $\vec{F} = m_i\vec{a}$. Ou seja, a força não nula dada pela equação (16.22) é essencial para a implementação matemática do princípio de Mach.

Como visto na Subseção 1.4.1, o teorema 30 provado por Newton no *Principia* afirma que uma casca esférica não exerce força resultante sobre partículas internas à casca. Este teorema só é válido ao supor que a interação entre duas partículas seja central, varie com o inverso do quadrado da distância entre elas, além de não depender da velocidade nem da aceleração entre elas. Ao integrar a força gravitacional de Newton entre duas partículas para obter a força resultante exercida pela casca sobre uma partícula interna, obtém-se então o resultado newtoniano de força resultante nula. Já a força gravitacional weberiana entre duas partículas é dada pela equação (16.16). Ela contém o termo newtoniano que varia inversamente com o quadrado da distância, além de dois termos adicionais. O termo adicional proporcional ao quadrado da velocidade radial relativa entre as partículas, ou seja, proporcional a $\dot{r}^2$, também varia com o inverso do quadrado da distância entre as partículas. Ao integrar este termo obtém-se novamente uma força resultante nula. Já o outro termo adicional, proporcional à aceleração radial relativa $\ddot{r}$ entre as partículas, varia apenas inversamente com a distância. Isto significa que este termo não satisfaz às condições iniciais supostas por Newton ao provar o teorema 30 do *Principia*, a saber, forças que variassem com o inverso do quadrado da distância. É exatamente este termo proporcional a $\ddot{r}$ que dá origem à força resultante não nula representada pela equação (16.22).

16.5.2 Força Exercida por uma Casca Esférica Linearmente Acelerada

Vamos agora considerar um sistema de referência A no qual a partícula de massa m_g tem um vetor posição, velocidade e aceleração em relação à origem O do referencial A dados por, respectivamente, $\vec{r}_{mA}$, $\vec{v}_{mA}$ e $\vec{a}_{mA}$. Vamos considerar ainda que em um certo instante t o centro da casca esférica de massa gravitacional M_g e raio R esteja passando pela origem O do referencial A. Além disso, vamos supor que neste instante t a casca como um todo esteja deslocando-se com velocidade $\vec{V}_{MA}$ e aceleração $\vec{A}_{MA}$ em relação a este referencial A, figura 16.3.

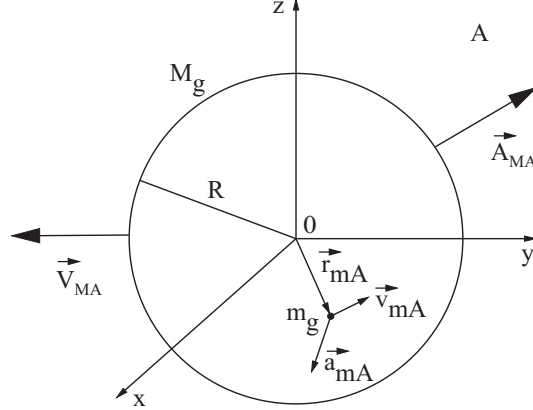



Figura 16.3: Casca esférica acelerada em um referencial A e interagindo com uma partícula deslocando-se em relação à casca.

No Apêndice A, Seção A.2, mostra-se como calcular a energia de interação entre esta partícula m_g e a casca esférica de massa M_g a partir da equação (16.15). O resultado é dado por:

$$U_{Mm}(r_{mA} < R) = -\frac{H_g m_g M_g}{R}\left[1 - \frac{\xi}{6}\frac{(\vec{v}_{mA} - \vec{V}_{MA}) \cdot (\vec{v}_{mA} - \vec{V}_{MA})}{c^2}\right] , \tag{16.24}$$

e

$$U_{Mm}(r_{mA} > R) = -\frac{H_g m_g M_g}{r_{mA}}\left\{1 - \frac{\xi\left[\hat{r}_{mA} \cdot (\vec{v}_{mA} - \vec{V}_{MA})\right]^2}{2c^2}\right.$$
$$\left. - \frac{\xi}{6}\frac{R^2}{r_{mA}^2}\frac{(\vec{v}_{mA} - \vec{V}_{MA}) \cdot (\vec{v}_{mA} - \vec{V}_{MA}) - 3\left[\hat{r}_{mA} \cdot (\vec{v}_{mA} - \vec{V}_{MA})\right]^2}{c^2}\right\} . \tag{16.25}$$

Também no Apêndice A, Seção A.2, mostra-se como calcular a força gravitacional exercida por esta casca esférica de massa M_g ao atuar sobre a partícula de massa m_g deslocando-se em relação à casca. Para isto é necessário integrar a equação (16.16). O resultado da integração é dado por:

$$\vec{F}_{casca\ acelerada}(r_{mA} < R) = -\frac{H_g \xi m_g M_g}{3Rc^2}(\vec{a}_{mA} - \vec{A}_{MA}) , \tag{16.26}$$

e

$$\vec{F}_{casca\ acelerada}(r_{mA} > R) = -\frac{H_g m_g M_g}{r_{mA}^2}\left\{\left[1 + \frac{\xi}{c^2}\left((\vec{v}_{mA} - \vec{V}_{MA}) \cdot (\vec{v}_{mA} - \vec{V}_{MA}) - \frac{3}{2}(\hat{r}_{mA} \cdot (\vec{v}_{mA} - \vec{V}_{MA}))^2\right.\right.\right.$$
$$\left.\left. + \vec{r}_{mA} \cdot (\vec{a}_{mA} - \vec{A}_{MA})\right)\right]\hat{r}_{mA} + \frac{\xi}{c^2}\frac{R^2}{r_{mA}^2}\left[\frac{r_{mA}}{3}(\vec{a}_{mA} - \vec{A}_{MA}) - (\hat{r}_{mA} \cdot (\vec{v}_{mA} - \vec{V}_{MA}))(\vec{v}_{mA} - \vec{V}_{MA})\right.$$
$$\left.\left. - \frac{(\vec{v}_{mA} - \vec{V}_{MA}) \cdot (\vec{v}_{mA} - \vec{V}_{MA})}{2}\hat{r}_{mA} + \frac{5}{2}(\hat{r}_{mA} \cdot (\vec{v}_{mA} - \vec{V}_{MA}))^2\hat{r}_{mA} - (\vec{r}_{mA} \cdot (\vec{a}_{mA} - \vec{A}_{MA}))\hat{r}_{mA}\right]\right\} . \tag{16.27}$$

Novamente os resultados da mecânica newtoniana podem ser reobtidos destas equações fazendo $\xi/c^2 \to 0$. Em particular, a força dada pela equação (16.26) se anula na mecânica clássica, equação (1.20). Isto é, uma casca esférica não exerce força resultante sobre uma partícula interna, não interessando a aceleração da partícula e não importando a aceleração da casca.

Um ponto importante a observar nas equações (16.24) até (16.27) é que estas energias e forças só dependem da velocidade relativa entre a partícula e a casca, $\vec{v}_{mA} - \vec{V}_{MA}$, assim como só dependem da aceleração relativa entre a partícula e a casca, $\vec{a}_{mA} - \vec{A}_{MA}$.

16.5.3 Força Exercida por uma Casca Esférica Girando

Vamos agora considerar um sistema de referência R no qual a partícula de massa m_g tem um vetor posição, velocidade e aceleração em relação à origem O do referencial R dados por, respectivamente, $\vec{r}_{mR}$, $\vec{v}_{mR}$ e $\vec{a}_{mR}$. Vamos considerar ainda que o centro de uma casca esférica de massa gravitacional M_g e raio R coincida com a origem O do referencial R. Além disso, vamos supor que a casca esférica esteja girando com uma velocidade angular $\vec{\Omega}_{MR}(t)$ neste referencial R, figura 16.4.

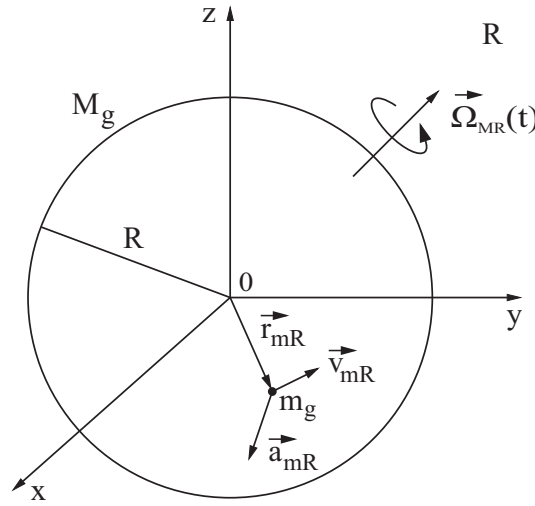



Figura 16.4: Casca esférica girando com uma velocidade angular $\vec{\Omega}_{MR}$ em relação ao referencial R e interagindo com uma partícula deslocando-se em relação à casca.

No Apêndice A, Seção A.3, mostra-se como calcular a energia de interação entre esta partícula m_g e a casca esférica de massa M_g a partir da equação (16.15). O resultado é dado por:

$$U_{Mm}(r_{mR} < R) = -\frac{H_g m_g M_g}{R}\left[1 - \frac{\xi}{6}\frac{(\vec{v}_{mR} - \vec{\Omega}_{MR} \times \vec{r}_{mR}) \cdot (\vec{v}_{mR} - \vec{\Omega}_{MR} \times \vec{r}_{mR})}{c^2}\right] , \tag{16.28}$$

e

$$U_{Mm}(r_{mR} > R) = -\frac{H_g m_g M_g}{r_{mR}}\left\{1 - \frac{\xi\left[\hat{r}_{mR} \cdot (\vec{v}_{mR} - \vec{\Omega}_{MR} \times \vec{r}_{mR})\right]^2}{2c^2}\right.$$

$$\left. - \frac{\xi}{6}\frac{R^2}{r_{mR}^2}\frac{(\vec{v}_{mR} - \vec{\Omega}_{MR} \times \vec{r}_{mR}) \cdot (\vec{v}_{mR} - \vec{\Omega}_{MR} \times \vec{r}_{mR}) - 3\left[\hat{r}_{mR} \cdot (\vec{v}_{mR} - \vec{\Omega}_{MR} \times \vec{r}_{mR})\right]^2}{c^2}\right\} . \tag{16.29}$$

Também no Apêndice A, Seção A.3, mostra-se como calcular a força gravitacional exercida por esta casca esférica de massa M_g ao atuar sobre a partícula de massa m_g deslocando-se em relação à casca. Para isto é necessário integrar a equação (16.16). O resultado da integração é dado por:

$$\vec{F}_{casca\ girando}(r_{mR} < R) = -\frac{\xi}{3c^2}\frac{H_g m_g M_g}{R}\left[\vec{a}_{mR} + \vec{\Omega}_{MR} \times (\vec{\Omega}_{MR} \times \vec{r}_{mR}) + 2\vec{v}_{mR} \times \vec{\Omega}_{MR} + \vec{r}_{mR} \times \frac{d\vec{\Omega}_{MR}}{dt}\right] , \tag{16.30}$$

e

$$\vec{F}_{casca\ girando}(r_{mR} > R) = -\frac{H_g m_g M_g}{r_{mR}^2}\left\{\left[1 + \frac{\xi}{c^2}\left(\vec{v}_{mR} \cdot \vec{v}_{mR} - \frac{3}{2}(\hat{r}_{mR} \cdot \vec{v}_{mR})^2 + \vec{r}_{mR} \cdot \vec{a}_{mR}\right)\right]\hat{r}_{mR}\right.$$

$$+ \frac{\xi}{c^2}\frac{R^2}{r_{mR}^2}\left[\frac{r_{mR}}{3}\vec{a}_{mR} - (\hat{r}_{mR} \cdot \vec{v}_{mR})\vec{v}_{mR} - \frac{\vec{v}_{mR} \cdot \vec{v}_{mR}}{2}\hat{r}_{mR} + \frac{5}{2}(\hat{r}_{mR} \cdot \vec{v}_{mR})^2\hat{r}_{mR} - (\vec{r}_{mR} \cdot \vec{a}_{mR})\hat{r}_{mR}\right.$$

$$+ (\hat{r}_{mR} \cdot \vec{v}_{mR})(\vec{\Omega}_{MR} \times \vec{r}_{mR}) + \frac{2}{3}r_{mR}(\vec{v}_{mR} \times \vec{\Omega}_{MR}) + \frac{r_{mR}}{3}(\vec{\Omega}_{MR} \cdot \vec{r}_{mR})\vec{\Omega}_{MR} + \frac{r_{mR}^2\Omega_{MR}^2}{6}\hat{r}_{mR}$$

$$\left.\left. - \frac{(\vec{r}_{mR} \cdot \vec{\Omega}_{MR})^2}{2}\hat{r}_{mR} + [\vec{r}_{mR} \cdot (\vec{\Omega}_{MR} \times \vec{v}_{mR})]\hat{r}_{mR} + \frac{r_{mR}}{3}\left(\vec{r}_{mR} \times \frac{d\vec{\Omega}_{MR}}{dt}\right)\right]\right\} . \tag{16.31}$$

Suponhamos agora a casca ainda girando com uma velocidade angular $\vec{\Omega}_{MR}$ em relação ao referencial R. Mas agora vamos supor seu centro localizado em $\vec{R}_{oR}$ e movendo-se com velocidade $\vec{V}_{oR}$ e aceleração $\vec{A}_{oR}$ em relação à origem de R. A integração das equações (16.15) e (16.16) fornece um resultado análogo às equações (16.28) até (16.31), mas substituindo $\vec{r}_{mR} - \vec{R}_{oR}$, $|\vec{r}_{mR} - \vec{R}_{oR}|$, $\hat{r}_{mo} \equiv (\vec{r}_{mR} - \vec{R}_{oR})/|\vec{r}_{mR} - \vec{R}_{oR}|$, $\vec{v}_{mR} - \vec{V}_{oR}$ e $\vec{a}_{mR} - \vec{A}_{oR}$ no lugar de $\vec{r}_{mR}$, r_{mR}, $\hat{r}_{mR}$, $\vec{v}_{mR}$ e $\vec{a}_{mR}$, respectivamente.

As forças resultantes exercidas pela casca na mecânica newtoniana podem ser reobtidas destas equações fazendo $\xi/c^2 \to 0$. Em particular, o lado direito da equação (16.30) se anula na mecânica clássica, equação (1.21). Ou seja, não interessa se a casca está parada ou girando, ela não vai exercer uma força resultante sobre uma partícula interna de acordo com a lei de Newton da gravitação. Já com uma lei de Weber para a gravitação a casca girando passa a exercer uma força resultante sobre partículas internas. Os termos dados pela equação (16.30) são essenciais para a implementação do princípio de Mach. Serão estes termos que explicarão, no referencial que gira com os corpos, a experiência do balde de Newton, o achatamento da Terra e a precessão do plano de oscilação do pêndulo de Foucault dentro da mecânica relacional.

16.6 As Energias Inerciais e as Forças Inerciais

Na Seção 16.2 denominamos de *energia inercial* à energia U_i de interação gravitacional entre uma partícula de massa gravitacional m_g e a distribuição isotrópica de matéria ao seu redor. Já a força gravitacional $\vec{F}_i$ exercida por esta distribuição isotrópica de matéria sobre m_g foi denominada de *força inercial* na Seção 16.2. As semelhanças e diferenças de significado das forças inerciais da mecânica newtoniana e das forças inerciais da mecânica relacional serão discutidas na Seção 18.8.

Para obter o valor de U_i temos de integrar para todo o universo conhecido a energia de interação entre m_g e uma casca esférica de raio R e massa gravitacional M_g. Da mesma forma, para obter o valor de $\vec{F}_i$ temos de integrar para todo o universo conhecido a força sobre m_g exercida por uma casca esférica de raio R e massa gravitacional M_g.

Utilizamos agora um fato conhecido de que o universo é altamente isotrópico quando medido pela radiação de fundo na região de microondas e de raios-X, assim como é altamente isotrópico por contagem de fontes de rádio e de galáxias distantes.[6] Deve ser observado que não estamos assumindo teoricamente que este fato é verdadeiro. Este fato vem das observações astronômicas e não de uma hipótese teórica. Mesmo que algum dia se descubra que o universo não é isotrópico em grande escala, ainda assim poderemos deduzir os principais resultados da mecânica relacional. Afinal de contas, mesmo neste caso ainda poderemos dividir a matéria ao redor de um corpo qualquer em duas partes, uma anisotrópica e outra isotrópica. Desta forma ainda teremos a força inercial sobre o corpo vindo de sua interação com a parte isotrópica do universo. A interação do corpo com a distribuição anisotrópica de matéria ao seu redor vai fornecer as forças usuais da mecânica clássica.

[6] [Ass89a].

Como a Terra não ocupa uma região central em relação ao universo como um todo, este fato (isotropia observada no universo) sugere homogeneidade em uma escala muito grande. Isto é, a densidade de massa gravitacional média no universo não deve depender de R (a distância do ponto considerado até nós):

$$\rho_g(R) = \rho_{go} = \text{constante para todo valor de } R \ . \tag{16.32}$$

Para fazer as integrações inicialmente substituímos a massa M_g da casca esférica por

$$dM_g = 4\pi R^2 \rho_{go} dR \ , \tag{16.33}$$

onde dM_g é a massa gravitacional de uma casca esférica de raio R, espessura dR e densidade de massa gravitacional dada por ρ_{go}.

Em seguida a integração deve ser feita sobre todo o universo. Este cálculo é apresentado nas próximas Subseções em diferentes sistemas de referência.

16.6.1 Força Inercial no Referencial Universal Supondo uma Lei de Weber

Inicialmente vamos considerar o referencial universal U introduzido na Seção 1.7. Este é o referencial no qual o conjunto das galáxias distantes é visto em repouso, sem aceleração translacional e sem rotação, figura 1.11. Para obter U_i e $\vec{F}_i$ temos de integrar as equações (16.20) e (16.22) para todo o universo conhecido.

Para fazer as integrações das equações (16.20) e (16.22) vamos utilizar uma densidade de massa gravitacional constante, equação (16.32). Desta maneira podemos encontrar a energia inercial U_i, ou seja, a energia de interação de m_g com a distribuição isotrópica de matéria ao seu redor, assim como a força inercial $\vec{F}_i$, ou seja, a força exercida pela parte isotrópica de matéria do universo ao atuar sobre m_g.

Esta integração será feita para todo o universo conhecido, ou seja, indo de $R = 0$ até $R = R_U$, onde R_U é o raio do universo conhecido. Com isto obtemos:

$$U_i = \int_0^{R_U} dU_{Mm}(r_{mU} < R) = -\int_0^{R_U} \frac{H_g m_g dM_g}{R} \left(1 - \frac{\xi}{6}\frac{\vec{v}_{mU} \cdot \vec{v}_{mU}}{c^2}\right)$$

$$= -4\pi H_g m_g \rho_{go} \left(1 - \frac{\xi}{6}\frac{\vec{v}_{mU} \cdot \vec{v}_{mU}}{c^2}\right) \int_0^{R_U} R dR = -2\pi H_g m_g \rho_{go} R_U^2 + \Phi m_g \frac{\vec{v}_{mU} \cdot \vec{v}_{mU}}{2} \ , \tag{16.34}$$

onde a constante Φ foi definida pela seguinte relação:

$$\Phi \equiv \frac{4\pi}{3} H_g \rho_{go} \frac{\xi}{c^2} \int_0^{R_U} R dR = \frac{2\pi H_g \rho_{go} \xi R_U^2}{3c^2} \ . \tag{16.35}$$

Se tivéssemos utilizado uma energia potencial gravitacional newtoniana, então só obteríamos o termo $-2\pi H_g m_g \rho_{go} R_U^2$ na equação (16.34). O termo proporcional a Φ vem do termo com $\dot{r}^2$ na energia potencial gravitacional de Weber. Podemos reobter o resultado newtoniano fazendo $\xi/c^2 \to 0$, de tal forma que $\Phi \to 0$.

Deve ser enfatizado que o ρ_{go} que aparece na equação (16.35) é a densidade volumétrica média da massa gravitacional das galáxias no espaço. Vamos supor que temos N galáxias em um certo volume bem grande. Logo, ρ_{go} seria dado por N vezes a massa gravitacional média de cada galáxia, dividido pelo volume ocupado por estas N galáxias, com N sendo um número bem grande. Além do mais, estamos integrando sobre todo o universo conhecido.

Já a integração da equação (16.22) nos mesmos limites fornece, com a equação (16.32):

$$\vec{F}_i = \int_0^{R_U} d\vec{F}_{casca\ parada}(r_{mU} < R) = -\int_0^{R_U} \frac{H_g \xi m_g dM_g}{3Rc^2} \vec{a}_{mU} = -\Phi m_g \vec{a}_{mU} \ . \tag{16.36}$$

Mais uma vez foi utilizada a constante Φ definida pela equação (16.35).

Pelo princípio de ação e reação satisfeito pela lei de Weber, encontramos que m_g exercerá uma força resultante $\vec{F}_{mi}$ exatamente igual e oposta a esta ao atuar sobre a parte isotrópica do universo que está ao redor de m_g:

$$\vec{F}_{mi} = -\vec{F}_i = \Phi m_g \vec{a}_{mU} \ . \tag{16.37}$$

Nas figuras deste livro esta força será representada como atuando apenas em uma galáxia. Mas deve ser entendido que esta força está distribuída sobre todas as galáxias.

Com a lei de Newton da gravitação universal obteríamos uma força resultante nula devida à interação de m_g com a parte isotrópica de matéria ao seu redor. Este resultado newtoniano de força nula pode ser reobtido da equação (16.36) fazendo $\Phi \to 0$ ou $\xi/c^2 \to 0$.

16.6.2 Força Inercial no Referencial Universal Supondo uma Lei de Weber com Decaimento Exponencial

O valor de Φ dado pela equação (16.35) diverge para infinito quando $R_U \to \infty$, ou seja, se a integração for feita com R indo de zero até o infinito. Esta divergência ocorre ao supor uma lei de Weber para a gravitação, juntamente com uma densidade constante de massa gravitacional. Ou seja, supondo que na média $\rho_{go} =$ constante em todas as regiões do universo.

Por outro lado, se tivéssemos utilizado uma lei de Weber para a gravitação com decaimento exponencial, equações (16.17) e (16.18), poderíamos ter integrado as expressões da energia e da força exercida pela casca esférica, com R indo de zero até o infinito, sem obter divergências. No Apêndice B mostra-se que neste caso a energia gravitacional de uma partícula m_g interagindo com uma casca esférica de raio R e massa gravitacional M_g é dada por:

$$U_{Mm} = -\frac{H_g m_g M_g e^{-\alpha R}}{R}\left(1 - \frac{\xi}{6}\frac{\vec{v}_{mU}\cdot\vec{v}_{mU}}{c^2}\right) . \tag{16.38}$$

Também neste Apêndice B mostra-se que a força exercida por esta casca esférica em m_g, supondo uma lei de Weber com decaimento gravitacional, é dada por:

$$\vec{F}_{casca\ parada} = -\frac{H_g \xi m_g M_g e^{-\alpha R}}{3Rc^2}\vec{a}_{mU} . \tag{16.39}$$

Estes dois resultados são válidos quando m_g está no centro da casca esférica, deslocando-se em relação à casca com uma velocidade e aceleração dadas por $\vec{v}_{mU}$ e $\vec{a}_{mU}$, respectivamente, enquanto que a casca está parada no referencial U.

Vamos supor aqui que o universo seja homogêneo em larga escala, com uma densidade de massa gravitacional ρ_{go} constante em todos os pontos. Qualquer partícula pode então ser considerada o centro do universo, já que o universo não terá nenhum centro privilegiado. Para saber a energia inercial de m_g interagindo com a parte isotrópica do universo, U_i, podemos integrar a equação (16.38) substituindo M_g por dM_g dada pela equação (16.33), sendo dM_g a massa gravitacional de uma casca esférica de raio R, espessura dR e densidade de massa gravitacional ρ_{go}. Fazendo esta integração com R indo de zero até o infinito obtém-se a energia inercial como sendo dada por:

$$U_i = \int_0^\infty dU_{Mm} = -\int_0^\infty \frac{H_g m_g dM_g e^{-\alpha R}}{R}\left(1 - \frac{\xi}{6}\frac{\vec{v}_{mU}\cdot\vec{v}_{mU}}{c^2}\right)$$

$$= -4\pi H_g m_g \rho_{go}\left(1 - \frac{\xi}{6}\frac{\vec{v}_{mU}\cdot\vec{v}_{mU}}{c^2}\right)\int_0^\infty Re^{-\alpha R}dR = -\frac{4\pi H_g m_g \rho_{go}}{\alpha^2} + \Phi_\infty m_g \frac{\vec{v}_{mU}\cdot\vec{v}_{mU}}{2} , \tag{16.40}$$

onde a constante Φ_∞ foi definida pela seguinte expressão:

$$\Phi_\infty \equiv \frac{4\pi H_g \rho_{go}\xi}{3c^2}\int_0^\infty Re^{-\alpha R}dR = \frac{4\pi H_g \rho_{go}\xi}{3c^2\alpha^2} . \tag{16.41}$$

O resultado (16.34) obtido com a integração das cascas esféricas de raio R com uma lei de Weber gravitacional caracterizado pela constante Φ dada na equação (16.35), com este raio indo de $R = 0$ até R_U, pode ser considerado como equivalente ao resultado (16.40) obtido com uma lei de Weber gravitacional com decaimento exponencial, com R indo de zero até o infinito, caracterizado pela constante Φ_∞ da equação (16.41), supondo

$$R_U = \frac{\sqrt{2}}{\alpha} . \tag{16.42}$$

Da mesma forma, integrando a equação (16.39) com R indo de zero até o infinito, obtém-se a força inercial como sendo dada por:

$$\vec{F}_i = \int_0^\infty d\vec{F}_{casca\ parada}(r_{mU} < R) = -\int_0^\infty \frac{H_g \xi m_g dM_g e^{-\alpha R}}{3Rc^2} \vec{a}_{mU} = -\Phi_\infty m_g \vec{a}_{mU} \ . \tag{16.43}$$

Mais uma vez foi utilizada a constante Φ_∞ definida pela equação (16.41).

Com uma lei de Newton da gravitação obteríamos uma força resultante nula exercida pela parte isotrópica do universo interagindo com m_g. Este resultado pode ser reobtido das equações (16.41) e (16.43) fazendo $\xi/c^2 \to 0$.

Pelo princípio de ação e reação satisfeito pela lei de Weber, encontramos que m_g exercerá uma força resultante $\vec{F}_{mi}$ exatamente igual e oposta à força $\vec{F}_i$ dada pela equação (16.43), ao atuar sobre a parte isotrópica do universo que está ao redor de m_g:

$$\vec{F}_{mi} = -\vec{F}_i = \Phi_\infty m_g \vec{a}_{mU} \ . \tag{16.44}$$

16.6.3 Contribuição da Nossa Galáxia para a Força Inercial

A energia de m_g interagindo gravitacionalmente com uma casca esférica de raio R e massa M_g é dada pela equação (16.38). Já a força exercida por esta casca sobre m_g é dada pela equação (16.39). Podemos obter a energia de interação gravitacional de m_g com nossa galáxia, a Via Láctea, integrando estas expressões ao supor m_g perto do centro da galáxia. Um cálculo aproximado pode ser feito substituindo M_g por dM_g dada pela equação (16.33). Neste caso dM_g será a massa gravitacional de uma casca esférica de raio R e espessura dR, com uma densidade de massa gravitacional dada pela densidade média de massa da Via Láctea. Na Seção 3.5 foi dado que esta densidade média é dada por $\rho_{gVL} \approx 1,4 \times 10^{-20}\ kg/m^3$. Esta integração é feita com R indo de zero até o raio da Via Láctea, $R_{VL} \approx 2,5 \times 10^{20}\ m$. Com isto obtém-se:

$$U_i^{VL} = \int_0^{R_{VL}} dU_{Mm} = -\int_0^{R_{VL}} \frac{H_g m_g dM_g e^{-\alpha R}}{R} \left(1 - \frac{\xi}{6}\frac{\vec{v}_{mU} \cdot \vec{v}_{mU}}{c^2}\right)$$

$$= -4\pi H_g m_g \rho_{gVL} \left(1 - \frac{\xi}{6}\frac{\vec{v}_{mU} \cdot \vec{v}_{mU}}{c^2}\right) \int_0^{R_{VL}} R e^{-\alpha R} dR$$

$$= -\frac{4\pi H_g m_g \rho_{gVL}}{\alpha^2}\left[1 - (1 + \alpha R_{VL})e^{-\alpha R_{VL}}\right] + \Phi_{VL}\left(m_g \frac{\vec{v}_{mU} \cdot \vec{v}_{mU}}{2}\right) \ , \tag{16.45}$$

onde a constante Φ_{VL} foi definida pela seguinte expressão:

$$\Phi_{VL} \equiv \frac{4\pi H_g \rho_{gVL} \xi}{3c^2} \int_0^{R_{VL}} R e^{-\alpha R} dR = \frac{4\pi H_g \rho_{gVL} \xi}{3c^2 \alpha^2}\left[1 - (1 + \alpha R_{VL})e^{-\alpha R_{VL}}\right] \ . \tag{16.46}$$

Da mesma forma, integrando a equação (16.39) com R indo de zero até R_{VL}, obtém-se a força inercial exercida pela Via Láctea sobre um corpo pertencente a ela e perto de seu centro, a saber:

$$\vec{F}_i = \int_0^{R_{VL}} d\vec{F}_{casca\ parada}(r_{mU} < R) = -\int_0^{R_{VL}} \frac{H_g \xi m_g dM_g e^{-\alpha R}}{3Rc^2} \vec{a}_{mU} = -\Phi_{R_{VL}} m_g \vec{a}_{mU} \ . \tag{16.47}$$

Mais uma vez foi utilizada a constante $\Phi_{R_{VL}}$ definida pela equação (16.46).

Ao comparar as equações (16.45) e (16.47) com as equações (16.40) e (16.43) obtém-se que a razão da contribuição inercial da Via Láctea para a contribuição inercial do conjunto de todo o universo é dada essencialmente por Φ_{VL}/Φ_∞, isto é:

$$\frac{\Phi_{VL}}{\Phi_\infty} = \frac{\rho_{gVL}}{\rho_{go}}\left[1 - (1 + \alpha R_{VL})e^{-\alpha R_{VL}}\right] \ . \tag{16.48}$$

Veremos na Seção 17.2 que α está entre $1,7 \times 10^{-27}\ m^{-1}$ e $5,8 \times 10^{-27}\ m^{-1}$. Com $R_{VL} \approx 2,5 \times 10^{20}\ m$ temos $\alpha R_{VL} \approx 10^{-6} \ll 1$. Expandindo a exponencial $e^{-\alpha R_{VL}}$ até segunda ordem em αR_{VL} obtém-se:

$$\frac{\Phi_{VL}}{\Phi_\infty} \approx \frac{\rho_{gVL}}{\rho_{go}} \frac{\alpha^2 R_{VL}^2}{2} \ . \tag{16.49}$$

Temos $\rho_{gVL} \approx 1,4 \times 10^{-20}\ kg/m^3$. Já pela equação (3.37) temos que ρ_{go} está aproximadamente entre $4,6 \times 10^{-28}\ \frac{kg}{m^3}$ e $5,5 \times 10^{-27}\ \frac{kg}{m^3}$. Logo:

$$\frac{\Phi_{VL}}{\Phi_\infty} \approx \frac{\rho_{gVL}}{\rho_{go}} \frac{\alpha^2 R_{VL}^2}{2} \approx \frac{10^{-20}}{10^{-27}} \frac{10^{-12}}{2} \approx 10^{-5} . \quad (16.50)$$

Isto significa que a contribuição das estrelas fixas que pertencem à Via Láctea, no que diz respeito à energia inercial e à força inercial atuando sobre um corpo qualquer pertencente à Via Láctea, é desprezível comparada com a contribuição das galáxias distantes. Ou seja, a principal contribuição para a energia de um corpo qualquer interagindo gravitacionalmente com a distribuição isotrópica de matéria ao seu redor vem das galáxias distantes e não da Via Láctea. O mesmo pode ser dito em relação à contribuição para a força inercial atuando sobre ele. Ou seja, a principal componente desta força vem de sua interação gravitacional com as galáxias distantes. A força gravitacional exercida pelas estrelas da Via Láctea quando este corpo está acelerado em relação às estrelas fixas é desprezível comparada com a força gravitacional exercida sobre este corpo pelas galáxias distantes.

16.6.4 Força Inercial quando o Conjunto de Galáxias está Acelerado

Vamos agora obter as equações de movimento da mecânica relacional em um sistema de referência A no qual o conjunto de galáxias desloca-se como um todo com uma velocidade $\vec{V}_{GA}$ e aceleração $\vec{A}_{GA}$. Vamos supor ainda que neste referencial a partícula de massa gravitacional m_g tem um vetor posição, velocidade e aceleração em relação à origem O do referencial A dados por, respectivamente, $\vec{r}_{mA}$, $\vec{v}_{mA}$ e $\vec{a}_{mA}$, figura 16.5.

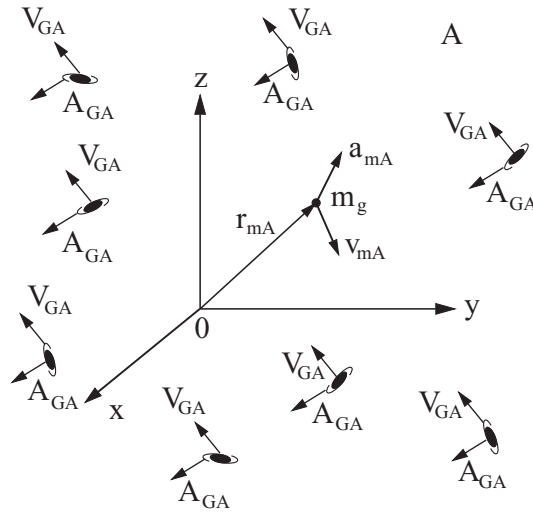



Figura 16.5: Referencial A no qual o conjunto de galáxias tem uma aceleração translacional $\vec{A}_{GA}$.

Para obter U_i e $\vec{F}_i$ é necessário integrar as equações (16.24) e (16.26) para todo o universo conhecido. Estas integrações podem ser feitas da mesma forma que na Subseção 16.6.1. Ao integrar de R igual a zero até o raio R_U do universo conhecido obtêm-se os seguintes valores:

$$U_i = -2\pi H_g m_g \rho_{go} R_U^2 + \Phi m_g \frac{(\vec{v}_{mA} - \vec{V}_{GA}) \cdot (\vec{v}_{mA} - \vec{V}_{GA})}{2} , \quad (16.51)$$

e

$$\vec{F}_i = -\Phi m_g (\vec{a}_{mA} - \vec{A}_{GA}) . \quad (16.52)$$

Mais uma vez foi utilizada a constante Φ definida pela equação (16.35).

Pelo princípio de ação e reação satisfeito pela lei de Weber, encontramos que m_g exercerá uma força resultante $\vec{F}_{mi}$ exatamente igual e oposta ao valor dado pela equação (16.52), ao atuar sobre a parte isotrópica do universo que está ao redor de m_g.

O valor de Φ dado pela equação (16.35) diverge para infinito se a integração for feita com R indo de zero até o infinito, ou seja, se $R_U \to \infty$. Mas podemos evitar este problema ao utilizar uma lei de Weber com um decaimento exponencial, equações (16.17) e (16.18). Neste caso a energia de interação gravitacional entre

uma partícula de massa m_g e uma casca de massa M_g e raio R é dada pela equação (B.14) do Apêndice B ao supor um referencial A no qual a partícula está passando pelo centro da casca com uma velocidade $\vec{v}_{mA}$ e aceleração $\vec{a}_{mA}$, enquanto que a casca está deslocando-se como um todo em relação a este referencial com uma velocidade $\vec{V}_{GA}$ e com uma aceleração $\vec{A}_{GA}$. Substituindo a massa da casca por dM_g dado pela equação (16.33) e integrando com R indo de zero até o infinito obtém-se:

$$U_i = -\frac{4\pi H_g m_g \rho_{go}}{\alpha^2} + \Phi_\infty m_g \frac{(\vec{v}_{mA} - \vec{V}_{GA}) \cdot (\vec{v}_{mA} - \vec{V}_{GA})}{2} , \qquad (16.53)$$

com Φ_∞ dado pela equação (16.41).

As equações (16.51) e (16.53) dependem apenas da velocidade relativa entre a partícula e o conjunto de galáxias, $\vec{v}_{mA} - \vec{V}_{GA}$.

Da mesma forma, ao integrar a equação (B.15) do Apêndice B com R indo de zero até o infinito, obtém-se a força inercial atuando sobre m_g e sendo exercida pelo conjunto de galáxias aceleradas, a saber:

$$\vec{F}_i = -\Phi_\infty m_g (\vec{a}_{mA} - \vec{A}_{GA}) . \qquad (16.54)$$

O resultado de força nula sobre m_g exercida pela distribuição isotrópica de matéria ao seu redor, obtido com uma lei de Newton da gravitação universal, pode ser reobtido das equações (16.41) e (16.54) fazendo $\xi/c^2 \to 0$, ou $\Phi_\infty \to 0$.

Por ação e reação obtém-se a força $\vec{F}_{mi}$ exercida por m_g sobre o conjunto de galáxias, a saber:

$$\vec{F}_{mi} = -\vec{F}_i = \Phi_\infty m_g (\vec{a}_{mA} - \vec{A}_{GA}) . \qquad (16.55)$$

Deve ser enfatizado que as equações (16.52), (16.54) e (16.55) dependem apenas da aceleração relativa entre m_g e o conjunto de galáxias, $\vec{a}_{mA} - \vec{A}_{GA}$.

16.6.5 Força Inercial quando o Conjunto das Galáxias está Girando

Vamos agora obter a energia inercial U_i e a força inercial $\vec{F}_i$ em um sistema de referência R no qual o conjunto de galáxias está girando como um todo com uma velocidade angular $\vec{\Omega}_{GR}$. Vamos supor ainda que neste referencial a partícula de massa gravitacional m_g tem um vetor posição, velocidade e aceleração em relação à origem O do referencial R dados por, respectivamente, $\vec{r}_{mR}$, $\vec{v}_{mR}$ e $\vec{a}_{mR}$, figura 16.6.

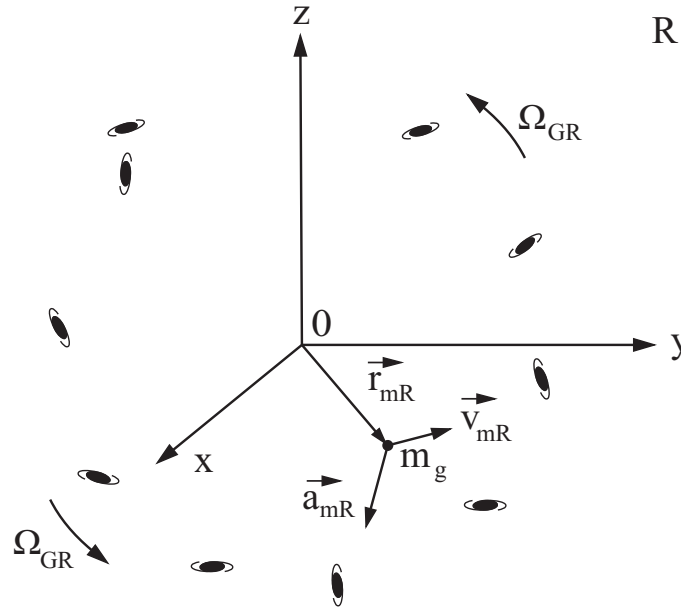



Figura 16.6: Conjunto de galáxias distantes girando com uma velocidade angular $\vec{\Omega}_{GR}$ no referencial R.

Para obter U_i e $\vec{F}_i$ é necessário integrar as equações (16.28) e (16.30) para todo o universo conhecido. Estas integrações podem ser feitas da mesma forma que na Subseção 16.6.1. Ao integrar de R igual a zero até o raio R_U do universo conhecido obtêm-se os seguintes valores:

$$U_i = -\Phi \left[\frac{3}{\xi} m_g c^2 \ - m_g \frac{(\vec{v}_{mR} - \vec{\Omega}_{GR} \times \vec{r}_{mR}) \cdot (\vec{v}_{mR} - \vec{\Omega}_{GR} \times \vec{r}_{mR})}{2} \right] , \tag{16.56}$$

e

$$\vec{F}_i = -\Phi m_g \left[\vec{a}_{mR} + \vec{\Omega}_{GR} \times (\vec{\Omega}_{GR} \times \vec{r}_{mR}) + 2\vec{v}_{mR} \times \vec{\Omega}_{GR} + \vec{r}_{mR} \times \frac{d\vec{\Omega}_{GR}}{dt} \right] . \tag{16.57}$$

Mais uma vez foi utilizada a constante Φ definida pela equação (16.35).

Pelo princípio de ação e reação satisfeito pela lei de Weber, encontramos que m_g exercerá uma força resultante $\vec{F}_{mi}$ exatamente igual e oposta ao valor dado pela equação (16.57), ao atuar sobre a parte isotrópica do universo que está ao redor de m_g.

Novamente temos que a constante Φ dada pela equação (16.35) diverge quando $R_U \to \infty$. Se quisermos integrar a energia de interação e a força exercida por uma casca sobre uma partícula interna, com o raio R indo de zero até o infinito, podemos usar uma lei de Weber gravitacional com decaimento exponencial, equações (16.17) e (16.18). Estas equações podem ser integradas em um referencial R no qual uma casca esférica de massa M_g e raio R está girando com uma velocidade angular $\Omega_{GR}(t)$, com uma partícula deslocando-se em seu interior com uma velocidade $\vec{v}_{mR}$ e aceleração $\vec{a}_{mR}$. Estes resultados são dados pelas equações (B.21) e (B.22) do Apêndice B. Em seguida estas expressões podem ser integradas substituindo a massa da casca por dM_g dada pela equação (16.33) supondo uma densidade de massa gravitacional ρ_{go} constante em todo o universo e fazendo as integrações com este raio R indo de zero até o infinito.

Vamos assumir aqui que a distância r_{mR} da partícula teste ao centro de rotação das cascas é muito menor do que $1/\alpha$, onde α é a constante que caracteriza o decaimento exponencial cosmológico nas equações (16.17) e (16.18). Vamos supor ainda que neste caso, assim como aconteceu no referencial universal e quando o universo como um todo tinha uma aceleração translacional, o resultado obtido com uma lei de Weber com decaimento exponencial e com a integração com o raio R das cascas esféricas indo de $R = 0$ até o infinito, coincida com o resultado obtido com uma lei de Weber gravitacional sem decaimento exponencial e com a integração indo de $R = 0$ até $R = R_U$, sendo a relação entre R_U e a constante α dada pela equação (16.42). Com estas suposições obtém-se:[7]

$$U_i = -\frac{4\pi H_g m_g \rho_{go}}{\alpha^2} + \Phi_\infty m_g \frac{(\vec{v}_{mR} - \vec{\Omega}_{GR} \times \vec{r}_{mR}) \cdot (\vec{v}_{mR} - \vec{\Omega}_{GR} \times \vec{r}_{mR})}{2} , \tag{16.58}$$

e

$$\vec{F}_i = -\Phi_\infty m_g \left[\vec{a}_{mR} + \vec{\Omega}_{GR} \times (\vec{\Omega}_{GR} \times \vec{r}_{mR}) + 2\vec{v}_{mR} \times \vec{\Omega}_{GR} + \vec{r}_{mR} \times \frac{d\vec{\Omega}_{GR}}{dt} \right] . \tag{16.59}$$

Mais uma vez foi utilizada a constante Φ_∞ definida pela equação (16.41).

Pelo princípio de ação e reação satisfeito pela lei de Weber, encontramos que m_g exercerá uma força resultante $\vec{F}_{mi}$ exatamente igual e oposta ao valor dado pela equação (16.59), ao atuar sobre a parte isotrópica do universo que está ao redor de m_g.

16.7 Equações de Movimento em Diversos Sistemas de Referência

As equações de movimento na mecânica relacional são dadas pelas equações (16.9) e (16.10). Para lidar com elas precisamos da energia inercial U_i de uma partícula de massa gravitacional m_g interagindo com a distribuição isotrópica de matéria ao seu redor. Também precisamos da força inercial $\vec{F}_i$ exercida por esta distribuição isotrópica de matéria sobre a partícula m_g. Para obter estas expressões é necessário alguma suposição sobre o universo em larga escala.

As observações astronômicas sobre a distribuição das galáxias ao redor da Terra indicam que esta distribuição, na média, é isotrópica. Ou seja, tem o mesmo valor médio em todas as direções. Isto pode ser expresso matematicamente afirmando que a densidade média de massa gravitacional das galáxias não depende da direção em que se observa, tendo o mesmo valor para todos os ângulos θ e φ de um sistema de coordenadas esféricos centrado na Terra. Logo esta densidade de massa gravitacional ρ_g pode apenas ser uma função da distância R entre o ponto de observação e a Terra, $\rho_g(R)$.

[7] [Ass92f].

Assumimos ainda que não haja qualquer centro privilegiado no universo. Ou seja, assumimos que ele seja não apenas isotrópico em larga escala, como indicam as observações da distribuição de galáxias feitas da Terra, mas também homogêneo. Ou seja, adotamos que o universo possua uma densidade de massa gravitacional ρ_{go} que seja na média constante em todas as regiões, equação (16.32).

O modelo cosmológico que adotamos é o de um universo infinito no espaço e no tempo, sem expansão. Logo esta constante ρ_{go} não depende do tempo neste modelo. Além disso, como assumimos que o universo estende-se indefinidamente em todas as direções ao redor da Terra, para obter U_i temos de integrar a energia de interação de m_g interagindo com uma casca esférica de massa M_g e raio R, com este raio R indo de zero até o infinito. Da mesma forma, para obter $\vec{F}_i$ temos de integrar a força exercida por esta casca esférica ao atuar sobre m_g, com o raio indo de $R = 0$ até o infinito. Para que os valores de U_i e $\vec{F}_i$ sejam finitos, adotamos uma lei de Weber gravitacional com decaimento exponencial, equações (16.17) e (16.18).

Com estas suposições obtém-se que os valores de U_i e $\vec{F}_i$ são aqueles dados pelas equações (16.40), (16.43), (16.53), (16.54), (16.58) e (16.59), sendo a constante Φ_∞ definida pela equação (16.41). Nas próximas Subseções expressamos as equações de movimento da mecânica relacional em diferentes sistemas de referência.

16.7.1 Equação de Movimento no Referencial Universal

Vamos considerar que estamos no referencial universal U no qual o conjunto das galáxias distantes está em repouso, sem qualquer velocidade linear ou angular (desprezando os pequenos movimentos peculiares entre as galáxias) e também sem qualquer aceleração linear ou angular, figura 16.7. Temos um conjunto (A) de N corpos locais interagindo entre si, além de interagirem com o conjunto (B) composto de todas as distribuições isotrópicas de matéria ao redor deles, sendo que estes dois grupos de corpos foram definidos na Seção 16.2. Cada partícula p do grupo (A), com $p = 1, ..., N$, tem uma massa gravitacional m_{gp} e um vetor posição $\vec{r}_{pU}$ em relação à origem O do referencial U, deslocando-se neste referencial com uma velocidade $\vec{v}_{pU}$ e aceleração $\vec{a}_{pU}$. A partícula teste será chamada de k, sendo uma destas N partículas do grupo (A). Sua massa gravitacional será representada por m_{gk}, tendo vetor posição $\vec{r}_{kU}$ em relação à origem O do referencial U, deslocando-se em relação ao referencial U com uma velocidade $\vec{v}_{kU}$ e aceleração $\vec{a}_{kU}$, figura 16.7.

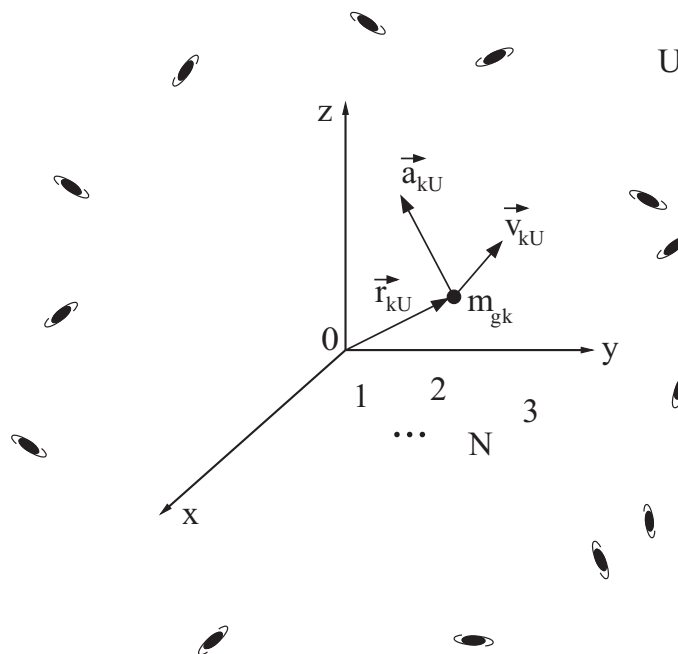



Figura 16.7: Referencial universal U com N partículas locais. Uma destas partículas é o corpo de prova com massa gravitacional m_{gk}.

A equação (16.40) fornece a energia U_i^p de cada uma das N partículas p interagindo gravitacionalmente com a parte isotrópica do universo, com $p = 1, ..., N$. Combinando as equações (16.9) e (16.40) obtém-se a equação de conservação da energia na mecânica relacional, no referencial universal, como sendo dada por:

$$U_{aa} + U_{ii} + U_{ai} = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N}\sum_{\substack{q=1\\q\neq p}}^{N} U_{pq} + U_{ii} + \sum_{p=1}^{N} U_i^p$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N}\sum_{\substack{q=1\\q\neq p}}^{N} U_{pq} + U_{ii} - \frac{4\pi H_g \rho_{go}}{\alpha^2}\left(\sum_{p=1}^{N} m_{gp}\right) + \Phi_\infty \left(\sum_{p=1}^{N} m_{gp}\frac{\vec{v}_{pU}\cdot\vec{v}_{pU}}{2}\right) = 0 \ . \quad (16.60)$$

Para todos os efeitos, podemos assumir que a energia de interação entre as partículas que compõem as distribuições isotrópicas de matéria, U_{ii}, seja constante no tempo. O termo $4\pi H_g \rho_{go}(\sum_{p=1}^{N} m_{gp})/\alpha^2$ também é constante. Isto significa que a equação de conservação de energia da mecânica relacional pode ser escrita na seguinte forma:

$$\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N}\sum_{\substack{q=1\\q\neq p}}^{N} U_{pq} + \Phi_\infty \left(\sum_{p=1}^{N} m_{gp}\frac{\vec{v}_{pU}\cdot\vec{v}_{pU}}{2}\right) = \text{constante no tempo} \ . \quad (16.61)$$

Por exemplo, quando temos duas partículas 1 e 2 interagindo entre si, além de cada uma delas estar interagindo com a distribuição isotrópica de matéria ao redor delas, esta equação fica na seguinte forma, usando que $U_{pq} = U_{qp}$:

$$U_{12} + \Phi_\infty \left(m_{g1}\frac{\vec{v}_{1U}\cdot\vec{v}_{1U}}{2} + m_{g2}\frac{\vec{v}_{2U}\cdot\vec{v}_{2U}}{2}\right) = \text{constante no tempo} \ . \quad (16.62)$$

Já para três partículas 1, 2 e 3 interagindo entre si, além de interagirem com a distribuição isotrópica de matéria ao redor delas, obtemos:

$$U_{12} + U_{13} + U_{23} + \Phi_\infty \left(m_{g1}\frac{\vec{v}_{1U}\cdot\vec{v}_{1U}}{2} + m_{g2}\frac{\vec{v}_{2U}\cdot\vec{v}_{2U}}{2} + m_{g3}\frac{\vec{v}_{3U}\cdot\vec{v}_{3U}}{2}\right) = \text{constante no tempo} \ . \quad (16.63)$$

Por outro lado, ao combinar as equações (16.10) e (16.43), obtém-se a equação de movimento da mecânica relacional para uma partícula teste de massa gravitacional m_{gk} deslocando-se no referencial universal como sendo dada por:

$$\vec{F}_a + \vec{F}_i = \sum_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{N} \vec{F}_{pk} + \vec{F}_i = \sum_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{N} \vec{F}_{pk} - \Phi_\infty m_{gk}\vec{a}_{kU} = \vec{0} \ . \quad (16.64)$$

Por exemplo, quando temos duas partículas interagindo entre si, além de cada uma delas estar interagindo com a distribuição de matéria ao redor delas, a equação de movimento para a partícula 1 fica na seguinte forma:

$$\vec{F}_{21} - \Phi_\infty m_{g1}\vec{a}_{1U} = \vec{0} \ . \quad (16.65)$$

Por outro lado, a equação de movimento para a partícula 2 fica na forma:

$$\vec{F}_{12} - \Phi_\infty m_{g2}\vec{a}_{2U} = \vec{0} \ . \quad (16.66)$$

Já para três partículas interagindo entre si, além de interagirem com a distribuição de matéria ao redor delas, a equação de movimento para a partícula 1 fica na forma

$$\vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} - \Phi_\infty m_{g1}\vec{a}_{1U} = \vec{0} \ . \quad (16.67)$$

São obtidas equações de movimento análogas para as partículas 2 e 3, respectivamente:

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} - \Phi_\infty m_{g2}\vec{a}_{2U} = \vec{0} \ , \quad (16.68)$$

e

$$\vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} - \Phi_\infty m_{g3}\vec{a}_{3U} = \vec{0} \ . \quad (16.69)$$

Contrariamente ao espaço absoluto de Newton, que era "sem relação com qualquer coisa externa," este referencial universal em relação ao qual estamos especificando a velocidade $\vec{v}_{kU}$ e a aceleração $\vec{a}_{kU}$ da partícula teste k, é completamente determinado pelo mundo material distante. Ele é o referencial no qual a matéria distante como um todo está em repouso, apesar da existência de velocidades peculiares ou próprias das galáxias neste referencial (pequenas velocidades das galáxias entre si). Ou seja, é o referencial no qual a velocidade *média* das galáxias é nula, apesar de não ser necessário (e obviamente não ser este o caso) que todas as galáxias estejam em repouso neste referencial. Neste sistema de referência universal o universo aparece isotrópico em grande escala, com as galáxias distantes estando distribuídas de maneira mais ou menos uniforme. Das observações astronômicas parece que este é o mesmo referencial no qual a radiação cósmica de fundo é isotrópica, sem apresentar qualquer anisotropia de dipolo. É neste referencial que a equação de movimento da mecânica relacional fica na forma mais simples dada pela equação (16.64). Nesta equação não aparecem termos contendo a aceleração do conjunto de galáxias distantes.

16.7.2 Equação de Movimento quando o Conjunto de Galáxias está Acelerado

Obtemos agora a equação de conservação da energia na mecânica relacional, no referencial A no qual o conjunto de galáxias desloca-se com uma velocidade $\vec{V}_{GA}$ e aceleração $\vec{A}_{GA}$, figura 16.8. Mais uma vez supomos a existência dos grupos (A) e (B) definidos na Seção 16.2. O grupo (A) é composto de N partículas, a saber, o corpo de prova com massa gravitacional m_{gk}, os outros corpos locais e as distribuições anisotrópicas de matéria. O grupo (B) é composto pelas distribuições isotrópicas de matéria ao redor do corpo de prova. Cada partícula p pertencente ao grupo (A), com $p = 1, ..., N$, tem uma massa gravitacional m_{gp}, estando localizada no vetor posição $\vec{r}_{kA}$ em relação à origem O do referencial A, deslocando-se no referencial A com velocidade $\vec{v}_{kA}$ e aceleração $\vec{a}_{kA}$, figura 16.8.

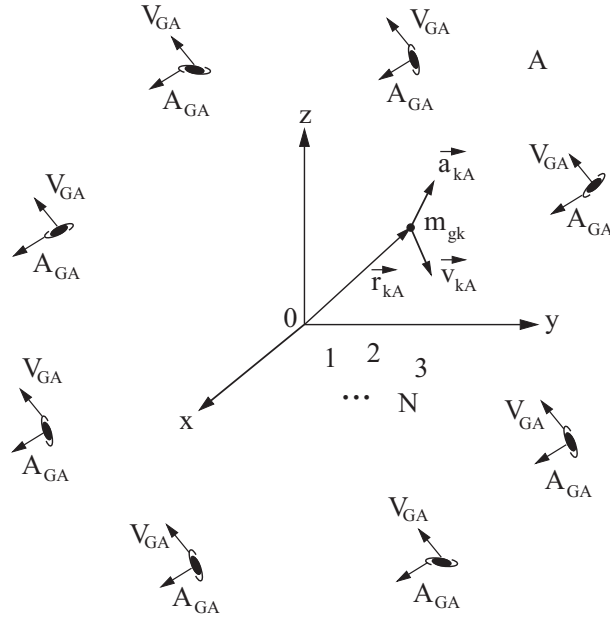



Figura 16.8: Referencial A no qual o conjunto de galáxias tem uma velocidade $\vec{V}_{GA}$ e aceleração translacional $\vec{A}_{GA}$. Entre as N partículas locais está o corpo de teste com massa gravitacional m_{gk}.

Combinando as equações (16.9) e (16.53), obtém-se:

$$U_{aa} + U_{ii} + U_{ai} = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N}\sum_{\substack{q=1\\q\neq p}}^{N} U_{pq} + U_{ii} + \sum_{p=1}^{N} U_i^p$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N}\sum_{\substack{q=1\\q\neq p}}^{N} U_{pq} + U_{ii} - \frac{4\pi H_g \rho_{go}}{\alpha^2}\left(\sum_{p=1}^{N} m_{gp}\right) + \Phi_\infty\left[\sum_{p=1}^{N} m_{gp}\frac{(\vec{v}_{pA} - \vec{V}_{GA})\cdot(\vec{v}_{pA} - \vec{V}_{GA})}{2}\right] = 0 \ , \quad (16.70)$$

onde a constante Φ_∞ foi definida pela equação (16.41).

O termo $-(4\pi H_g \rho_{go}/\alpha^2)(\sum_{p=1}^N m_{gp})$ é constante. Vamos considerar novamente U_{ii} como sendo constante no tempo. Com esta suposição a equação (16.70) pode ser escrita como:

$$\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N}\sum_{\substack{q=1\\q\neq p}}^{N} U_{pq} + \Phi_\infty \left[\sum_{p=1}^{N} m_{gp} \frac{(\vec{v}_{pA} - \vec{V}_{GA})\cdot(\vec{v}_{pA} - \vec{V}_{GA})}{2}\right] = \text{constante no tempo} \ . \tag{16.71}$$

Esta é a equação de conservação de energia da mecânica relacional neste referencial A. Deve ser observado que a energia inercial U_i^p depende da velocidade *relativa* entre cada corpo p e o conjunto de galáxias, ou seja, depende apenas de $\vec{v}_{pA} - \vec{V}_{GA}$.

Por outro lado, ao combinar as equações (16.10) e (16.54), obtém-se a equação de movimento da mecânica relacional para uma partícula de massa gravitacional m_{gk} deslocando-se no referencial A com uma aceleração $\vec{a}_{kA}$, a saber:

$$\vec{F}_a + \vec{F}_i = \sum_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{N} \vec{F}_{pk} + \vec{F}_i = \sum_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{N} \vec{F}_{pk} - \Phi_\infty m_{gk}(\vec{a}_{kA} - \vec{A}_{GA}) = \vec{0} \ . \tag{16.72}$$

Aqui $\vec{A}_{GA}$ é a aceleração do conjunto de galáxias em relação ao referencial A.

O aspecto mais importante a observar nesta expressão é que só vai haver uma força inercial $\vec{F}_i = -\Phi_\infty m_{gk}(\vec{a}_{kA} - \vec{A}_{GA})$ atuando sobre o corpo k caso haja uma aceleração *relativa* entre ele e o conjunto de galáxias. Ou seja, esta expressão depende de $\vec{a}_{kA} - \vec{A}_{GA}$. Caso $\vec{a}_{kA} = \vec{A}_{GA}$, teremos $\vec{F}_i = -\Phi_\infty m_{gk}(\vec{a}_{kA} - \vec{A}_{GA}) = \vec{0}$.

Na figura 16.9 (a) apresentamos as acelerações do corpo k e do conjunto de galáxias no referencial A. Já na figura 16.9 (b) apresentamos a força inercial $\vec{F}_i = -\Phi_\infty m_{gk}(\vec{a}_{kA} - \vec{A}_{GA}) = \Phi_\infty m_{gk}(\vec{A}_{GA} - \vec{a}_{kA})$ exercida pelo conjunto de galáxias sobre o corpo, apontando na direção de $\vec{A}_{GA} - \vec{a}_{kA}$, juntamente com a força de reação $\vec{F}_{mi}$ exercida pelo corpo sobre o conjunto de galáxias. Embora esta última força esteja colocada sobre uma única galáxia, deve ser entendido que ela está distribuída sobre todas as galáxias. Se as galáxias não estiverem aceleradas no referencial A, a força exercida por elas sobre o corpo estará no sentido contrário à aceleração do corpo neste referencial. Por outro lado, caso em algum instante a aceleração do corpo seja nula neste referencial A, a força exercida pelas galáxias sobre ele estará no sentido da aceleração $\vec{A}_{GA}$ das galáxias.

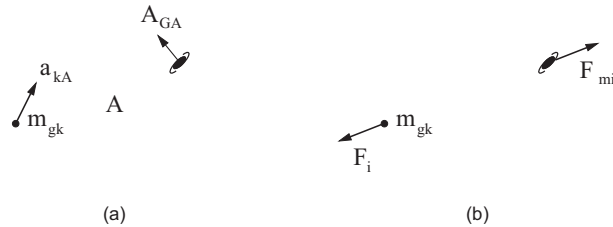



Figura 16.9: (a) Acelerações do corpo k e do conjunto de galáxias em relação ao referencial A. (b) Força inercial $\vec{F}_i$ exercida pelo conjunto de galáxias sobre k, juntamente com a força $\vec{F}_{mi}$ exercida por k sobre o conjunto de galáxias.

16.7.3 Equação de Movimento quando o Conjunto de Galáxias está Girando

Vamos agora considerar um referencial R no qual o conjunto das galáxias está girando como um todo com uma velocidade angular $\vec{\Omega}_{GR}(t)$. Mais uma vez supomos a existência dos dois grupos (A) e (B) definidos na Seção 16.2. O grupo (A) é composto de N partículas, a saber, o corpo de prova com massa gravitacional m_{gk}, os outros corpos locais e as distribuições anisotrópicas de matéria. O grupo (B) é composto pelas distribuições isotrópicas de matéria ao redor do corpo de prova. Cada partícula p pertencente ao grupo (A), com $p = 1, ..., N$, tem uma massa gravitacional m_{gp}, estando localizada no vetor posição $\vec{r}_{kR}$ em relação à origem O do referencial R, deslocando-se no referencial R com velocidade $\vec{v}_{kR}$ e aceleração $\vec{a}_{kR}$, figura 16.10.

Combinando as equações (16.9) e (16.58), obtém-se a equação de conservação da energia na mecânica relacional, no referencial R, como sendo dada por:

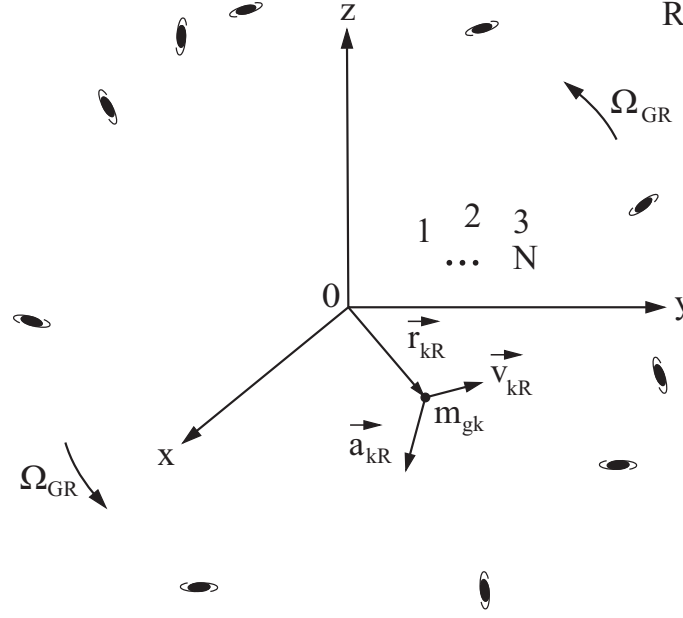



Figura 16.10: Conjunto de galáxias distantes girando com uma velocidade angular $\vec{\Omega}_{GR}$ no referencial R.

$$U_{aa} + U_{ii} + U_{ai} = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N}\sum_{\substack{q=1\\q\neq p}}^{N} U_{pq} + U_{ii} + \sum_{p=1}^{N} U_i^p$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N}\sum_{\substack{q=1\\q\neq p}}^{N} U_{pq} + U_{ii} - \frac{4\pi H_g \rho_{go}}{\alpha^2}\left(\sum_{p=1}^{N} m_{gp}\right) + \Phi_\infty \left[\sum_{p=1}^{N} m_{gp} \frac{(\vec{v}_{pR} - \vec{\Omega}_{GR}\times\vec{r}_{pR})\cdot(\vec{v}_{pR} - \vec{\Omega}_{GR}\times\vec{r}_{pR})}{2}\right] = 0 \, , \tag{16.73}$$

onde a constante Φ_∞ foi definida pela equação (16.41).

O termo $-(4\pi H_g \rho_{go}/\alpha^2)(\sum_{p=1}^{N} m_{gp})$ é constante. Considerando novamente U_{ii} como sendo constante no tempo, esta equação pode ser escrita como:

$$\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N}\sum_{\substack{q=1\\q\neq p}}^{N} U_{pq} + \Phi_\infty \left[\sum_{p=1}^{N} m_{gp} \frac{(\vec{v}_{pR} - \vec{\Omega}_{GR}\times\vec{r}_{pR})\cdot(\vec{v}_{pR} - \vec{\Omega}_{GR}\times\vec{r}_{pR})}{2}\right] = \text{constante no tempo} \, . \tag{16.74}$$

Esta é a equação de conservação da energia da mecânica relacional no referencial R.

Por outro lado, ao combinar as equações (16.10) e (16.59), obtém a equação de movimento da mecânica relacional para uma partícula de massa gravitacional m_{gk} deslocando-se no referencial R no qual o conjunto de galáxias gira como um todo com uma velocidade angular $\vec{\Omega}_{GR}$, como sendo dada por:

$$\vec{F}_a + \vec{F}_i = \sum_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{N} \vec{F}_{pk} + \vec{F}_i = \sum_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{N} \vec{F}_{pk} - \Phi_\infty m_{gk}\left[\vec{a}_{kR} + \vec{\Omega}_{GR}\times(\vec{\Omega}_{GR}\times\vec{r}_{kR}) + 2\vec{v}_{kR}\times\vec{\Omega}_{GR} + \vec{r}_{kR}\times\frac{d\vec{\Omega}_{GR}}{dt}\right] = \vec{0} \, . \tag{16.75}$$

Vamos considerar aqui um caso particular no qual o corpo de prova k e o conjunto de galáxias estão girando ao redor do eixo z do referencial R com velocidades angulares constantes dadas por $\vec{\omega}_{kR} = \omega_{kR}\hat{z}$ e $\vec{\Omega}_{GR} = \Omega_{GR}\hat{z}$, respectivamente. Estas velocidades angulares podem ser diferentes entre si. Neste caso usamos coordenadas cilíndricas $(u, \ \varphi, \ z) = (\sqrt{x^2+y^2}, \ \arctan(y/x), \ z)$. A posição de k é dada por $\vec{r}_{kR} = x_k\hat{x} + y_k\hat{y} + z_k\hat{z} = \vec{u}_k + z_k\hat{z} = u_k\hat{u}_k + z_k\hat{z}$, onde $u_k = \sqrt{x_k^2 + y_k^2}$ é a distância da partícula k ao eixo de

rotação e $\hat{u}_k$ é o vetor unitário paralelo ao plano xy e apontando do eixo z até esta partícula. A velocidade de k em relação ao referencial R é dada por

$$\vec{v}_{kR} = \vec{\omega}_{kR} \times \vec{r}_{kR} = \vec{\omega}_{kR} \times \vec{u}_k = (\omega_{kR}) u_k \hat{\varphi}_k \ , \tag{16.76}$$

onde $\hat{\varphi}_k$ é o vetor unitário apontando na direção tangencial φ na posição da partícula k, figura 16.11.

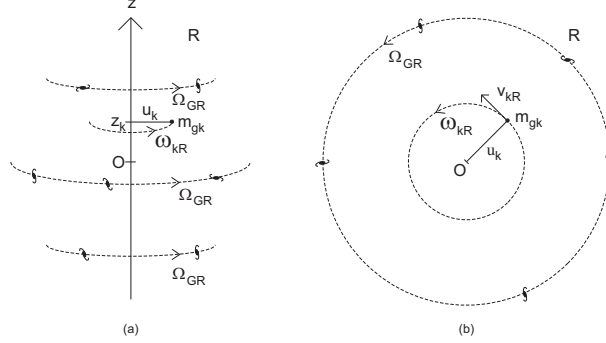



Figura 16.11: Corpo k a uma distância u_k do eixo z de rotação deslocando-se com velocidade angular $\omega_{kR}\hat{z}$ no referencial R, enquanto que o conjunto de galáxias está girando com velocidade angular $\Omega_{GR}\hat{z}$. (a) Visão em perspectiva. (b) Visão projetada no plano xy.

Como a velocidade angular é constante no tempo, esta partícula tem apenas uma aceleração centrípeta dada por

$$\vec{a}_{kR} = -\omega_{kR}^2 \vec{u}_k = -(\omega_{kR}^2) u_k \hat{u}_k \ . \tag{16.77}$$

Aplicando as equações (16.76) e (16.77) nas equações (16.74) e (16.75) obtém-se:

$$\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N}\sum_{\substack{q=1\\q\neq p}}^{N} U_{pq} + \Phi_\infty \left[\sum_{p=1}^{N} m_{gp} \frac{(\omega_{pR} - \Omega_{GR})^2 u_p^2}{2}\right] = \text{constante no tempo} \ , \tag{16.78}$$

e

$$\sum_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{N} \vec{F}_{pk} + \Phi_\infty m_{gk} \left[(\omega_{kR}^2) u_k \hat{u}_k - \Omega_{GR}\hat{z} \times (\Omega_{GR}\hat{z} \times u_k \hat{u}_k) - 2(\omega_{kR}) u_k \hat{\varphi}_k \times \Omega_{GR}\hat{z}\right]$$

$$= \sum_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{N} \vec{F}_{pk} + \Phi_\infty m_{gk} \left(\omega_{kR}^2 - 2\omega_{kR}\Omega_{GR} + \Omega_{GR}^2\right) u_k \hat{u}_k = \sum_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{N} \vec{F}_{pk} + \Phi_\infty m_{gk} (\omega_{kR} - \Omega_{GR})^2 u_k \hat{u}_k = \vec{0} \ . \tag{16.79}$$

O ponto importante a ser observado na equação (16.78) é que a energia inercial $U_i^p = U_i = \Phi_\infty m_{gp}(\omega_{pR} - \Omega_{GR})^2 u_p^2/2$ depende apenas da velocidade angular *relativa* entre o corpo p e o conjunto de galáxias, ou seja, ela depende apenas de $\omega_{pR} - \Omega_{GR}$. Da mesma forma, o ponto importante a ser observado na equação (16.79) é que a força inercial $\vec{F}_i = \Phi_\infty m_{gk}(\omega_{kR} - \Omega_{GR})^2 u_k \hat{u}_k$ depende apenas da rotação *relativa* entre o corpo de prova e o conjunto de galáxias, ou seja, ela depende apenas de $\omega_{kR} - \Omega_{GR}$. Estas expressões só serão diferentes de zero caso $\omega_{kR} \neq \Omega_{GR}$, isto é, se houver uma rotação *relativa* entre o corpo de prova e o conjunto de galáxias. Além disso, neste caso a equação (16.79) mostra que esta força inercial é centrífuga, isto é, apontando do eixo z de rotação para a partícula k. Ou seja, a força aponta no mesmo sentido do versor $\hat{u}_k$, atuando em um plano perpendicular ao eixo z de rotação. Na figura 16.12 são apresentadas as forças de ação e reação entre o corpo k e o conjunto de galáxias.

Com isto obtivemos as equações de movimento na mecânica relacional nos principais sistemas de referência, a saber, no referencial universal U, no referencial A em relação ao qual o conjunto das galáxias tem uma aceleração translacional $\vec{A}_{GA}$, assim como no referencial R no qual o conjunto das galáxias gira como um todo com uma velocidade angular $\vec{\Omega}_{GR}$.

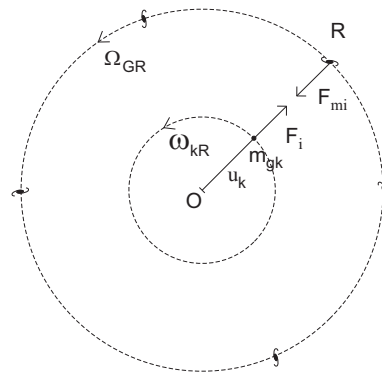



Figura 16.12: Força inercial $\vec{F}_i$ exercida gravitacionalmente pelo conjunto de galáxias sobre o corpo k, juntamente com a força de reação $\vec{F}_{mi}$ exercida pelo corpo sobre as galáxias.

Capítulo 17

Tópicos Adicionais da Mecânica Relacional

17.1 Movimento de Atração entre Dois Corpos no Referencial das Galáxias Distantes

Para entender as semelhanças e diferenças entre a mecânica relacional e a mecânica clássica, analisamos em seguida o movimento de dois corpos (como a Terra e a maçã) no referencial das galáxias distantes.

A queda livre na mecânica clássica foi analisada na Subseção 6.2.3. Analisamos agora este problema do ponto de vista da mecânica relacional. Temos então o corpo 1 de massa gravitacional m_{g1} e o corpo 2 de massa gravitacional m_{g2}. Vamos tratá-los como partículas, desprezando seus diâmetros em comparação com a distância entre eles. Vamos analisar o movimento destes corpos no referencial universal U, figura 17.1.

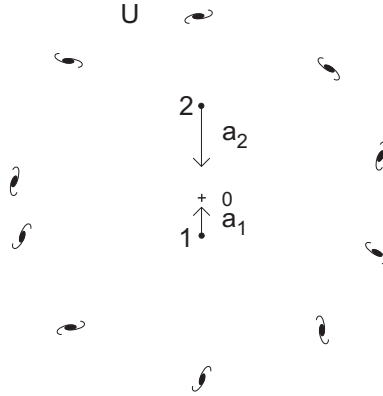



Figura 17.1: Duas massas interagindo no referencial universal U das galáxias distantes.

Sejam $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ os vetores posição dos corpos 1 e 2 em relação à origem de coordenadas O do referencial U. Vamos supor que os corpos 1 e 2 estejam deslocando-se em relação ao referencial U com velocidades $\vec{v}_{1U}$ e $\vec{v}_{2U}$, sendo suas acelerações em relação ao referencial universal representadas por $\vec{a}_{1U}$ e $\vec{a}_{2U}$, respectivamente. Na Seção 16.2 dividimos todos os corpos do universo em dois grupos, (A) e (B). Neste caso os corpos locais que compõem o grupo (A) são a partícula 1 e a partícula 2, enquanto que o grupo (B) é composto pelas distribuições isotrópicas de matéria ao redor destas duas partículas.

O postulado de conservação de energia na mecânica relacional é dado pela equação (16.61). Além da partícula 1 estar interagindo com a partícula 2, temos a interação gravitacional da partícula 1 com a distribuição isotrópica de matéria ao seu redor, assim como a interação gravitacional da partícula 2 com a distribuição isotrópica de matéria ao seu redor. Ficamos então com a seguinte equação (usando que $U_{21} = U_{12}$):

$$U_{12} + \Phi_\infty \left(m_{g1} \frac{\vec{v}_{1U} \cdot \vec{v}_{1U}}{2} + m_{g2} \frac{\vec{v}_{2U} \cdot \vec{v}_{2U}}{2} \right) = \text{constante no tempo} . \quad (17.1)$$

A energia de interação gravitacional U_{12} entre a partícula 1 e a partícula 2 é dada pela equação (16.17).

Vamos supor $\alpha r_{12} \ll 1$, onde $r_{12} \equiv r$ é a distância entre os centros da partícula 1 e da partícula 2, assim como $\dot{r}_{12}^2/c^2 \ll 1$, onde $\dot{r}_{12} \equiv \dot{r}$ é a velocidade radial relativa entre a partícula 1 e a partícula 2. Com esta suposição obtém-se:

$$U_{12} = -H_g \frac{m_{g1} m_{g2}}{r_{12}} \ . \tag{17.2}$$

Combinando as equações (17.1) e (17.2) obtém-se, após dividir os dois lados pela constante Φ_∞:

$$-\frac{H_g}{\Phi_\infty}\frac{m_{g1} m_{g2}}{r_{12}} + m_{g1}\frac{\vec{v}_{1U}\cdot\vec{v}_{1U}}{2} + m_{g2}\frac{\vec{v}_{2U}\cdot\vec{v}_{2U}}{2} = \text{constante no tempo} \ . \tag{17.3}$$

Já o postulado de soma nula de todas as forças na mecânica relacional é dado pela equação (16.64). No caso da partícula 1 de massa m_{g1}, quem está exercendo forças gravitacionais sobre ela é não apenas a partícula 2 de massa m_{g2}, mas também a distribuição isotrópica de matéria ao seu redor. Logo este postulado fica na seguinte forma:

$$\vec{F}_{21} - \Phi_\infty m_{g1}\vec{a}_{1U} = \vec{0} \ . \tag{17.4}$$

A força gravitacional $\vec{F}_{21}$ exercida por 2 sobre 1 é dada pela equação (16.18). Novamente vamos supor $\alpha r_{12} \ll 1$, $\dot{r}_{12}^2/c^2 \ll 1$ e $|r_{12}\ddot{r}_{12}|/c^2 \ll 1$, onde $r_{12} \equiv r$ é a distância entre os centro da partícula 1 e da partícula 2, $\dot{r}_{12} \equiv \dot{r}$ é a velocidade radial relativa entre elas, e $\ddot{r}_{12} \equiv \ddot{r}$ é a aceleração radial relativa entre elas. Desta forma a equação (16.18) simplifica-se para:

$$\vec{F}_{21} = H_g m_{g1} m_{g2}\frac{\hat{r}_{21}}{r_{12}^2} \ , \tag{17.5}$$

onde $\hat{r}_{21} \equiv -\hat{r}_{12}$ é o vetor unitário apontando da partícula 1 para a partícula 2.

Combinando as equações (17.4) e (17.5) obtém-se, após dividir os dois lados pela constante Φ_∞:

$$\frac{H_g}{\Phi_\infty} m_{g1} m_{g2}\frac{\hat{r}_{21}}{r_{12}^2} - m_{g1}\vec{a}_{1U} = \vec{0} \ . \tag{17.6}$$

Seguindo o mesmo procedimento obtém-se a equação de movimento para a partícula 2 na mecânica relacional como sendo dada por, usando que $\hat{r} = \hat{r}_{21} = -\hat{r}_{12}$:

$$-\frac{H_g}{\Phi_\infty} m_{g1} m_{g2}\frac{\hat{r}_{21}}{r_{12}^2} - m_{g2}\vec{a}_{2U} = \vec{0} \ . \tag{17.7}$$

17.2 Os Valores das Constantes que Aparecem nas Forças Relacionais

Nesta Seção discutimos os valores das constantes H_e, H_g e α que aparecem nas equações (16.11), (16.13), (16.15), (16.16), (16.17) e (16.18).

Podemos comparar as equações (17.3), (17.6) e (17.7) com as equações análogas obtidas com a mecânica newtoniana, a saber, equações (6.25), (6.27) e (6.28). Elas possuem os mesmos formatos e vão fornecer os mesmos valores numéricos no Sistema Internacional de Unidades, caso H_g/Φ_∞ tenha o mesmo valor da constante G da gravitação universal. Vamos postular que isto de fato ocorra. Ou seja, impomos que seja exatamente válida a seguinte equação:

$$\frac{H_g}{\Phi_\infty} = G \ . \tag{17.8}$$

Combinando a equação (17.8) com a definição da constante Φ_∞ dada pela equação (16.41) obtém-se:

$$\frac{H_g}{\Phi_\infty} = \frac{H_g}{4\pi H_g \rho_{go}\xi/(3c^2\alpha^2)} = \frac{3c^2\alpha^2}{4\pi\rho_{go}\xi} = G \ . \tag{17.9}$$

É desta forma que se pode obter o valor da constante α que havia sido introduzida nas equações (16.17) e (16.18). Ou seja, a partir da equação (17.9) obtém-se:

$$\alpha = \sqrt{\frac{4\pi\rho_{go}\xi G}{3c^2}} \ . \tag{17.10}$$

O valor da constante ξ será obtido a partir da comparação do cálculo do avanço do periélio dos planetas com as medidas observacionais. Como será visto na Seção 23.1, esta comparação vai fornecer

$$\xi = 6 \ . \tag{17.11}$$

Combinando as equações (17.10), (17.11), o valor de G dado pela equação (1.8) e os limites de ρ_{go} dados pela equação (3.37), obtém-se:

$$1,7 \times 10^{-27} \ m^{-1} < \alpha < 5,8 \times 10^{-27} \ m^{-1} \ . \tag{17.12}$$

Com as equações (11.19) e (17.12) obtém-se que a distância característica das interações gravitacionais, dada por $d_g \equiv 1/\alpha$, está entre os seguintes limites:

$$1,7 \times 10^{26} \ m < d_g < 5,9 \times 10^{26} \ m \ . \tag{17.13}$$

Observa-se então que o valor de d_g é da mesma ordem de grandeza da distância de Hubble R_o dada pela equação (3.34). A grandeza d_g definida pela equação (11.19) pode ser chamada de *distância característica das interações gravitacionais*. Pelas equações (16.17) e (16.18) observa-se que quando a distância r entre duas massas gravitacionais tem o valor de d_g, a energia potencial de interação entre elas é menor do que a energia potencial newtoniana em $1/e$. Esta distância d_g não tem nada a ver com o tamanho ou raio do universo, já que estamos supondo aqui um universo homogêneo, com densidade constante de massa gravitacional, sendo infinito no espaço.

Caso α esteja relacionada com a constante de Hubble H_o pela equação (11.22), a equação (17.10) poderá ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{H_o^2}{k_1^2} = \frac{4\pi\rho_{go}\xi G}{3} \ . \tag{17.14}$$

Nesta equação a constante adimensional k_1 teria um valor igual a 1 ou um valor com esta ordem de grandeza (tipo 0,5; 1,3; 0,8; ou ...). Esta equação é similar à equação (11.23) relacionando G, H_o e ρ_{go}. Ela foi obtida por diversos autores ao longo do século XX.[1]

A equação (17.9) mostra que o valor da constante H_g não pode ser determinado na mecânica relacional. Isto é compatível com o princípio das proporções físicas.[2] Ou seja, só é possível determinar a razão entre forças. Também não é possível determinar o valor de H_e dado pelas equações (16.11) e (16.13), mas a razão H_e/H_g pode ser determinada. Para entender como se pode obter H_e/H_g, consideramos a interação de duas cargas q_1 e q_2 no referencial universal U. Elas interagem eletricamente entre si, além de interagirem gravitacionalmente com a distribuição isotrópica de matéria ao redor delas, ou seja, com as galáxias distantes. Mais uma vez vamos supor $\dot{r}_{12}^2/c^2 \ll 1$ e $|r_{12}\ddot{r}_{12}|/c^2 \ll 1$. Fazendo um desenvolvimento análogo ao apresentado na Seção 17.1, juntamente com as equações (16.11) e (16.13), podem ser obtidas as equações de movimento como sendo dadas por equações análogas às equações (17.3), (17.6) e (17.7), mas agora substituindo a interação gravitacional entre 1 e 2 pela interação elétrica entre elas:

$$\frac{H_e}{\Phi_\infty}\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + m_{g1}\frac{\vec{v}_{1U}\cdot\vec{v}_{1U}}{2} + m_{g2}\frac{\vec{v}_{2U}\cdot\vec{v}_{2U}}{2} = \text{constante no tempo} \ , \tag{17.15}$$

$$-\frac{H_e}{\Phi_\infty}q_1 q_2\frac{\hat{r}_{21}}{r_{12}^2} - m_{g1}\vec{a}_{1U} = \vec{0} \ , \tag{17.16}$$

e

$$\frac{H_e}{\Phi_\infty}q_1 q_2\frac{\hat{r}_{21}}{r_{12}^2} - m_{g2}\vec{a}_{2U} = \vec{0} \ . \tag{17.17}$$

Estas expressões serão análogas às equações equivalentes da mecânica clássica no Sistema Internacional de Unidades com as cargas medidas em coulombs, se tivermos

$$\frac{H_e}{\Phi_\infty} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \ . \tag{17.18}$$

Vamos supor que esta relação seja válida daqui por diante.

[1] [Sch25], [XA94] e [Sch95], [Sci53], [Bro55] e [Bro82, pág. 57], [Dic59], [Fre71, Cap. 12: Inertial Forces and Noninertial Frames], [Edw74], [Eby77], [Ass89a], [Ass98, Seções 8.3 e 11.4] e [Ass99a, Seções 8.5 e 11.4].

[2] [Ass01], [Ass03a] e [Ass04].

Como Φ_∞ dado pela equação (16.41) é proporcional a H_g, podemos obter o valor de H_e/H_g a partir das equações (17.8) e (17.18):

$$\frac{H_e}{H_g} = \frac{1}{G}\frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \ . \tag{17.19}$$

O mesmo acontece com as outras forças. Por exemplo, a força elástica na mecânica relacional é escrita como a equação (2.6) da mecânica clássica, mas com uma constante elástica K em vez de k:

$$\vec{F} = -K(\ell - \ell_o)\hat{x} = -Kx\hat{x} \ . \tag{17.20}$$

Supondo que o corpo de prova esteja interagindo elasticamente com esta mola e gravitacionalmente com as galáxias distantes, a equação (16.64) fornece:

$$-Kx\hat{x} - \Phi_\infty m_{gk}\vec{a}_{kU} = \vec{0} \ . \tag{17.21}$$

Esta equação vai fornecer os mesmos valores que a equação (7.2) se tivermos

$$\frac{K}{\Phi_\infty} = k \ , \tag{17.22}$$

onde k é a constante usual da mola no Sistema Internacional de Unidades. Daqui por diante vamos assumir que esta relação seja válida.

Como Φ_∞ dado pela equação (16.41) é proporcional a H_g, podemos obter o valor de K/H_g a partir das equações (17.8) e (17.22):

$$\frac{K}{H_g} = \frac{k}{G} \ . \tag{17.23}$$

A força de atrito exercida por um fluido sobre o corpo de prova quando há um movimento relativo entre eles é escrita na mecânica relacional como a equação (2.8), só que com B_0, B_1 e B_2 no lugar das constantes b_0, b_1 e b_2 da mecânica clássica, respectivamente, ou seja:

$$\vec{F} = -(B_0 + B_1 r v_r + B_2\rho_f r^2 v_r^2)\hat{v}_r \ . \tag{17.24}$$

Supondo que o corpo esteja interagindo com este fluido e também esteja interagindo gravitacionalmente com as galáxias distantes, a equação (16.64) fornece:

$$-(B_0 + B_1 r v_r + B_2\rho_f r^2 v_r^2)\hat{v}_r - \Phi_\infty m_{gk}\vec{a}_{kU} = \vec{0} \ . \tag{17.25}$$

Esta equação vai fornecer os mesmos valores para a velocidade e aceleração do corpo na mecânica clássica no Sistema Internacional de Unidades se tivermos

$$\frac{B_0}{\Phi_\infty} = b_0 \ , \quad \frac{B_1}{\Phi_\infty} = b_1 \ , \quad \frac{B_2}{\Phi_\infty} = b_2 \ . \tag{17.26}$$

Daqui por diante vamos assumir que estas relações sejam válidas.

Com as equações (17.8) e (17.26) obtém-se:

$$\frac{B_0}{\Phi_\infty} = \frac{b_0}{G} \ , \quad \frac{B_1}{\Phi_\infty} = \frac{b_1}{G} \ , \quad \frac{B_2}{\Phi_\infty} = \frac{b_2}{G} \ . \tag{17.27}$$

Vamos assumir que as equações (17.8) até (17.27) são válidas, o mesmo acontecendo quando comparamos as outras forças de interação da mecânica relacional com as forças análogas da mecânica clássica. Isto é, se na mecânica clássica temos uma constante δ em alguma lei de força, a mesma equação será escrita na mecânica relacional com a constante Δ no lugar de δ. Além disso, assumimos que $\Delta/\Phi_\infty = \delta$.

As principais diferenças conceituais entre a mecânica relacional e a mecânica clássica ocorrem quando os corpos de prova estão acelerados em relação ao referencial universal U. Nos casos em que não ocorrem estas acelerações, temos $\vec{a}_{pU} = \vec{0}$, onde $\vec{a}_{pU}$ é a aceleração do corpo p em relação ao referencial universal. Para expressar todas as forças da mecânica relacional no Sistema Internacional de Unidades, inclusive a força peso, fica mais simples impor que H_g é dado pelo valor da contante G da mecânica clássica:

$$H_g = G \ . \tag{17.28}$$

Usando o valor de α obtido na equação (17.10), juntamente com a definição de Φ_∞ dada pela equação (16.41), obtém-se então:

$$\Phi_\infty = \frac{4\pi G \rho_{go} \xi}{3c^2 \alpha^2} = 1 \ . \tag{17.29}$$

Com isto todas as constantes Δ que aparecem na mecânica relacional (tais como H_e, K, B_0, B_1, B_2, ...) podem ser escritas diretamente como as constantes δ equivalentes da mecânica clássica (tais como $1/(4\pi\varepsilon_o)$, k, b_0, b_1, b_2, ...) Esta suposição será adotada daqui por diante.

As suposições expressas pelas equações (17.28) e (17.29) simplificam a transição da mecânica relacional para a mecânica newtoniana. Elas também simplificam a comparação entre estas duas teorias. Por este motivo estas suposições serão adotadas daqui por diante. Mas deve ser lembrado que não se pode obter o valor de H_g na mecânica relacional, já que só é possível obter a razão entre duas forças nesta teoria, não se sabendo o valor absoluto de nenhuma força específica.

Utilizando as equações (17.11), (17.28) e (17.29), obtém-se que a energia inercial U_i e a força inercial $\vec{F}_i$ no referencial universal U, dadas pelas equações (16.40) e (16.43), passam a ser escritas nas seguintes formas bem simples:

$$U_i = -\frac{4\pi H_g m_g \rho_{go}}{\alpha^2} + \Phi_\infty m_g \frac{\vec{v}_{mU} \cdot \vec{v}_{mU}}{2} = -m_g \frac{c^2}{2} + m_g \frac{\vec{v}_{mU} \cdot \vec{v}_{mU}}{2} \ , \tag{17.30}$$

e

$$\vec{F}_i = -\Phi_\infty m_g \vec{a}_{mU} = -m_g \vec{a}_{mU} \ . \tag{17.31}$$

Da mesma forma, utilizando as equações (17.28) e (17.29), obtém-se que a energia potencial gravitacional, a força gravitacional, a energia potencial elétrica e a força elétrica da mecânica relacional dadas pelas equações (16.17), (16.18), (16.13) e (16.11) passam a ser escritas como:

$$U_{12} = -G \frac{m_{g1} m_{g2}}{r_{12}} \left(1 - \xi \frac{\dot{r}_{12}^2}{2c^2} \right) e^{-\alpha r_{12}} \ , \tag{17.32}$$

$$\vec{F}_{21} = -G m_{g1} m_{g2} \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \left[1 - \frac{\xi}{c^2} \left(\frac{\dot{r}_{12}^2}{2} - r_{12}\ddot{r}_{12} \right) + \alpha r_{12} \left(1 - \frac{\xi}{2} \frac{\dot{r}_{12}^2}{c^2} \right) \right] e^{-\alpha r_{12}} = -\vec{F}_{12} \ , \tag{17.33}$$

$$U_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{q_1 q_2}{r_{12}} \left(1 - \frac{\dot{r}_{12}^2}{2c^2} \right) \ , \tag{17.34}$$

e

$$\vec{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_o} \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \left(1 - \frac{\dot{r}_{12}^2}{2c^2} + \frac{r_{12}\ddot{r}_{12}}{c^2} \right) = -\vec{F}_{12} \ . \tag{17.35}$$

Além disso, se estivermos lidando com a interação gravitacional entre dois corpos que pertencem ao sistema solar, teremos que a distância $r = r_{12}$ entre eles será no máximo da ordem da distância entre o Sol e plutão, ou seja, aproximadamente 10^{13} m. Pela equação (17.12) tem-se que α é da ordem de 10^{-27} m^{-1}, tal que $r\alpha$ é no máximo da ordem de 10^{-14}, que é um valor muito menor do que 1. Teremos então $e^{-\alpha r} \approx 1$. Isto significa que em geral a energia potencial gravitacional e a força gravitacional entre estes dois corpos, em vez de serem dadas pelas equações (17.32) e (17.33), vão ser dadas pela energia potencial e força de Weber gravitacionais dadas pelas equações (16.15) e (16.16), com G no lugar de H_g, a saber:

$$U_{12} = -G \frac{m_{g1} m_{g2}}{r_{12}} \left(1 - \xi \frac{\dot{r}_{12}^2}{2c^2} \right) \ , \tag{17.36}$$

e

$$\vec{F}_{21} = -G m_{g1} m_{g2} \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \left[1 - \frac{\xi}{c^2} \left(\frac{\dot{r}_{12}^2}{2} - r_{12}\ddot{r}_{12} \right) \right] = -\vec{F}_{12} \ . \tag{17.37}$$

Além disso, se o movimento relativo entre os corpos for tal que $\dot{r}_{12}^2/c^2 \ll 1$ e $|r_{12}\ddot{r}_{12}|/c^2 \ll 1$, estas equações (17.34) até (17.37) ficarão idênticas às energias potenciais e às forças newtoniana e coulombiana, a saber:

$$U_{12} = -G \frac{m_{g1} m_{g2}}{r_{12}} \ , \tag{17.38}$$

$$\vec{F}_{21} = -Gm_{g1}m_{g2}\frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} = -\vec{F}_{12} \ . \tag{17.39}$$

$$U_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_1 q_2}{r_{12}} \ , \tag{17.40}$$

e

$$\vec{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} = -\vec{F}_{12} \ . \tag{17.41}$$

Deve ser enfatizado mais uma vez aqui que é convencional a suposição dada pelas equações (17.28) e (17.29), já que na mecânica relacional só é possível determinar a razão entre duas forças, mas não o valor de uma força qualquer. Embora a equação (17.28) seja uma suposição arbitrária, será adotada aqui para simplificar a representação das forças nos casos em que os corpos de prova não estão acelerados em relação ao referencial universal U. Esta suposição faz com que o valor de Φ_∞ seja igual a 1, equação (17.29). Apesar disto, vamos continuar escrevendo Φ_∞ nas equações em que houver uma aceleração do corpo de prova em relação ao referencial universal para enfatizar o papel fundamental exercido pelas galáxias distantes na origem das forças inerciais.

17.3 Conservação do Momento Linear

Vamos supor que temos um conjunto de N partículas interagindo entre si, além de interagirem gravitacionalmente com as galáxias distantes. Seja O a origem do referencial universal U no qual o conjunto das galáxias está em repouso. Vamos representar o vetor posição de uma partícula p em relação à origem de U como sendo $\vec{r}_{pU}$, com $\vec{v}_{pU} \equiv d\vec{r}_{pU}/dt$ e $\vec{a}_{pU} \equiv d\vec{v}_{pU}/dt = d^2\vec{r}_{pU}/dt^2$ sendo sua velocidade e aceleração em relação ao referencial U, figura 17.2, com $p = 1, ..., N$. A massa gravitacional dessa partícula será representada por m_{gp}.

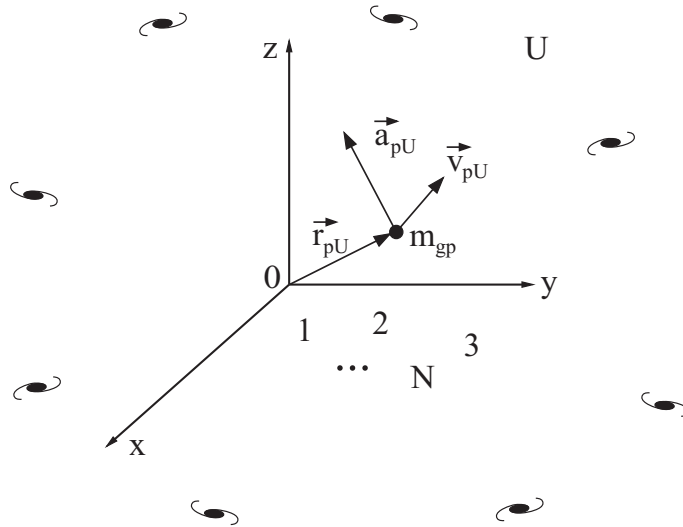



Figura 17.2: Vetor posição, velocidade e aceleração de uma partícula p em relação à origem O do referencial universal U.

Define-se o momento linear total $\vec{p}_t$ deste sistema de partículas no referencial universal por:

$$\vec{p}_t \equiv \sum_{p=1}^{N} m_{gp}\vec{v}_{pU} \ . \tag{17.42}$$

Derivando o momento linear total em relação ao tempo e usando a equação de movimento da mecânica relacional no referencial U dada pela equação (16.64) obtém-se, supondo massas gravitacionais constantes:

$$\frac{d\vec{p}_t}{dt} = \sum_{p=1}^{N} m_{gp}\vec{a}_{pU} = m_{g1}\vec{a}_{1U} + m_{g2}\vec{a}_{2U} + ... + m_{gN}\vec{a}_{NU} = \frac{1}{\Phi_\infty}\left[\sum_{\substack{p=1\\p\neq 1}}^{N}\vec{F}_{p1} + \sum_{\substack{p=1\\p\neq 2}}^{N}\vec{F}_{p2} + ... + \sum_{\substack{p=1\\p\neq N}}^{N}\vec{F}_{pN}\right]$$

$$= \frac{1}{\Phi_\infty}\left[\left(\vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + ... + \vec{F}_{N1}\right) + \left(\vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} + ... + \vec{F}_{N2}\right) + ... + \left(\vec{F}_{1N} + \vec{F}_{2N} + ... + \vec{F}_{N-1,\ N}\right)\right] . \tag{17.43}$$

Supondo que as forças entre cada par de partículas satisfaçam ao princípio de ação e reação dado pela equação (16.1), teremos, para todo par de partículas pq pertencente a este conjunto de N corpos:

$$\vec{F}_{pq} = -\vec{F}_{qp} . \tag{17.44}$$

A equação (17.44) faz com que a soma do lado direito da equação (17.43) se anule. Ou seja, o momento linear total deste sistema de partículas não varia ao longo do tempo, não importando as distâncias entre as partículas:

$$\vec{p}_t = \text{constante no tempo} . \tag{17.45}$$

Ou seja, o momento linear total de um sistema de partículas em relação ao referencial universal U é conservado na mecânica relacional quando a força entre cada par de partículas satisfaz ao princípio de ação e reação dado pela equação (17.44).

17.4 Conservação do Momento Angular

Consideramos aqui a mesma situação da Seção 17.3. Define-se o momento angular total deste sistema de N partículas em relação ao referencial universal U por:

$$\vec{L}_t \equiv \sum_{p=1}^{N}\vec{r}_p \times (m_{gp}\vec{v}_{pU}) . \tag{17.46}$$

Derivando o momento angular total em relação ao tempo obtém-se, supondo massas constantes e usando que $\vec{v}_{pU} \times \vec{v}_{pU} = \vec{0}$:

$$\frac{d\vec{L}_t}{dt} = \sum_{p=1}^{N}\vec{r}_p \times (m_{gp}\vec{a}_{pU}) = \vec{r}_1 \times m_{g1}\vec{a}_{1U} + \vec{r}_2 \times m_{g2}\vec{a}_{2U} + ... + \vec{r}_N \times m_{gN}\vec{a}_{NU} . \tag{17.47}$$

Usando a equação (17.47) juntamente com a equação de movimento da mecânica relacional no referencial U dada pela equação (16.64) obtém-se:

$$\frac{d\vec{L}_t}{dt} = \frac{1}{\Phi_\infty}\left[\vec{r}_1 \times \left(\vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + ... + \vec{F}_{N1}\right) + \vec{r}_2 \times \left(\vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} + ... + \vec{F}_{N2}\right)\right.$$

$$\left. + ... + \vec{r}_N \times \left(\vec{F}_{1N} + \vec{F}_{2N} + ... + \vec{F}_{N-1,\ N}\right)\right] . \tag{17.48}$$

Usando a equação (17.44) na equação (17.48) obtém-se, com $\vec{r}_{pq} \equiv \vec{r}_p - \vec{r}_q$:

$$\frac{d\vec{L}_t}{dt} = \frac{1}{\Phi_\infty}\left[\vec{r}_{12} \times \vec{F}_{21} + \vec{r}_{13} \times \vec{F}_{31} + ... + \vec{r}_{N-1,\ N} \times \vec{F}_{N,\ N-1}\right] . \tag{17.49}$$

Vamos supor agora que as forças entre cada par de partículas satisfaça ao princípio de ação e reação na forma forte. Isto é, a força $\vec{F}_{pq}$ exercida pela partícula p sobre a partícula q é não apenas igual e oposta à força de q sobre p, equação (17.44), mas está ao longo da reta unindo p com q, equação (16.2):

$$\vec{F}_{pq} \text{ aponta ao longo de } \hat{r}_{pq} . \tag{17.50}$$

A suposição (17.50) faz com que o lado direito da equação (17.49) se anule, levando à seguinte consequência:

$$\vec{L}_t = \text{constante no tempo} . \tag{17.51}$$

Ou seja, o momento angular total de um sistema de partículas em relação ao referencial universal é conservado na mecânica relacional quando a força entre cada par de partículas satisfaz ao princípio de ação e reação na forma forte dado pelas equações (17.44) e (17.50).

17.5 Centro de Massa Gravitacional

Seja o sistema de N partículas descrito na Seção 17.3. Define-se a posição do vetor centro de massa gravitacional $\vec{r}^{\,g}_{cmU}$ e a velocidade $\vec{v}^{\,g}_{cmU}$ do centro de massa gravitacional deste sistema em relação à origem O do referencial universal U como sendo dadas por, respectivamente:

$$\vec{r}^{\,g}_{cm} \equiv \sum_{p=1}^{N} \frac{m_{gp}\vec{r}_{pU}}{m_{gt}} , \tag{17.52}$$

e

$$\vec{v}^{\,g}_{cm} \equiv \frac{d\vec{r}^{\,g}_{cm}}{dt} = \sum_{p=1}^{N} \frac{m_{gp}\vec{v}_{pU}}{m_{gt}} . \tag{17.53}$$

Nestas equações define-se $m_{gt} \equiv \sum_{p=1}^{N} m_{gp}$ como sendo a massa gravitacional total do sistema.

Com estas definições obtém-se que o momento linear total $\vec{p}_t$ deste sistema de partículas no referencial universal U, dado pela equação (17.42), pode ser escrito como:

$$\vec{p}_t = \sum_{p=1}^{N} m_{gp}\vec{v}_{pU} = m_{gt}\frac{d\vec{r}^{\,g}_{cm}}{dt} = m_{gt}\vec{v}^{\,g}_{cm} . \tag{17.54}$$

17.6 Universo Com ou Sem Expansão

17.6.1 Interpretações da Lei de Hubble

O modelo cosmológico mais aceito hoje em dia é o de que o universo surgiu a partir do vazio há um tempo finito no passado, estando desde então se expandindo. Este modelo cosmológico passou a ser denominado jocosamente em língua inglesa de *big bang* por Fred Hoyle (1915-2001), um dos mais ácidos críticos desta teoria, ao referir-se à ideia de um universo "explosivo" durante um programa radiofônico da BBC. A tradução usualmente utilizada em língua portuguesa, *grande explosão*, é insatisfatória por trair o espírito com que o termo foi cunhado. Neste livro traduzimos a expressão inglesa *big bang* por *estrondão*, seguindo a sugestão de Soares.[3]

Estas ideias de expansão do universo e do estrondão surgiram ao se interpretar a lei de 1929 de Hubble do desvio da luz das galáxias em direção ao vermelho como sendo devida a um efeito Doppler relacionado com a recessão entre as galáxias. O próprio Hubble fez esta interpretação em seu artigo original de 1929.[4] Logo em seguida ele próprio passou a duvidar desta interpretação, referindo-se a uma velocidade de recessão "aparente" entre as galáxias. Desde então e até o fim de sua vida passou a defender a ideia de que o desvio para o vermelho cosmológico podia ser devido a um novo princípio da natureza que não estivesse relacionado com o movimento de afastamento entre as galáxias.[5] Ao analisar a obra de Hubble conclui-se que ela teve duas fases, como analisado detalhadamente por Assis, Neves e Soares em um trabalho no qual são apresentadas diversas citações das obras de Hubble.[6] Na primeira fase ele defendeu um universo finito em expansão. Logo em seguida mudou de ponto de vista. Passou então a defender nesta segunda fase a ideia de um universo infinito no espaço e no tempo, sem expansão.

Nosso próprio ponto de vista é de que o desvio para o vermelho cosmológico (relacionado com a lei de Hubble) é devido a alguma interação da luz durante sua jornada desde uma galáxia distante até a Terra. Esta interação ocorreria entre a luz e o meio intergaláctico. A luz perderia energia para o meio, fazendo

[3] [Soa02].
[4] [Hub29].
[5] [HT35], [Hub37, págs. 29-30, 49 e 63-66], [Hub42] e [Hub58, págs. 3, 88-89, 104, 121-123 e 193-197].
[6] [ANS08] e [ANS09].

com que sua frequência seja desviada em direção à extremidade vermelha do espectro luminoso. Ou seja, defendemos que o desvio para o vermelho cosmológico não é devido a um efeito Doppler. Portanto, ele não estaria relacionado com a recessão entre as galáxias. Um modelo que explica o desvio para o vermelho cosmológico como sendo devido a alguma interação da luz com o meio intergaláctico é denominado usualmente na literatura de "modelo da luz cansada." Ou seja, achamos que este desvio para o vermelho tem sua origem em uma interação física entre a luz das galáxias e o meio intergaláctico. Isto é, acreditamos que o principal responsável por este desvio é a perda progressiva da energia do fóton à medida em que ele vai interagindo com o meio intergaláctico. Com esta suposição, deduz-se facilmente a lei de Hubble sem ter de impor que ela seja devida a um efeito Doppler.[7] Ainda não estamos certos qual o tipo de mecanismo está atuando neste caso (interação fóton-fóton, colisão inelástica entre fótons e elétrons livres, colisão entre fótons e átomos, interação entre a luz e as moléculas ou íons do meio intergaláctico, etc.). Apesar disto já exploramos esta possibilidade em diversos artigos.[8] Nestes trabalhos se encontram várias referências adicionais de diversos outros autores trabalhando ao longo das mesmas linhas de pesquisa. Nosso trabalho em seus aspectos principais é uma continuação do que foi feito por Erich R. A. Regener (1881-1955), Walther Nernst (1864-1941), Finlay-Freundlich (1885-1964), Max Born (1882-1970) e Louis de Broglie (1892-1987) sobre uma cosmologia de equilíbrio sem expansão.[9]

Como não há expansão neste modelo, ele não necessita de uma criação contínua de matéria, como acontecia no modelo de estado estacionário de Hoyle, Narlikar e Gold (steady-state cosmology). Nosso modelo é o de um universo em equilíbrio dinâmico, sem expansão e sem criação contínua de matéria. Deve ser enfatizado aqui que Nernst (pai da terceira lei da termodinâmica e prêmio Nobel) assim como Louis de Broglie (um dos fundadores da mecânica quântica e prêmio Nobel) nunca aceitaram a ideia do estrondão, preferindo sempre um modelo de universo em equilíbrio dinâmico sem expansão. Concordamos plenamente com eles neste sentido. Existem diversos trabalhos analisando desenvolvimentos recentes e enfoques diferentes sobre estes modelos de um universo em equilíbrio dinâmico, sem expansão.[10]

17.6.2 Interpretações sobre a Radiação Cósmica de Fundo com uma Temperatura de $2,7\ K$

É importante discutir aqui brevemente sobre a radiação cósmica de fundo (RCF ou CBR, ver a Subseção 9.1.4). Esta é uma radiação do tipo da radiação de um corpo negro com uma temperatura característica de 2,7 K.[11] Em geral afirma-se que ela é uma prova do estrondão e da expansão do universo, já que teria sido prevista por Gamow e por seus colaboradores antes de sua descoberta em 1965 por Penzias e Wilson.[12] Fizemos uma pesquisa bibliográfica e encontramos algo bem diferente do que em geral se afirma na literatura.[13] O ponto principal é que as previsões publicadas desta temperatura que encontramos feitas por Gamow e colaboradores (baseadas no estrondão) foram de 5 K em 1948, $> 5\ K$ em 1949, 7 K em 1953 e 50 K em 1961.[14] Ou seja, foram sempre crescentes e cada vez se afastando mais do valor encontrado em 1965 por Penzias e Wilson.

Por outro lado, encontramos diversas previsões ou estimativas desta temperatura baseadas em um universo estacionário e sem expansão, sempre variando entre 2 K e 6 K. Além disto, uma das estimativas foi feita em 1896 por Guillaume, portanto, anterior ao nascimento de Gamow em 1904. Charles Edouard Guillaume (1861-1928) foi um físico suíço que recebeu o prêmio Nobel em 1920 pela melhor na precisão de medições na física e pela descoberta de anomalias em ligas de aço-níquel. Estas previsões e estimativas são as seguintes: $5\ K < T < 6\ K$ (Guillaume em 1896), $3,1\ K$ (Eddington em 1926), $2,8\ K$ (Regener e Nernst entre 1933 e 1938), $2,3\ K$ (Herzberg em 1941 baseado em medidas de McKellar) e $1,9\ K < T < 6,0\ K$ (Finlay-Freundlich e Max Born entre 1953 e 1954).[15]

Nossa conclusão é que a descoberta da RCF por Penzias e Wilson em 1965 é um fator decisivo em favor do modelo de um universo em equilíbrio dinâmico, sem expansão. Ou seja, a descoberta da radiação cósmica de fundo é um forte argumento *contra* o modelo do estrondão.

---

[7] [Ass92f].

[8] [Ass92f], [Ass92e], [Ass93c], [NA95] e [AN95b].

[9] [Reg33] com tradução para a língua inglesa em [Reg95], [Ner37] e [Ner38] com traduções para a língua inglesa em [Ner95a] e [Ner95b], [FF53], [FF54a], [FF54b], [Bor53], [Bor54] e [dB66].

[10] [Reb77], [Reb86], [MR89], [Gho84], [Gho86], [Gho93], [LaV86], [Gen88], [Jaa91], [Mon96], etc.

[11] Um mapa celeste da RCF pode ser encontrado em [LVES85] e [LV86].

[12] [PW65].

[13] [Ass92e], [Ass93c], [AN95a] e [AN95b].

[14] [AH48], [AH49], [FF54b] e [Gam61].

[15] [Gui96] com tradução parcial para a língula inglesa em [AN95a], [Edd88], [Reg33] com tradução para a língua inglesa em [Reg95], [Ner37] e [Ner38] com traduções para a língua inglesa em [Ner95a] e [Ner95b], [Her41, pág. 496], [FF53], [FF54a], [FF54b], [Bor53], [Bor54], [AN95a] e [AN95b].

17.6.3 Nosso Modelo Cosmológico

Nosso modelo cosmológico é aquele de um universo homogêneo, sem fronteiras espaciais ou temporais. Ou seja, um universo com uma densidade média de massa gravitacional constante ao longo de todo o universo, além de esta densidade ser constante ao longo do tempo. Esta densidade média ρ_{go} tem um valor finito diferente de zero. Este universo é infinito no espaço e no tempo. Além disso, ele não está em expansão e não há criação contínua de matéria.

Ao calcular a força inercial atuando sobre um corpo de prova, com esta força sendo devida às distribuições isotrópicas de matéria ao seu redor, temos de integrar por todo o universo, a força exercida por uma casca esférica de raio R ao atuar sobre uma partícula interna à casca. Devido ao modelo cosmológico que assumimos, preferimos integrar esta força com o raio R indo de zero até o infinito, utilizando as equações (16.38) e (16.39), em vez de integrar a força exercida por uma casca esférica com R indo de zero até um raio finito R_U.

Para nós tanto a grandeza α que aparece nas equações (16.38) e (16.39), assim como todas as outras grandezas tais como c, ξ, G e ρ_{go}, são de fato constantes. Ou seja, todas estas grandezas não variam ao longo do tempo.

17.7 Implementação das Ideias de Einstein

Vimos, na Seção 15.3, que em 1922 Einstein apontou quatro consequências que deviam ser implementadas em qualquer teoria incorporando o princípio de Mach:

1. A inércia de um corpo deve aumentar caso se acumulem na sua vizinhança massas ponderáveis.

2. Um corpo deve sofrer uma força aceleradora quando massas vizinhas são aceleradas. Além disso, a força deve ser do mesmo sentido que a aceleração.

3. Um corpo oco animado de um movimento de rotação deve produzir no seu interior um 'campo de Coriolis' que faz com que corpos em movimento sejam desviados no sentido da rotação; deve ainda produzir um campo de forças centrífugas radial.

4. Um corpo em um universo vazio não deve ter inércia; ou toda a inércia de qualquer corpo tem de vir de sua interação com outras massas no universo.

Estas quatro consequências não são completamente implementadas na teoria da relatividade geral de Einstein, como já analisamos na Seção 15.3. Mostramos aqui que todas elas são obtidas exatamente na mecânica relacional.[16]

17.7.1 Aumento da Inércia de um Corpo ao Colocá-lo no Interior de uma Casca Esférica

Começamos com a primeira consequência. Vamos supor um corpo k de massa gravitacional m_{gk} interagindo com uma distribuição anisotrópica de matéria e com as distribuições isotrópicas de galáxias distantes ao seu redor. A força exercida por esta distribuição anisotrópica de matéria composta de N corpos (entre eles o corpo k) é representada por $\vec{F}_{ak} \equiv \vec{F}_a = \sum_{\substack{p=1 \\ p\neq k}}^{N} \vec{F}_{pk}$. Entre estes N corpos podemos ter a Terra, uma mola, um ímã, diversas outras massas gravitacionais, etc. Esta situação está representada na figura 17.3.

Como já vimos, neste caso a equação de movimento da mecânica relacional no referencial U é dada pela equação (16.64), a saber:

$$\sum_{\substack{p=1 \\ p\neq k}}^{N} \vec{F}_{pk} - \Phi_\infty m_{gk}\vec{a}_{kU} = \vec{0} \ , \tag{17.55}$$

onde $\vec{a}_{kU}$ é a aceleração de m_{gk} em relação ao sistema de referência universal (aquele em relação ao qual o conjunto das galáxias distantes é visto sem aceleração angular ou translacional, em repouso). Esta equação da mecânica relacional é análoga à segunda lei de Newton da mecânica clássica, equação (1.5). Podemos colocá-las na mesma forma definindo na mecânica relacional uma massa inercial efetiva m_{ik} pela seguinte expressão: $m_{ik} \equiv \Phi_\infty m_{gk}$.

De acordo com a equação (17.55), a aceleração do corpo k em relação ao referencial universal é dada por:

[16] [Ass93b] e [Ass94, Capítulo 7].

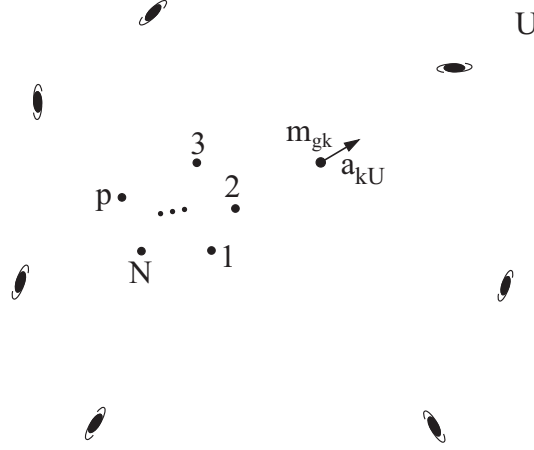



Figura 17.3: Corpo de prova k interagindo com outros $N-1$ corpos locais, além de estar interagindo com as galáxias distantes.

$$\vec{a}_{kU} = \frac{\sum_{\substack{p=1 \\ p\neq k}}^{N} \vec{F}_{pk}}{\Phi_{\infty} m_{gk}} \ . \tag{17.56}$$

Cercamos agora o corpo de prova por uma casca esférica em repouso e sem rotação em relação ao referencial universal U. Supomos que esta casca tem um raio R, uma espessura dR e uma densidade de massa gravitacional isotrópica ρ_g. A massa desta casca é dada então por $M_g = 4\pi R^2 dR \rho_g$, figura 17.4.

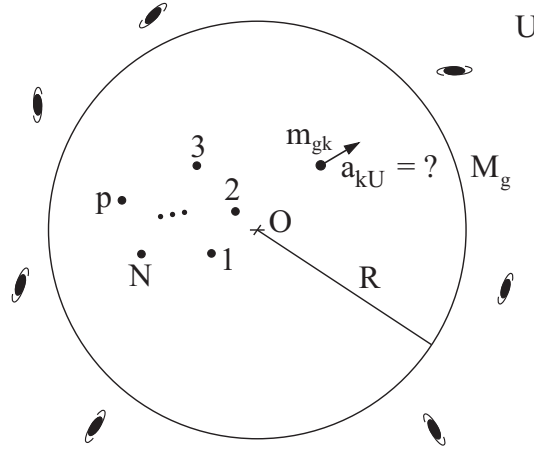



Figura 17.4: Mesma situação da figura 17.3, mas agora com o corpo de prova cercado por uma casca esférica.

Aplicamos então neste segundo caso o terceiro postulado da mecânica relacional, o princípio de equilíbrio dinâmico, que afirma que a soma de todas as forças atuando sobre m_{gk} é nula, equação (16.64). Aplicando este princípio juntamente a equação (16.22) expressando a força gravitacional exercida por esta casca esférica sobre m_{gk} resulta em:

$$\sum_{\substack{p=1 \\ p\neq k}}^{N} \vec{F}_{pk} - H_g \frac{\xi}{3c^2} \frac{m_{gk} M_g}{R} \vec{a}_{kU} - \Phi_{\infty} m_{gk} \vec{a}_{kU} = \vec{0} \ . \tag{17.57}$$

Esta equação também pode ser escrita como, usando a equação (17.8):

$$\sum_{\substack{p=1 \\ p\neq k}}^{N} \vec{F}_{pk} - \Phi_{\infty} m_{gk} \left(1 + G \frac{\xi}{3c^2} \frac{M_g}{R} \right) \vec{a}_{kU} = \vec{0} \ . \tag{17.58}$$

A nova aceleração do corpo em relação ao referencial universal é dada por:

$$\vec{a}_{kU} = \frac{\sum_{\substack{p=1 \\ p\neq k}}^{N} \vec{F}_{pk}}{\Phi_\infty m_{gk}[1 + G\xi M_g/(3c^2 R)]} \ . \tag{17.59}$$

Esta aceleração é menor do que a aceleração dada pela equação (17.56).

A equação (17.58) da mecânica relacional pode ser escrita de forma análoga à segunda lei do movimento de Newton, equação (1.5), a saber, $\sum_{\substack{p=1 \\ p\neq k}}^{N} \vec{F}_{pk} = m_{ik}\vec{a}_k$. Para escrevê-la desta forma basta definir uma "massa inercial efetiva" m_{ik} pela seguinte expressão:

$$m_{ik} \equiv \Phi_\infty m_{gk} \left(1 + G\frac{\xi}{3c^2}\frac{M_g}{R} \right) \ . \tag{17.60}$$

Com esta definição a equação (17.58) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\sum_{\substack{p=1 \\ p\neq k}}^{N} \vec{F}_{pk} = m_{ik}\vec{a}_{kU} \ . \tag{17.61}$$

Isto mostra que a inércia de um corpo tem de crescer quando matéria ponderável é colocada ao seu redor, como requer o princípio de Mach e como corretamente apontado por Einstein. Ou seja, ao cercar o corpo de prova por uma casca esférica de massa gravitacional M_g, o corpo de prova passa a se comportar como tendo uma massa inercial efetiva maior do que a massa inercial efetiva que ele tinha quando não estava cercado pela casca esférica. Em particular, caso ele sofresse uma aceleração $\vec{a}_{kU}$ ao interagir com $N-1$ corpos ao seu redor e ao interagir com as galáxias distantes, sua nova aceleração diminuirá ao ser envolvido pela casca esférica, como indicado pela equação (17.59).

Na mecânica clássica uma casca esférica não exerce força sobre partículas internas a ela, equação (1.11). Também na relatividade geral de Einstein uma casca esférica parada não exerce força sobre partículas internas a ela, equação (15.4). Isto significa que tanto na mecânica clássica quanto na relatividade geral a inércia de um corpo não é aumentada quando se coloca uma casca esférica parada ao redor do corpo de prova. Embora Einstein quisesse implementar esta característica do princípio de Mach, este efeito não ocorre na sua relatividade geral, assim como não ocorre na mecânica newtoniana. Apenas a mecânica relacional implementa esta consequência do princípio de Mach.

Na Subseção 23.5.1 será mostrado como testar experimentalmente esta previsão da mecânica relacional.

17.7.2 Corpo Acelerado Exercendo uma Força sobre um Outro Corpo

Analisamos agora a segunda consequência mencionada na Seção 17.7. Vamos mostrar de duas formas diferentes que esta segunda consequência apontada por Einstein é implementada na mecânica relacional.

Consideramos inicialmente para simplificar a análise um movimento unidimensional. O referencial do papel coincide com o referencial universal U das galáxias distantes. Temos duas massas gravitacionais m_{g1} e m_{g2} interagindo por uma força de Weber, equação (16.16). Consideramos os corpos 1 e 2 localizados nas posições x_1 e x_2, respectivamente, ao longo do eixo x. Supomos $x_1 < x_2$, de tal forma que $\hat{r}_{12} = -\hat{x}$, ver a figura 17.5. As velocidades e acelerações destes corpos em relação ao referencial universal U serão dadas por, respectivamente: $\vec{v}_1 = \dot{x}_1\hat{x}$, $\vec{v}_2 = \dot{x}_2\hat{x}$, $\vec{a}_1 = \ddot{x}_1\hat{x}$ e $\vec{a}_2 = \ddot{x}_2\hat{x}$.

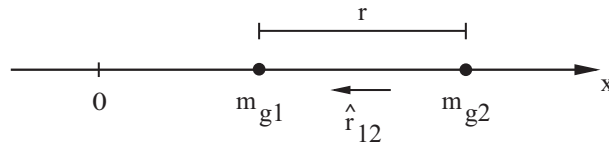



Figura 17.5: Duas massas interagindo ao longo do eixo x.

Simplificamos a notação utilizando que $r_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = |x_1 - x_2| \equiv r$. Além disso, $\vec{r}_{12} = (x_1 - x_2)\hat{x}$, $\vec{v}_{12} = (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)\hat{x}$ e $\vec{a}_{12} = (\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2)\hat{x}$. Isto significa que $\dot{r}_{12} = \hat{r}_{12} \cdot \vec{v}_{12} = -(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$ e também que $r_{12}\ddot{r}_{12} = \vec{v}_{12} \cdot \vec{v}_{12} - (\hat{r}_{12} \cdot \vec{v}_{12})^2 + \vec{r}_{12} \cdot \vec{a}_{12} = (x_1 - x_2)(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2)$. A força gravitacional weberiana exercida por 2 sobre 1, equação (16.16), fica então dada por:

$$\vec{F}_{21} = + \ H_g m_{g1} m_{g2} \frac{\hat{x}}{r^2} \left\{ 1 - \frac{\xi}{c^2} \left[\frac{(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2}{2} - (x_1 - x_2)(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) \right] \right\} \ . \tag{17.62}$$

Isto significa que se a massa gravitacional m_{g2} é acelerada para a direita ($\ddot{x}_2 > 0$), vai haver uma componente da força atuando sobre m_{g1} proporcional a $\ddot{x}_2$, a saber:

$$\frac{H_g m_{g1} m_{g2} \xi (x_2 - x_1) \ddot{x}_2 \hat{x}}{c^2 r^2} \ . \tag{17.63}$$

Como $\xi > 0$ e $(x_2 - x_1) > 0$, esta força aponta para a direita, isto é, na mesma direção da aceleração de m_{g2}. Além disso, esta força é proporcional à aceleração $\ddot{x}_2$ entre os dois corpos que estão interagindo.

Se a massa gravitacional m_{g2} fosse acelerada para a esquerda, também apareceria uma força sobre 1 apontando para a esquerda, sendo proporcional a $\ddot{x}_2$.

Ou seja, o corpo 1 sofre uma força aceleradora quando o corpo 2 é acelerado. Além disso, esta força aponta no mesmo sentido da aceleração do corpo 2. Einstein havia apontado que qualquer teoria implementando o princípio de Mach deveria satisfazer a esta condição. Vemos então que esta consequência é implementada na mecânica relacional com uma força de Weber gravitacional.

Uma outra situação que mostra este efeito está ilustrada na figura 16.3. Ou seja, temos uma casca esférica de raio R e massa gravitacional M_g que tem uma aceleração $\vec{A}_{MA}$ em relação a um referencial A. Uma partícula de massa gravitacional m_g está em seu interior, tendo uma aceleração $\vec{a}_{mA}$ no referencial A. De acordo com a mecânica relacional, a força gravitacional exercida por esta casca sobre a partícula é dada pela equação (16.26), a saber:

$$\vec{F}_{casca\ acelerada}(r_{mA} < R) = -\frac{H_g \xi m_g M_g}{3Rc^2}(\vec{a}_{mA} - \vec{A}_{MA}) \ . \tag{17.64}$$

Há uma componente nesta força dada por $H_g \xi m_g M_g \vec{A}_{MA}/(3Rc^2)$. Esta componente aponta na direção da aceleração da casca esférica, sendo proporcional a esta aceleração.

Vamos supor que o corpo de prova estivesse inicialmente parado em relação ao referencial universal U, $\vec{a}_{mU} = \vec{0}$. Cercamos o corpo por uma casca esférica de massa gravitacional M_g e raio R, também parada em relação ao referencial universal, $\vec{A}_{MU} = \vec{0}$. Ao fornecer à casca esférica uma aceleração para a direita em relação às galáxias, $\vec{A}_{MU} = A_{MU}\hat{x}$, o corpo de prova interno à casca sentirá uma força inercial $\vec{F}_i$ apontando para a direita. Além disto, esta força gravitacional exercida pela casca sobre o corpo de prova será proporcional à aceleração da casca, sendo dada por $\vec{F}_i = H_g \xi m_g M_g A_{MU} \hat{x}/(3Rc^2)$, figura 17.6.

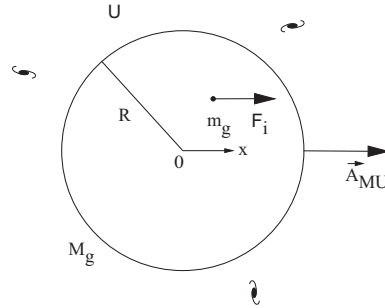



Figura 17.6: Ao fornecer à casca esférica uma aceleração $\vec{A}_{MU}$ para a direita, ela vai exercer uma força inercial $\vec{F}_i$ para a direita sobre o corpo de prova. Esta força vai acelerar o corpo de prova para a direita.

Isto é, mostramos que na mecânica relacional um corpo sofre uma força aceleradora quando massas próximas a ele são aceleradas. Além disto, mostramos que esta força aponta no mesmo sentido que a aceleração destas massas próximas, sendo proporcional a esta aceleração. E para implementar o princípio de Mach era necessário tudo isto, como corretamente apontado por Einstein. A simplicidade da dedução deste efeito na mecânica relacional, quando comparada com a dedução complexa e confusa baseada na relatividade geral, é um bônus extra da teoria.

17.7.3 Força Centrífuga e Força de Coriolis Exercidas por uma Casca Esférica Girando ao Atuar sobre um Corpo em Seu Interior

Vamos analisar agora a terceira consequência mencionada na Seção 17.7. Suponha que estamos em um sistema de referência R no qual há uma casca esférica de massa gravitacional M_g com seu centro em repouso em relação ao referencial R e coincidindo com sua origem O. Além disto, suponha que esta casca esférica está

girando em relação a este referencial com uma velocidade angular $\vec{\Omega}_{MR}$, figura 16.4. A massa gravitacional da casca é dada por $M_g = 4\pi R^2 dR\rho_g$, onde R é seu raio, dR sua espessura e ρ_g sua densidade de massa gravitacional. Suponha também que há um corpo de prova dentro da casca movendo-se em relação a este referencial R. A força gravitacional exercida pela casca sobre o corpo de prova na mecânica relacional é dada pela equação (16.30):

$$d\vec{F} = -\frac{H_g \xi}{3c^2}\frac{m_g M_g}{R}\left[\vec{a}_{mR} + \vec{\Omega}_{MR} \times (\vec{\Omega}_{MR} \times \vec{r}_{mR}) + 2\vec{v}_{mR} \times \vec{\Omega}_{MR} + \vec{r}_{mR} \times \frac{d\vec{\Omega}_{MR}}{dt}\right] . \qquad (17.65)$$

Esta equação mostra que na mecânica relacional um corpo oco girando gera dentro dele uma força de Coriolis proporcional a $2m_g\vec{v}_{mR} \times \vec{\Omega}_{MR}$ que desvia os corpos em movimento no sentido desta rotação. Esta casca esférica exerce também sobre o corpo de prova uma força radial centrífuga proporcional a $m_g\vec{\Omega}_{MR} \times (\vec{\Omega}_{MR} \times \vec{r}_{mR})$. Isto está completamente de acordo com o princípio de Mach.

Nas Subseções 23.5.6 e 23.5.7 será mostrado como testar experimentalmente esta previsão da mecânica relacional.

Como vimos na Subseção 15.3.4, o efeito análogo na relatividade geral foi deduzido por Thirring, equação (15.5). Só que a força de Thirring possui coeficientes errados em frente do termo de Coriolis e em frente do termo centrífugo (isto é, com coeficientes não observados experimentalmente). Além disso, a relatividade geral prevê efeitos espúrios, a saber, as forças axiais proporcionais a $m(\vec{\Omega} \cdot \vec{r})\vec{\Omega}$, que nunca foram encontrados em qualquer experiência.

17.7.4 Um Corpo em um Universo Vazio Não Tem Inércia

Analisamos agora a quarta consequência mencionada na Seção 17.7. Ela também segue imediatamente da mecânica relacional observando-se que a inércia de qualquer corpo, ou seja, a força inercial $-\Phi_\infty m_g\vec{a}_{mU}$, foi obtida supondo-se a contribuição das galáxias distantes. Fazer estas galáxias desaparecerem é análogo a fazer $\rho_{go} \to 0$ nas equações (16.41) e (16.43). Neste caso a força inercial exercida pelas galáxias vai a zero. Isto significa que não vão mais haver forças similares ao termo newtoniano $m_i\vec{a}$. Isto é, a inércia do corpo vai desaparecer.

Uma outra maneira de obter esta consequência na mecânica relacional é observar que todas as forças nesta teoria são baseadas em interações entre dois corpos materiais. Ou seja, não há força entre qualquer corpo e o "espaço." Fica então sem sentido falar do movimento de um único corpo em um universo completamente vazio de outros corpos materiais. O sistema mais simples que podemos considerar é aquele composto de duas partículas.

Como já vimos na Subseção 15.3.5, isto não ocorre na relatividade geral. Nesta teoria de Einstein, um corpo em um universo vazio de outros corpos ainda mantém toda sua inércia, contrariando o princípio de Mach.

17.8 Visões de Mundo Ptolomaica e Copernicana

Como visto nos Capítulos 12 e 13, Leibniz e Mach enfatizaram que o sistema geocêntrico de Ptolomeu e o sistema heliocêntrico de Copérnico são igualmente válidos e corretos. Com a mecânica relacional conseguimos implementar esta equivalência quantitativamente, mostrando a validade destas duas visões de mundo.

Vamos considerar movimentos sobre a superfície da Terra e no sistema solar tais que possamos desprezar a aceleração do sistema solar em relação ao referencial das galáxias distantes (com um valor típico de 10^{-10} m/s^2). Além do mais, como a massa do Sol é muito maior do que a massa dos planetas, podemos em uma primeira aproximação desprezar o movimento do Sol quando comparado com o movimento dos planetas (ambos os movimentos em relação às estrelas fixas). Podemos então dizer que o Sol está essencialmente em repouso em relação às estrelas fixas, enquanto que a Terra e os outros planetas se movem em relação a elas.

Inicialmente consideramos a visão de mundo de Copérnico. Consideramos aqui o Sol no centro do universo enquanto que a Terra e os planetas orbitam ao redor dele (para simplificar vamos supor órbitas circulares), além de girarem ao redor de seus eixos em relação ao referencial das estrelas fixas. A mecânica relacional pode ser aplicada neste referencial com enorme sucesso na forma da equação (16.64), onde $\vec{a}_{kU}$ é a aceleração do corpo de massa gravitacional m_{gk} em relação ao referencial universal U. Na aproximação que está sendo considerada aqui, esta aceleração $\vec{a}_{kU}$ coincide com a aceleração $\vec{a}_{kF}$ do corpo k em relação ao referencial F das estrelas fixas. Isto é, $\vec{a}_{kU} = \vec{a}_{kF}$.

Apesar da atração gravitacional do Sol, a Terra e os outros planetas não diminuem suas distâncias ao Sol porque têm uma aceleração em relação às estrelas fixas. A matéria distante no universo exerce uma força $-\Phi_\infty m_{gk}\vec{a}_{mU}$ sobre os planetas acelerados, sendo que esta força mantém os planetas em suas órbitas ao redor do Sol. A rotação diurna da Terra ao redor de seu eixo em relação às estrelas fixas explica sua forma achatada, com uma distância menor entre os polos do que a distância equatorial de Leste a Oeste. Explica-se a experiência do pêndulo de Foucault dizendo que o plano de oscilação permanece fixo em relação às estrelas fixas, etc.

Na visão de Ptolomeu, a Terra é considerada em repouso no centro do universo, sem rotação. O Sol, os outros planetas e as estrelas fixas giram ao seu redor. Há uma componente diária desta rotação com o período de 23 horas, 56 minutos e 4 segundos, ou seja, 86.164 segundos. Existe também uma componente anual desta rotação com o período de 1 ano $= 3,156 \times 10^7$ s. Na mecânica relacional esta rotação da matéria distante em relação à Terra vai gerar a força (16.57) no referencial da Terra, de modo que a equação de movimento vai ficar na forma da equação (16.75). Agora a atração gravitacional exercida pelo Sol sobre a Terra é contrabalançada por uma força centrífuga real de origem gravitacional exercida pela matéria distante girando (com uma componente de período anual) ao redor da Terra. Por este motivo a Terra pode permanecer em repouso e a uma distância essencialmente constante do Sol. A rotação da matéria distante (com uma componente de período diurno) ao redor da Terra gera uma força centrífuga gravitacional real que achata a Terra nos polos. O pêndulo de Foucault é explicado por uma força de Coriolis real agindo sobre as massas que se movem na superfície da Terra na forma de $-\Phi_\infty 2m_g\vec{v}_{mT}\times\vec{\Omega}_{GT}$, onde $\vec{v}_{mT}$ é a velocidade do corpo de prova em relação à Terra e $\vec{\Omega}_{GT}$ é a velocidade angular do conjunto de galáxias ao redor da Terra. O efeito desta força é o de manter o plano de oscilação do pêndulo girando, em relação à superfície da Terra, juntamente com a rotação das estrelas fixas em relação à Terra. Etc.

Na verdade, qualquer outro sistema de referência é igualmente válido, não precisamos ficar restritos ao referencial terrestre nem ao referencial das estrelas fixas. Qualquer pessoa ou sistema de referência pode se considerar realmente em repouso enquanto que todo o universo move-se ao redor desta pessoa de acordo com sua vontade. Esta equivalência entre os diversos sistemas de referência ocorre não apenas cinematicamente como sempre se soube, mas também dinamicamente. Todas as forças locais atuando sobre a pessoa serão contrabalançadas pela força exercida sobre ela pelas galáxias distantes, de tal forma que sua própria velocidade e aceleração sejam sempre nulas neste referencial da própria pessoa. Por exemplo, considere uma pedra caindo livremente no vácuo sobre a superfície da Terra devido a seu peso $\vec{P}$. No referencial da pedra ela vai sempre permanecer em repouso, enquanto que a Terra e o conjunto de galáxias distantes são acelerados para cima (ou seja, no sentido que aponta da Terra para a pedra). A força gravitacional $\vec{P}$ exercida pela Terra sobre a pedra é contrabalançada pela força gravitacional exercida pelas galáxias distantes sobre a pedra com um valor dado por $\Phi_\infty m_g\vec{A}_{GA}$, de tal forma que $\vec{P}+\Phi_\infty m_g\vec{A}_{GA}=\vec{0}$, onde $\vec{A}_{GA}$ é a aceleração do conjunto de galáxias em relação ao referencial A da pedra. Esta igualdade de forças vai fazer com que a pedra continue em repouso em relação a si mesma, $\vec{v}_{mA}=\vec{0}$ e $\vec{a}_{mA}=\vec{0}$.

A mecânica relacional implementa quantitativamente e dinamicamente o velho objetivo de tornar todos os sistemas de referência igualmente válidos, corretos e verdadeiros. A forma da força exercida pela matéria distante sobre um corpo de prova pode ser diferente em diferentes sistemas de referência, mas não o valor numérico ou a direção desta força em relação a outras massas. Neste sentido pode ser mais prático, simples ou matematicamente conveniente considerar um certo sistema de referência como o preferido em relação a outros para tratar um problema específico. Mas na verdade, todos os outros referenciais vão levar exatamente nas mesmas consequências dinâmicas (muito embora possa ser mais difícil ou mais trabalhoso fazer as contas e chegar na resposta final).

Uma consequência bonita e marcante da mecânica relacional é que se mostrou serem dinamicamente equivalentes todos os movimentos cinematicamente equivalentes. Podemos afirmar que as estrelas e galáxias estão em repouso em um certo referencial, enquanto que a Terra gira ao redor de seu eixo com um período de um dia. Mas também podemos afirmar que a Terra está em repouso em relação a um outro referencial, enquanto que as estrelas e galáxias giram na direção oposta em relação à Terra com o mesmo período de um dia. Estes dois casos são cinematicamente equivalentes. Na mecânica relacional obtém-se a consequência dinâmica de que nestes dois casos a Terra ficará achatada nos polos. Nenhuma outra teoria da mecânica já proposta conseguiu implementar quantitativamente esta consequência. E isto apesar de sempre ter sido desejado deduzir este resultado atraente e elegante por motivos filosóficos, estéticos e de simplicidade matemática. O que estava faltando era uma lei relacional descrevendo a interação entre os corpos, tal como ocorre com a força de Weber. Ela é totalmente relacional, dependendo apenas da distância entre os corpos, da velocidade radial relativa entre eles, além de depender da aceleração radial relativa entre eles, apontando ao longo da reta que os une.

17.9 Condições nas Quais se Pode Escrever a Equação de Movimento na Sua Forma Mais Simples e Baseada na Aceleração do Corpo de Prova em Relação à Terra ou em Relação às Estrelas Fixas

A equação de movimento da mecânica relacional para um corpo k de massa gravitacional m_{gk} deslocando-se no referencial universal U é dada pela equação (16.64), a saber:

$$\sum_{\substack{p=1 \\ p\neq k}}^{N} \vec{F}_{pk} - \Phi_\infty m_{gk}\vec{a}_{kU} = \vec{0} \ . \tag{17.66}$$

Nesta equação $\vec{a}_{kU}$ é a aceleração do corpo k em relação ao referencial U das galáxias distantes, figura 1.11.

A aceleração centrípeta do sistema solar ao redor do centro de nossa galáxia, em relação ao pano de fundo das galáxias distantes, tem um valor de $a_{centripeta\ galáxia} \approx 1,6 \times 10^{-16}\ m/s^2$, equação (3.44) e figura 3.5. A aceleração centrípeta devida à órbita anual Terra em torno do Sol, em relação ao pano de fundo das estrelas fixas pertencentes à nossa galáxia, tem um valor de $a_{centripeta\ anual} \approx 6,0 \times 10^{-3}\ m/s^2$, equação (3.43) e figura 3.4. Já a aceleração centrípeta de um corpo no equador terrestre parado em relação ao solo, devida à rotação diária da Terra em relação às estrelas fixas, tem um valor de $a_{centripeta\ diária} \approx 3,4 \times 10^{-2}\ m/s^2$, equação (3.42) e figura 3.3.

Existem muitas situações nas quais o módulo da aceleração de um corpo de teste k em relação ao solo, $a_{kT} \equiv |\vec{a}_{kT}|$, é muito maior do que as acelerações descritas no parágrafo anterior:

$$a_{kT} \gg a_{centripeta\ diária} > a_{centripeta\ anual} \gg a_{centripeta\ galáxia} \ . \tag{17.67}$$

Como exemplos podemos citar a queda livre de uma maçã, a trajetória parabólica de um projétil, uma esfera descendo por um plano inclinado, um corpo preso a uma mola e oscilando em relação ao solo, um pêndulo oscilando no equador terrestre etc. Vamos supor ainda que estes movimentos tenham uma amplitude pequena comparada com o raio terrestre. Além disso, vamos supor que estes movimentos tenham uma duração pequena comparada com um dia sideral. Nestes casos podemos considerar que a aceleração do corpo em relação à Terra, $\vec{a}_{kT}$, tem essencialmente o mesmo valor que a aceleração do corpo em relação ao referencial F das estrelas fixas, $\vec{a}_{kF}$, além de ter também essencialmente o mesmo valor que a aceleração do corpo em relação ao referencial universal U:

$$\vec{a}_{kT} = \vec{a}_{kF} = \vec{a}_{kU} \ . \tag{17.68}$$

A equação de movimento (17.66) reduz-se então à seguinte expressão:

$$\sum_{\substack{p=1 \\ p\neq k}}^{N} \vec{F}_{pk} - \Phi_\infty m_{gk}\vec{a}_{kU} = \sum_{\substack{p=1 \\ p\neq k}}^{N} \vec{F}_{pk} - \Phi_\infty m_{gk}\vec{a}_{kF} = \sum_{\substack{p=1 \\ p\neq k}}^{N} \vec{F}_{pk} - \Phi_\infty m_{gk}\vec{a}_{kT} = \vec{0} \ . \tag{17.69}$$

Ou seja, a equação de movimento pode ser escrita em sua forma mais simples considerando a aceleração do corpo de prova em relação às galáxias distantes, em relação às estrelas fixas, ou em relação ao solo, figura 17.7.

Existem outras situações nas quais o módulo da aceleração de um corpo de prova k deslocando-se em relação ao solo tem um valor aproximado de $10^{-2}\ m/s^2$ ou $10^{-3}\ m/s^2$. Algumas vezes estas situações referem-se a movimentos com grande extensão espacial, comparável ao raio terrestre, como é o caso dos redemoinhos de vento nos hemisférios Norte e Sul. Em outras vezes estas situações têm uma pequena extensão espacial, mas duram um tempo comparável ao dia sideral, como nas experiências do pêndulo de Foucault que duram alguns minutos ou horas. Nestes casos o efeito que se quer investigar pode ter o módulo da aceleração do corpo de prova em relação ao solo com um valor próximo da aceleração centrípeta de um ponto no equador terrestre devida à rotação diária da Terra em relação às estrelas, que é da mesma ordem de grandeza que a aceleração centrípeta da Terra devida à sua translação anual em torno do Sol, sendo estas acelerações muito maiores do que a aceleração centrípeta do sistema solar em torno do centro de nossa galáxia:

$$a_{kT} \approx a_{centripeta\ diária} > a_{centripeta\ anual} \gg a_{centripeta\ galáxia} \ . \tag{17.70}$$

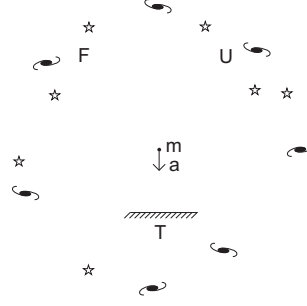



Figura 17.7: Corpo de prova tendo essencialmente a mesma aceleração em relação à Terra, T, em relação às estrelas fixas, F, e em relação às galáxias, U.

Nestes casos podemos considerar que a aceleração do corpo em relação às estrelas fixas, $\vec{a}_{kF}$, tem essencialmente o mesmo valor que a aceleração do corpo em relação ao referencial universal U:

$$\vec{a}_{kF} = \vec{a}_{kU} \ . \tag{17.71}$$

A equação de movimento (17.66) reduz-se então à seguinte expressão:

$$\sum_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{N} \vec{F}_{pk} - \Phi_\infty m_{gk}\vec{a}_{kU} = \sum_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{N} \vec{F}_{pk} - \Phi_\infty m_{gk}\vec{a}_{kF} = \vec{0} \ . \tag{17.72}$$

Ou seja, a equação de movimento pode ser escrita em sua forma mais simples considerando a aceleração do corpo de prova em relação às galáxias distantes, ou em relação às estrelas fixas, figura 17.8.

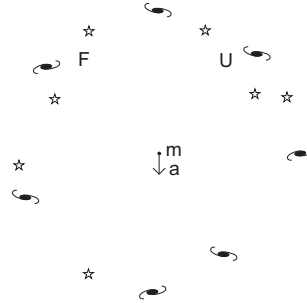



Figura 17.8: Corpo de prova tendo essencialmente a mesma aceleração em relação às estrelas fixas, F, e em relação às galáxias, U.

Uma outra situação na qual poderemos utilizar a equação de movimento da mecânica relacional na forma da equação (17.72) é quando estivermos estudando a rotação diária da Terra em relação ao referencial das estrelas fixas. O mesmo pode ser dito do estudo da órbita anual da Terra em torno do Sol, a órbita de qualquer planeta do sistema solar em torno do Sol, a órbita de uma Lua ou satélite de qualquer planeta em torno deste planeta etc. Em todos estes casos podemos utilizar o pano de fundo das estrelas fixas de nossa galáxia para descrever o movimento destes corpos. Nestes casos o módulo da aceleração do corpo de prova em relação ao referencial F das estrelas fixas, $a_{kF} \equiv |\vec{a}_{kF}|$, terá um valor igual ou da mesma ordem de grandeza que a aceleração centrípeta devida à rotação diária de um ponto no equador terrestre, ou que a aceleração centrípeta devida à rotação anual da Terra em torno do Sol:

$$a_{kF} \approx a_{centripeta\ diária} > a_{centripeta\ anual} \gg a_{centripeta\ galáxia} \ . \tag{17.73}$$

Nestes casos, durante o estudo do movimento destes corpos, poderemos dizer que o conjunto de estrelas fixas tem uma aceleração desprezível em relação às galáxias distantes. Torna-se então possível e conveniente descrever os movimento destes corpos em relação às estrelas fixas, em vez de referir estes movimentos em relação às galáxias distantes, como descrito nas equações (17.71) e (17.72).

Capítulo 18

Comparação das Leis e Conceitos da Mecânica Relacional e da Mecânica Clássica

18.1 Dedução de uma Equação de Movimento Análoga à Segunda Lei de Newton

Vamos analisar a equação de movimento da mecânica relacional no referencial universal U no qual o conjunto das galáxias está em repouso, figura 16.7. Neste caso a equação de conservação de energia, equação (16.61), é análoga à equação de conservação de energia da mecânica clássica em um referencial inercial, equação (3.31). Embora elas tenham formas parecidas, existem algumas diferenças conceituais bem marcantes entre estas equações. Listamos estas diferenças aqui:

- A energia cinética $m_{ip}v_p^2/2$ que aparece na equação (3.31) da mecânica clássica é uma energia de puro movimento do corpo em relação ao referencial inercial, não vindo de qualquer interação física deste corpo. Já a energia inercial $\Phi_\infty m_{gp}v_{pU}^2/2$ que aparece na equação (16.61) da mecânica relacional é uma energia de interação gravitacional entre o corpo de prova e o conjunto das galáxias distantes.

- A massa m_{ip} que aparece na energia cinética é a massa inercial do corpo. Conceitualmente esta massa inercial não tem qualquer ligação com a gravidade. Já a massa m_{gp} da energia inercial é uma massa gravitacional.

- A velocidade $\vec{v}_p$ que aparece na energia cinética da equação (3.31) é a velocidade do corpo de prova em relação ao espaço absoluto de Newton ou em relação a qualquer referencial inercial que esteja deslocando-se ao longo de uma reta com uma velocidade constante em relação ao espaço absoluto. Esta velocidade tem valores diferentes em diferentes sistemas inerciais. Isto faz com que a energia cinética $m_{ip}v_p^2/2$ tenha valores diferentes em diferentes sistemas de referência. Já a velocidade $\vec{v}_{pU}$ da energia inercial que aparece na equação (16.61) é a velocidade relativa entre o corpo de prova e o conjunto das galáxias distantes. Mesmo quando mudamos para um sistema de referência A no qual o conjunto de galáxias esteja deslocando-se com uma certa velocidade $\vec{V}_{GA}$ enquanto o corpo de prova desloca-se com velocidade $\vec{v}_{pA}$, a energia inercial continuará tendo o mesmo valor, já que nesta energia só interessa a velocidade *relativa* entre o corpo de prova e o conjunto das galáxias distantes. Ou seja, como $\vec{v}_{pU} = \vec{v}_{pA} - \vec{V}_{GA}$, temos $\vec{v}_{pU} \cdot \vec{v}_{pU} = (\vec{v}_{pA} - \vec{V}_{GA}) \cdot (\vec{v}_{pA} - \vec{V}_{GA})$. Isto faz com que a energia inercial U_i tenha o mesmo valor tanto no referencial universal U quanto no referencial A, como pode ser visto pela equação (16.70). O mesmo acontece com todos os outros referenciais.

A equação de movimento da mecânica clássica é dada pela segunda lei de Newton, equação (1.5). Já a equação de movimento da mecânica relacional no referencial universal é dada pela equação (16.64). Passando o termo $-\Phi_\infty m_{gk}\vec{a}_{kU}$ para o lado direito da equação (16.64) obtém-se:

$$\sum_{\substack{p=1 \\ p\neq k}}^{N} \vec{F}_{pk} = \Phi_\infty m_{gk}\vec{a}_{kU} \ . \tag{18.1}$$

A mecânica relacional começa com o postulado de que a soma de todas as forças atuando em qualquer corpo é sempre nula em todos os sistemas de referência. Apesar disto, acabamos de *deduzir* a equação de movimento dada pela equação (18.1), equação esta que é análoga à segunda lei de Newton dada pela equação (1.5). Apesar da semelhança de forma entre estas duas equações, existem diversas diferenças conceituais entre elas, a saber:

- O termo $m_{ik}\vec{a}_k$ no lado direito da segunda lei de Newton, equação (1.5), é a consequência da aplicação de uma força resultante $\sum_{\substack{p=1 \\ p\neq k}}^{N} \vec{F}_{pk}$ sobre o corpo. Já na mecânica relacional o termo $\Phi_\infty m_{gk}\vec{a}_{kU}$ foi passado artificialmente para o lado direito da equação (16.64) para deixá-la parecida com a segunda lei de Newton. Na verdade, o que temos na mecânica relacional é que a força gravitacional exercida sobre o corpo de prova pela distribuição isotrópica de matéria ao seu redor é dada por $-\Phi_\infty m_{gk}\vec{a}_{kU}$. Esta é uma força de interação real na mecânica relacional, assim como ocorre com as forças $\sum_{\substack{p=1 \\ p\neq k}}^{N} \vec{F}_{pk}$ exercidas pelos corpos locais sobre o corpo de prova.

- A massa que aparece no lado direito da segunda lei de Newton, equação (1.5), é a massa inercial m_{ik} do corpo de prova. Conceitualmente ela não tem qualquer relação com a massa gravitacional do corpo de prova. Já na mecânica relacional a massa que aparece no termo $-\Phi_\infty m_{gk}\vec{a}_{kU}$ da equação (16.64) é a massa gravitacional do corpo de prova.

- A aceleração $\vec{a}_k$ que aparece na segunda lei de Newton, equação (1.5), é a aceleração do corpo de prova em relação ao espaço absoluto, ou em relação a qualquer referencial inercial que desloca-se com velocidade constante em relação ao espaço absoluto. Já a aceleração $\vec{a}_{kU}$ que aparece na equação (16.64) é a aceleração *relativa* entre o corpo de prova e o conjunto das galáxias distantes.

18.2 Dedução de uma Equação de Movimento Análoga à Primeira Lei de Newton

A equação de movimento da mecânica relacional para um corpo k de massa gravitacional m_{gk} deslocando-se no referencial universal U é dada pela equação (16.64). Vamos analisar nesta Seção o caso em que a força resultante anisotrópica agindo sobre k é nula:

$$\vec{F}_a = \sum_{\substack{p=1 \\ p\neq k}}^{N} \vec{F}_{pk} = \vec{0} \; . \tag{18.2}$$

Concluímos a partir das equações (16.64) e (18.2), usando ainda o fato de que $m_{gk} \neq 0$, que o corpo de prova terá aceleração nula no referencial universal:

$$\vec{a}_{kU} = \vec{0} \; , \quad \text{ou seja,} \quad \vec{v}_{kU} = \text{constante no tempo} \; . \tag{18.3}$$

A equação análoga a esta na mecânica newtoniana é a equação (1.24).

Isto é, resulta a partir da equação (18.3) da mecânica relacional que o corpo de prova k vai se mover com uma velocidade constante em relação ao referencial U no qual o conjunto das galáxias distantes está em repouso. A identificação da mecânica relacional com a mecânica newtoniana mostra que também *deduzimos* uma lei do movimento similar à primeira lei de Newton. Mas agora ao invés de dizer que um corpo vai se mover com uma velocidade constante em relação ao espaço absoluto (uma entidade a que não temos nenhum acesso), dizemos que o corpo vai se mover com uma velocidade constante em relação ao referencial das galáxias distantes. Se este é o caso, então o corpo de prova também vai se mover com uma velocidade constante em relação a qualquer outro referencial que se move com uma velocidade constante em relação ao referencial das galáxias distantes. Estes referenciais podem então ser identificados com os referenciais inerciais da mecânica clássica. Só que agora eles passam a ser completamente determinados pela matéria distante.

18.3 Condições nas Quais a Terra e as Estrelas Fixas podem ser Consideradas Bons Referenciais Inerciais

Como visto na Seção 17.9, nos casos em que o corpo de prova desloca-se com uma grande aceleração em relação ao solo (comparada com a aceleração centrípeta de um ponto parado no equador terrestre, devida à rotação diária da Terra em relação às estrelas), são válidas as condições (17.67) e (17.68). A equação de movimento pode então ser escrita como a equação (17.69).

Nos casos em que é nula a resultante das forças locais atuando sobre o corpo de prova, equação (18.2), obtém-se então o seguinte resultado a partir da equação (17.69):

$$\vec{a}_{kU} = \vec{a}_{kF} = \vec{a}_{kT} = \vec{0} \ , \tag{18.4}$$

e

$$\vec{v}_{kU} = \vec{v}_{kF} = \vec{v}_{kT} = \text{constante no tempo} \ . \tag{18.5}$$

Ou seja, o corpo de prova vai se mover em relação à superfície da Terra, em relação às estrelas e em relação às galáxias com uma velocidade constante ao longo do tempo. Isto significa que o corpo também vai se deslocar com velocidade constante em relação a qualquer referencial que esteja em movimento com velocidade constante em relação à Terra, em relação às estrelas, ou em relação às galáxias. Nestas condições estes referenciais podem ser identificados com os referenciais inerciais da mecânica clássica, só que agora sendo determinados pela Terra, pelas estrelas fixas ou pelas galáxias distantes.

Como visto na Seção 17.9, existem outros casos nos quais o corpo de prova desloca-se com uma aceleração em relação ao solo da ordem de 10^{-2} m/s^2. Para descrever as órbitas de planetas e satélites no sistema solar, podemos descrever seus movimentos tanto em relação às estrelas da nossa galáxia, quanto em relação ao referencial universal das galáxias distantes. Nestes casos serão válidas as condições (17.70) ou (17.73), assim como (17.71). A equação de movimento pode então ser escrita como a equação (17.72).

Nos casos em que é nula a resultante das forças locais atuando sobre o corpo de prova, equação (18.2), obtém-se então o seguinte resultado a partir da equação (17.72):

$$\vec{a}_{kU} = \vec{a}_{kF} = \vec{0} \ , \tag{18.6}$$

e

$$\vec{v}_{kU} = \vec{v}_{kF} = \text{constante no tempo} \ . \tag{18.7}$$

Ou seja, o corpo de prova vai se mover com velocidade constante em relação às estrelas fixas, ou em relação às galáxias distantes. Ele também vai deslocar-se com velocidade constante em relação a qualquer referencial que esteja em movimento com velocidade constante em relação às estrelas ou em relação às galáxias. Nestas condições estes referenciais podem ser identificados com os referenciais inerciais da mecânica clássica, só que agora sendo determinados pelas estrelas fixas ou pelas galáxias distantes.

A discussão desta Seção permite que se entenda um outro aspecto que tinha sido corretamente apontado por Mach em seu livro *A Ciência da Mecânica* quando afirmou o seguinte:[1]

> Permaneço até o dia de hoje como a única pessoa que insiste em referir a lei da inércia à Terra e, no caso de movimentos de grande extensão espacial e temporal, às estrelas fixas.

Na época de Mach a existência das galáxias externas ainda não era conhecida, mas o conteúdo de sua afirmação é o mais importante. Na mecânica relacional foram deduzidas leis análogas à primeira e segunda leis do movimento de Newton. A primeira lei de Newton apresentada na Seção 1.2 é usualmente denominada de lei da inércia: "Todo corpo continua em seu estado de repouso ou de movimento uniforme em uma linha reta, a menos que seja forçado a mudar aquele estado por forças imprimidas sobre ele."

Mostramos nesta Seção que a lei da inércia tem sentido apenas quando se refere ao movimento do corpo de prova em relação a outros corpos materiais observáveis, a saber: a Terra, as estrelas fixas pertencentes à Via Láctea, ou as galáxias distantes. E esta conclusão da mecânica relacional é totalmente coerente com a afirmação de Mach.

[1] [Mac60, págs. 336-337].

18.4 Equivalência entre a Rotação Cinemática e a Rotação Dinâmica da Terra

Uma outra coisa que é explicada imediatamente na mecânica relacional é a igualdade entre $\vec{\omega}_c$ e $\vec{\omega}_d$, isto é, entre as rotações cinemática e dinâmica da Terra. As equações de movimento da mecânica relacional ficam em suas formas mais simples, ou seja, como as equações (16.61) e (16.64), no sistema de referência universal U no qual o universo como um todo (o conjunto das galáxias distantes) está em repouso. Em outro sistema de referência R vão aparecer termos na energia inercial U_i e na força inercial $\vec{F}_i$ que vão depender de $\vec{V}_{GR}$ e de $\vec{\Omega}_{GR}$. Isto é, vão surgir termos que dependem da velocidade de translação e da velocidade angular de rotação do conjunto de galáxias em relação ao referencial R, como visto nas equações (16.74) e (16.75). Na equação (16.75) aparece o termo $-\Phi_\infty m_{gk}\vec{\Omega}_{GR}\times(\vec{\Omega}_{GR}\times\vec{r}_{kR})$ que é similar à força centrífuga que surge em referenciais não inerciais da mecânica clássica. Nesta equação também aparece o termo $-\Phi_\infty 2m_{gk}\vec{v}_{kR}\times\vec{\Omega}_{GR}$ que é similar à força de Coriolis que surge em referenciais não inerciais da mecânica clássica. Quando identificamos este fato da mecânica relacional com a mecânica newtoniana, então torna-se óbvio e inteligível a igualdade entre as rotações cinemática e dinâmica da Terra. Ou seja, a explicação desta coincidência da mecânica clássica ($\vec{\omega}_c$ ser igual a $\vec{\omega}_d$) é que são as galáxias distantes que definem o melhor sistema de referência inercial (que é o referencial no qual as leis do movimento de Newton são válidas sem a introdução da força centrífuga e da força de Coriolis). Isto significa que o conjunto das galáxias distantes não gira em relação ao espaço absoluto (é este o significado do fato observacional de que $\vec{\omega}_c = \vec{\omega}_d$), já que é exatamente este conjunto de galáxias que passa a definir o que é o espaço absoluto, como visto na Seção 18.3.

Para deixar isto claro, enfatizamos mais uma vez que na mecânica relacional não aparecem os conceitos de espaço absoluto, referencial inercial ou de força fictícia. Estes conceitos existem apenas na mecânica clássica newtoniana. Os referenciais inerciais são aqueles que estão parados ou em movimento retilíneo uniforme em relação ao espaço absoluto de Newton, Seção 1.7. Nestes referenciais inerciais a segunda lei de Newton fica escrita em sua forma mais simples dada pela equação (1.5), sem o aparecimento das forças fictícias, tais como a força centrífuga ou a força de Coriolis. Observa-se observacionalmente que nestes referenciais inerciais o conjunto de galáxias não está girando. Este fato é caracterizado matematicamente pela equação $\vec{\omega}_c = \vec{\omega}_d$. Esta igualdade entre $\vec{\omega}_c$ e $\vec{\omega}_d$ não tem explicação na mecânica clássica, sendo uma coincidência.

Porém, ao identificar as equações de movimento obtidas na mecânica relacional no referencial universal U e no referencial R no qual o conjunto das galáxias está girando com uma velocidade angular $\vec{\Omega}_{GR}$, equações (16.64) e (16.75), com as equações de movimento da mecânica clássica, tanto em um referencial inercial S quanto em um referencial não inercial S' que está girando em relação ao referencial S, equações (1.5) e (10.40), torna-se possível entender a igualdade entre $\vec{\omega}_c$ e $\vec{\omega}_d$.

Em um sistema de referência R no qual o universo como um todo está girando em relação à origem deste referencial com uma velocidade angular $\vec{\Omega}_{GR}(t)$ mas sem aceleração translacional, a equação de movimento da mecânica relacional fica na forma da equação (16.75), a saber:

$$\sum_{\substack{p=1 \\ p\neq k}}^{N}\vec{F}_{pk} - \Phi_\infty m_{gk}\left[\vec{a}_{kR} + \vec{\Omega}_{GR}\times(\vec{\Omega}_{GR}\times\vec{r}_{kR}) + 2\vec{v}_{kR}\times\vec{\Omega}_{GR} + \vec{r}_{kR}\times\frac{d\vec{\Omega}_{GR}}{dt}\right] = \vec{0}\ . \qquad (18.8)$$

Aqui $\vec{r}_{kR}$ é o vetor posição da partícula k de massa gravitacional m_{gk} em relação à origem do referencial R. Além disso, $\vec{v}_{kR}$ e $\vec{a}_{kR}$ são a velocidade e aceleração do corpo de prova em relação a este referencial R.

Este resultado da mecânica relacional tem a mesma forma que a segunda lei do movimento de Newton com as forças fictícias, equação (10.40):

$$\vec{F} - m_i\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,') - 2m_i\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}\,'}{dt} - m_i\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}\,' - m_i\frac{d^2\vec{h}}{dt^2} = m_i\frac{d^2\vec{r}\,'}{dt^2}\ . \qquad (18.9)$$

Identificando as equações (18.8) e (18.9), com $\vec{r}_{kR} = \vec{r}\,'$, $\vec{v}_{kR} = \vec{v}\,' = d\vec{r}\,'/dt$, $\vec{a}_{kR} = \vec{a}\,' = d^2\vec{r}\,'/dt^2$ e $\Omega_{GR} = -\vec{\omega}$, leva à conclusão de que a força centrífuga e a força de Coriolis da mecânica clássica deixam de ser consideradas fictícias na mecânica relacional. Na mecânica relacional elas passam a ser vistas como forças reais de origem gravitacional surgindo da interação do corpo de prova com o universo girando ao redor dele.

Mach havia afirmado o seguinte:[2]

[2][Mac60, pág. 279].

Tente fixar o balde de Newton e girar o céu de estrelas fixas e então prove a ausência de forças centrífugas.

Na Subseção 16.6.3 foi visto que a contribuição das estrelas fixas pertencentes à Via Láctea é desprezível comparada com a contribuição das galáxias distantes, no que diz respeito à força inercial exercida gravitacionalmente sobre qualquer corpo pelos corpos distribuídos isotropicamente ao seu redor. Vê-se então que a mecânica relacional está quase completamente de acordo com as ideias de Mach, pois mostramos aqui que "girando o céu de galáxias, aparecem forças centrífugas." A única diferença em relação às ideias de Mach, é que ele só conhecia a existência das estrelas fixas. Foi apenas em 1924 que Hubble estabeleceu com certeza a existência de galáxias externas ao conjunto de estrelas fixas que compõem a nossa galáxia, a Via Láctea. Isto ocorreu após a morte de Mach em 1916. Mostramos na Subseção 16.6.3 que girando apenas nossa própria galáxia (isto é, o céu de estrelas fixas) em relação a um observador, que então vai-se gerar apenas uma pequena força centrífuga dificilmente perceptível. Por outro lado, a rotação de todo o universo conhecido (o conjunto das galáxias distantes) vai gerar exatamente a força centrífuga que se observa existir em referenciais nos quais o conjunto das galáxias distantes está girando.

Por exemplo, a componente $-\Phi_\infty m_{gk}\vec{\Omega}_{GR}\times(\vec{\Omega}_{GR}\times\vec{r}_{kR})$ que aparece na equação (18.8) é análoga à força centrífuga $-m_i\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,')$ da mecânica clássica. Esta componente da mecânica relacional só aparece em um referencial R no qual o conjunto das galáxias distantes está girando. O mesmo acontece com a componente $-\Phi_\infty m_{gk}2\vec{v}_{kR}\times\vec{\Omega}_{GR}$ da equação (18.8), que é análoga à força de Coriolis da mecânica clássica dada por $-2m_i\vec{\omega}\times d\vec{r}\,'/dt$. Mais uma vez esta componente da mecânica relacional só aparece neste referencial R. Ao parar a rotação do conjunto das galáxias distantes fazendo $\vec{\Omega}_{GR}\rightarrow\vec{0}$, voltamos ao referencial universal U. A equação de movimento reduz-se então à equação (16.64), na qual estas componentes não estão presentes na força inercial atuando sobre qualquer corpo de prova.

18.5 Proporcionalidade da Massa Inercial com a Massa Gravitacional

A equação de conservação da energia na mecânica newtoniana e a segunda lei de Newton são dadas pelas equações (3.31) e (1.5), isto é:

$$\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N}\sum_{\substack{q=1\\q\neq p}}^{N}U_{pq}+\sum_{p=1}^{N}m_{ip}\frac{\vec{v}_p\cdot\vec{v}_p}{2}=\text{constante no tempo}\ , \tag{18.10}$$

e

$$\sum_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{N}\vec{F}_{pk}=m_{ik}\vec{a}_k\ . \tag{18.11}$$

Já a equação de conservação da energia na mecânica relacional é dada pela equação (16.61), enquanto que a equação de movimento na mecânica relacional é dada pela equação (16.64), isto é:

$$\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N}\sum_{\substack{q=1\\q\neq p}}^{N}U_{pq}+\Phi_\infty\left(\sum_{p=1}^{N}m_{gp}\frac{\vec{v}_{pU}\cdot\vec{v}_{pU}}{2}\right)=\text{constante no tempo}\ , \tag{18.12}$$

e

$$\vec{F}_a+\vec{F}_i=\sum_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{N}\vec{F}_{pk}+\vec{F}_i=\sum_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{N}\vec{F}_{pk}-\Phi_\infty m_{gk}\vec{a}_{kU}=\vec{0}\ . \tag{18.13}$$

A equação (18.12) é análoga à equação de conservação da energia da mecânica clássica em sistemas de referência inerciais, equação (18.10), enquanto que a equação (18.13) é análoga à segunda lei do movimento de Newton no espaço absoluto ou em referenciais inerciais, equação (18.11). Mas a diferença é que agora nós *deduzimos* uma expressão análoga à energia cinética e uma equação análoga à equação de movimento newtoniana. Já na mecânica clássica éramos obrigados a começar com o conceito de energia cinética (ou de postulá-lo), sem saber de onde ele vinha (sem saber sua origem física). Da mesma maneira, Newton foi

obrigado a começar com $\vec{F} = d\vec{p}/dt$, ou seja, $\vec{F} = m_i\vec{a}$, já que não tinha de onde deduzir esta equação. Por este motivo foi necessário introduzir *a priori* o conceito de massa inercial, sem saber de onde ele vinha.

Na mecânica relacional estamos deduzindo uma energia análoga à energia cinética clássica. Mas quando identificamos esta energia inercial $\Phi_\infty m_{gp} v_{pU}^2/2$ da equação (18.12) com a energia cinética clássica $m_{ip} v_p^2/2$ da equação (18.10), passamos a entender imediatamente a proporcionalidade misteriosa entre as massas inerciais e gravitacionais que aparecem na mecânica newtoniana. Isto é, na mecânica relacional obtivemos que a energia inercial $\Phi_\infty m_{gp} v_{pU}^2/2$ é uma energia de interação como qualquer outro tipo de energia potencial. É uma energia de interação gravitacional surgindo do movimento relativo entre a partícula p de massa gravitacional m_{gp} e o universo como um todo ao redor deste corpo.

A mesma coisa pode ser concluída a partir da equação (18.13). Se identificarmos esta equação que foi deduzida na mecânica relacional com a segunda lei do movimento de Newton, equação (18.11), passamos a entender imediatamente a proporcionalidade entre as massas inerciais e gravitacionais da mecânica clássica. Isto é, a força inercial $-\Phi_\infty m_g \vec{a}_{mU}$ da equação (18.13) é uma força gravitacional real entre m_g e o universo em grande escala (o conjunto das galáxias distantes) quando há uma aceleração entre eles. Na mecânica relacional não existe o conceito de massa inercial, só se introduz o conceito de massa gravitacional. É apenas ao comparar as equações da mecânica relacional com as equações equivalentes da mecânica newtoniana que se pode identificar o que seria, na mecânica relacional, o análogo à massa inercial da mecânica clássica. Aquilo que era misterioso na mecânica clássica, a saber, a proporcionalidade observada experimentalmente entre a massa inercial e a massa gravitacional, passa a ser entendido de forma natural e profunda na mecânica relacional. Ou seja, tanto a energia $\Phi_\infty m_{gp} v_{pU}^2/2$ quanto a força $-\Phi_\infty m_{gk} \vec{a}_{kU}$ vêm de interações *gravitacionais* entre o corpo de prova e as galáxias distribuídas isotropicamente ao redor do corpo de prova, como visto na Seção 16.6, equações (16.34) até (16.36), ou equações (16.40) até (16.43).

A identificação das equações (18.12) e (18.13) com a equação clássica para a conservação da energia e com a segunda lei do movimento de Newton, equações (18.10) e (18.11), explica a proporcionalidade entre as massas inerciais e gravitacionais da mecânica newtoniana. Os conceitos de inércia de um corpo, de massa inercial, de sistemas de referência inerciais, de energia cinética etc. nunca foram introduzidos na mecânica relacional. Apenas quando identificamos as equações (18.12) e (18.13) com as equações análogas da mecânica clássica é que passamos a compreender e explicar este enigma da teoria newtoniana. Isto é, agora podemos explicar o motivo pelo qual a massa inercial da mecânica newtoniana é proporcional à massa gravitacional, como encontrado nas experiências de queda livre descritas na Subseção 6.2.2, ou aquelas com pêndulo realizadas por Newton e descritas nas Subseções 7.3.2 e 7.3.3. O motivo é que os segundos termos do lado esquerdo das equações (18.12) e (18.13) surgiram de interações gravitacionais entre a massa gravitacional m_g e a massa gravitacional das galáxias distantes quando há um movimento relativo entre m_g e estas galáxias distantes. Ou seja, tanto a massa que aparece em $\Phi_\infty m_g v_{mU}^2/2$ quanto a massa que aparece em $-\Phi_\infty m_g \vec{a}_{mU}$ é a massa gravitacional do corpo de prova. Apenas quando identificamos estes termos com a mecânica newtoniana, onde temos $m_i v^2/2$ e $m_i\vec{a}$, com m_i sendo a massa inercial do corpo de prova, passa a ficar claro que estas expressões "cinéticas" da mecânica newtoniana têm uma origem gravitacional. A mecânica clássica ganha um novo significado e passamos a ter uma compreensão clara quando a vemos sob a óptica da mecânica relacional.

Na mecânica relacional não precisamos postular a proporcionalidade ou igualdade entre m_g e m_i, como é necessário fazer na teoria da relatividade geral de Einstein. Einstein havia postulado a igualdade entre m_g e m_i no princípio de equivalência descrito na Seção 13.8, ao postular[3] que "a inércia e o peso são idênticos por natureza." Ele postulou esta relação sem fornecer explicações mais fundamentais da origem desta identidade entre a inércia e o peso. Ele também não explicou a proporcionalidade da massa inercial de um corpo com sua massa gravitacional. Vê-se então que ele não conseguiu *deduzir* esta proporcionalidade.

Já na mecânica relacional a proporcionalidade entre m_g e m_i é uma consequência direta da teoria ao compará-la com a mecânica newtoniana. Mostramos que a energia inercial tem uma origem gravitacional, vindo da interação entre o corpo de prova e o conjunto de galáxias ao seu redor. Da mesma forma, mostramos que a força inercial é real, sendo exercida gravitacionalmente sobre o corpo de prova pelo conjunto de galáxias ao seu redor. Isto mostra uma das grandes vantagens da mecânica relacional sobre a teoria da relatividade de Einstein.

[3][Ein18b], [Ein02] e [Nor95, págs. 185-186].

18.6 Razão das Massas como o Inverso das Razões das Acelerações em Relação ao Referencial Universal

Discutimos agora a definição de massa inercial apresentada por Mach na Seção 13.4. Para isto vamos considerar apenas um caso típico, a saber, dois corpos de massas gravitacionais m_{g1} e m_{g2} interagindo entre si, além de estarem interagindo também gravitacionalmente com as galáxias distantes. Vamos considerar o caso em que o movimento resultante ocorre ao longo da reta que os une, como discutido na Seção 17.1, figura 17.1.

Somando as equações (17.6) e (17.7) obtém-se $\vec{a}_{2U} = -(m_{g1}/m_{g2})\vec{a}_{1U}$. Escrevendo $\vec{a}_{1U} = a_{1U}\hat{x}$ e $\vec{a}_{2U} = a_{2U}\hat{x}$, escolhendo o eixo x ao longo da reta que une 1 com 2, obtém-se:

$$\frac{m_{g1}}{m_{g2}} = -\frac{a_{2U}}{a_{1U}} \ . \tag{18.14}$$

Esta equação é análoga à definição de massa inercial proposta por Mach, equações (13.3) e (13.6). Duas coisas devem ser observadas aqui. A primeira é que no lado esquerdo da equação (18.14) aparece a razão de massas gravitacionais, enquanto que na definição de Mach aparecia a razão de massas inerciais. Isto é facilmente entendido lembrando que o conceito de massa inercial não aparece na mecânica relacional. É apenas quando comparamos a mecânica relacional com a mecânica clássica que surge esta comparação, mostrando que a razão de duas massas inerciais da mecânica newtoniana nada mais é do que a razão das massas gravitacionais destas partículas.

O segundo aspecto a ser observado na equação (18.14) é que no lado direito aparece a razão das acelerações dos corpos em relação ao referencial universal U e não suas acelerações em relação a um sistema de referência arbitrário. Para a maior parte dos corpos deslocando-se no solo ou para os corpos do sistema solar que deslocam-se com acelerações bem maiores do que a aceleração centrípeta do sistema solar em relação ao referencial U, da ordem de $10^{-10}\ m/s^2$, pode-se substituir esta razão de acelerações em relação ao referencial U pela razão de acelerações em relação ao referencial F das estrelas fixas:

$$\frac{m_{g1}}{m_{g2}} = -\frac{a_{2F}}{a_{1F}} \ . \tag{18.15}$$

Esta equação (18.15) da mecânica relacional é similar às equações (13.3) e (13.6) propostas por Mach, desde que interpretemos as acelerações na definição de Mach como sendo as acelerações dos corpos em relação ao referencial F das estrelas fixas. Esta era certamente a intenção de Mach,[4] embora ele não tenha explicitado isto em sua definição, como discutimos na Seção 13.4.

18.7 Não São Necessárias Transformações de Coordenadas na Mecânica Relacional

Na mecânica clássica era preciso muito cuidado ao lidar com referenciais não inerciais, como visto no Capítulo 10. Era necessário fazer transformações de coordenadas entre os vários referenciais.

Nas teorias da relatividade de Einstein a situação ficou extremamente complicada e confusa quando ele passou a introduzir forças sobre um corpo que dependiam de sua velocidade em relação ao observador, como visto nos Capítulos 14 e 15. Ele também passou a introduzir transformações de coordenadas para relacionar os campos elétrico e magnético em um sistema de referência S com os campos elétrico e magnético em um outro sistema de referência S'. As transformações de Lorentz passaram a ser desde então introduzidas na análise até mesmo dos problemas mais simples, gerando uma grande confusão conceitual.

Nada disto é necessário na mecânica relacional, na qual só existem grandezas relacionais tais como a distância r_{pq} entre as partículas p e q, a velocidade radial relativa entre elas, $\dot{r}_{pq} = dr_{pq}/dt$, assim como a aceleração radial relativa entre elas, $\ddot{r}_{pq} = d\dot{r}_{pq}/dt = d^2r_{pq}/dt^2$. Ou seja, só têm significado ou relevância física a distância entre os corpos que estão interagindo, a velocidade radial relativa entre eles, além da aceleração radial relativa entre eles. Por este motivo não é necessário se preocupar com transformações de coordenadas, tais como as transformações de Galileu ou as transformações de Lorentz, que geravam um grande número de confusões tanto na mecânica clássica quanto nas teorias da relatividade de Einstein.

A energia inercial na mecânica relacional deixa de ser dependente do sistema de referência, ao contrário do que acontecia com a energia cinética na mecânica clássica. O motivo para isto é que as energias inerciais

[4] [YvdM68].

U_i vindas das interações gravitacionais de qualquer corpo com as distribuições isotrópicas de matéria ao seu redor, dadas pelas equações (16.40), (16.53) e (16.58), têm sempre o mesmo valor numérico (embora não necessariamente a mesma forma) em todos os sistemas de referência. Por exemplo, no referencial universal U a parte dependente da velocidade da energia de interação gravitacional de m_g com as galáxias distantes é dada por $m_g v_{mU}^2/2$, como visto na equação (16.40). Já em um referencial A no qual o universo como um todo (o conjunto das galáxias distantes) não está girando mas apenas transladando com uma velocidade constante $\vec{V}_{GA}$, a parte dependente da velocidade da energia de interação gravitacional de m_g com as galáxias distantes é dada por $m_g|\vec{v}_{mA} - \vec{V}_{GA}|^2/2$, como visto na equação (16.53), onde $\vec{v}_{mA}$ é a velocidade de m_g em relação ao referencial A. E obviamente $m_g v_{mU}^2/2 = m_g|\vec{v}_{mA} - \vec{V}_{GA}|^2/2$, já que $\vec{v}_{mA} = \vec{v}_{mU} + \vec{V}_{GA}$.

A força inercial $\vec{F}_i$ exercida gravitacionalmente sobre o corpo de prova pelas galáxias distantes deixa de ser dependente do referencial, ao contrário do que ocorria com o termo $m_i\vec{a}$ da mecânica clássica. No caso da mecânica relacional $\vec{F}_i$ tem o mesmo valor numérico (e aponta na mesma direção em relação a outros corpos) em todos os sistemas de referência, embora não precise ter exatamente a mesma forma. Por exemplo, no sistema de referência universal temos: $\vec{F}_i = -\Phi_\infty m_g \vec{a}_{mU}$, equação (16.43). Em um outro referencial A no qual o conjunto das galáxias distantes tem uma aceleração translacional $\vec{A}_{GA}$ temos: $\vec{F}_i = -\Phi_\infty m_g(\vec{a}_{mA} - \vec{A}_{GA})$, equação (16.54), onde $\vec{a}_{mA}$ é a aceleração de m_g em relação ao referencial A. E obviamente $-\Phi_\infty m_g \vec{a}_{mU} = -\Phi_\infty m_g(\vec{a}_{mA} - \vec{A}_{GA})$, já que $\vec{a}_{mA} = \vec{a}_{mU} + \vec{A}_{GA}$.

Em um outro sistema de referência R no qual o conjunto das galáxias distantes gira com uma velocidade angular $\vec{\Omega}_{GR}$ temos: $\vec{F}_i = -\Phi_\infty m_g[\vec{a}_{mR} + \vec{\Omega}_{GR} \times (\vec{\Omega}_{GR} \times \vec{r}_{mR}) + 2\vec{v}_{mR} \times \Omega_{GR} + \vec{r}_{mR} \times d\vec{\Omega}_{GR}/dt]$, equação (16.59).

Embora a forma de $\vec{F}_i$ seja diferente nestes três sistemas de referência U, A e R, o valor numérico é sempre o mesmo. Por este motivo não foi necessário especificar $\vec{F}_i^U$, $\vec{F}_i^A$ ou $\vec{F}_i^G$. Isto é, não precisamos colocar os indicadores U, A e R nas forças. E não apenas o valor numérico é o mesmo, mas a direção de $\vec{F}_i$ é a mesma em todos estes referenciais, apontando sempre para a mesma direção (para o mesmo corpo material). Isto é, se esta força $\vec{F}_i$ sobre m_g está direcionada em um certo momento ao longo da reta unindo m_g com a galáxia Andrômeda, ela vai apontar para esta galáxia em todos os referenciais. Por exemplo, suponha que temos dois corpos 1 e 2 ligados por uma mola e oscilando ao longo da reta que os une no referencial U. Suponha também que esta reta unindo os corpos esteja ao longo da mesma reta unindo o centro de nossa galáxia ao centro de Andrômeda. Então as forças inerciais atuando sobre 1 e 2, $\vec{F}_{i1}$ e $\vec{F}_{i2}$, também vão apontar ao longo da reta conectando 1 a 2, assim como ao longo da reta unindo nossa galáxia a Andrômeda, em todos os sistemas de referência. Isto é devido ao fato de que a força de Weber depende apenas de grandezas relacionais, tais como r_{12}, $\dot{r}_{12}$ e $\ddot{r}_{12}$. Estas grandezas relacionais têm o mesmo valor em todos os referenciais. Logo a força de Weber também tem o mesmo valor em todos os sistemas de referência.

18.8 Interpretação da Força Inercial na Mecânica Clássica e na Mecânica Relacional

18.8.1 A Força Inercial $-m\vec{a}$

As expressões equivalentes *vis insita* ou *vis inertiae* foram introduzidas por Newton na terceira definição no início do *Principia*, como visto na Seção 1.2. Elas foram definidas como sendo um poder de resistir, através do qual todo corpo, estando em um determinado estado de repouso ou de movimento uniforme em linha reta em relação ao espaço absoluto, mantém esse estado. Esse estado poderia ser alterado pela ação de uma força imprimida sendo exercida sobre o corpo. A *vis insita* também foi denominada por ele de força inata da matéria, ou seja, como algo inerente ou interno ao corpo. Já a *vis inertiae* foi denominada por Newton de força de inatividade. A expressão *vis inertiae* pode ser traduzida para a língua portuguesa como *força inercial* ou *força da inércia*. Algumas vezes ela é traduzida por uma única palavra, *inércia*. Alguns autores têm discutido o significado deste conceito na mecânica clássica.[5]

É importante apresentar mais uma vez as palavras textuais de Newton:[6]

> *Definição III: A* vis insita*, ou força inata da matéria, é um poder de resistir, através do qual todo o corpo, estando em um determinado estado, mantém esse estado, seja ele de repouso ou de movimento uniforme em linha reta.*

[5] [Fre71, Cap. 12: Inertial Forces and Noninertial Frames], [GG93, págs. 44-45 e 59-101], [AG95], [AG96], [GG06, Cap. 5: Newton's Force of Inertia: The Basis of Dynamics] e [Cur09, págs. 266-268].

[6] [New90, pág. 2].

> Essa força é sempre proporcional ao corpo ao qual ela pertence, e em nada difere da inatividade da massa, a não ser pela nossa maneira de concebê-la. A partir da natureza inerte da matéria, um corpo não tem seu estado de repouso ou movimento facilmente alterado. Sob esse ponto de vista, essa *vis insita* pode ser chamada, mais significativamente, de inércia (*vis inertiae*) ou força de inatividade. Mas um corpo só exerce essa força quando outra força, imprimida sobre ele, procura mudar sua condição; e o exercício dessa força pode ser considerado tanto como resistência quanto como impulso; resistência na medida em que, para conservar seu estado, o corpo opõe-se à força imprimida; e impulso na medida em que o corpo, não cedendo facilmente à força imprimida por um outro, esforça-se para mudar o estado deste outro corpo. Resistência é normalmente atribuída a corpos em repouso, e impulso àqueles em movimento; mas movimento e repouso, como vulgarmente concebidos, diferem apenas relativamente um ao outro; nem esses corpos estão sempre verdadeiramente em repouso, como vulgarmente são considerados.

Na terceira regra de raciocínio em filosofia, que aparece no início do terceiro livro do *Principia*, Newton discutiu o fato da força inercial ser universal (pertencente a todos os corpos), além de compará-la com a força gravitacional:[7]

> *Regra III: As qualidades dos corpos que não admitem intensificação nem diminuição de graus, e que pertencem a todos os corpos dentro do alcance de nossas experiências, devem ser consideradas como qualidades universais de todos os corpos de qualquer tipo.*
>
> [...] Que todos os corpos são móveis e dotados de certos poderes (que chamamos de inércia) de perseverar em seus movimentos ou em seus repousos, só inferimos a partir de propriedades semelhantes observadas nos corpos que já vimos. A extensão, dureza, impenetrabilidade, mobilidade e inércia do todo resulta da extensão, dureza, impenetrabilidade, mobilidade e inércia das partes. Portanto, concluímos que também as partículas menores de todos os corpos são todas estendidas, duras, impenetráveis, móveis e dotadas com sua própria inércia. E isto é a base de toda filosofia.
>
> [...] Não que eu afirme que a gravidade seja essencial aos corpos. Por sua *vis insita* não quero dizer nada além de sua inércia. Esta é imutável. Sua gravidade diminui na medida em que eles afastam-se da Terra.

A força inercial da mecânica clássica pode ser representada matematicamente, nos referenciais inerciais, pela expressão $-m_{ik}\vec{a}_k$. Ou seja, é o termo do lado direito da segunda lei de Newton dada pela equação (1.5), $m_{ik}\vec{a}_k$, transportado para o lado esquerdo desta equação.

Os principais aspectos ressaltados por Newton na força inercial são os seguintes:

- Ela é proporcional ao corpo de prova, ou seja, é proporcional à sua massa inercial.
- Ela é proporcional à aceleração do corpo em relação ao espaço absoluto.
- Ela é imutável. A força gravitacional, ao contrário, depende da distância entre os corpos que estão interagindo.
- Ela é inata ou intrínseca ao corpo de prova. Portanto, ela não depende dos outros corpos ao redor do corpo de teste.
- Ela é um poder de resistir, através do qual todo corpo, estando em um determinado estado de repouso ou de movimento uniforme em linha reta em relação ao espaço absoluto, mantém esse estado.
- A força impressa sobre o corpo pode alterar este estado.
- Como esta força impressa é resistida pela força inercial, a força inercial controla o efeito e a ordem de grandeza dessa mudança de estado. Por exemplo, se uma mesma força impressa atuar sobre dois corpos com massas inerciais diferentes, aquele que tiver uma maior massa inercial vai deslocar-se em relação ao espaço absoluto com uma menor aceleração, do que a aceleração produzida no corpo com menor massa inercial. Como exemplo de uma mesma força atuando sobre dois corpos de massas inerciais diferentes, pode-se pensar em uma mesma mola esticada do mesmo valor entre uma parede e cada um destes corpos, sendo solta do repouso.

---

[7] [New08b, págs. 186-187].

- Um corpo só exerce essa força inercial quando outra força, imprimida sobre ele, procura mudar seu estado de repouso ou de movimento uniforme em linha reta em relação ao espaço absoluto.

Já na mecânica relacional, como visto nas Seções 16.2 e 16.6, denominamos de *força inercial* à força $\vec{F}_i$ exercida gravitacionalmente sobre o corpo de prova pela distribuição isotrópica de matéria ao seu redor. No referencial universal U no qual o conjunto de galáxias distantes está em repouso, mostrou-se que esta força é dada por $-\Phi_\infty m_g \vec{a}_{mU}$, onde m_g é a massa gravitacional do corpo de teste e $\vec{a}_{mU}$ sua aceleração em relação ao referencial universal U, equação (16.43). Esta força recebeu esta denominação por ter muitas propriedades similares à força inercial newtoniana. A equação de movimento da mecânica relacional no referencial universal é dada pela equação (16.64), a saber, $\sum_{\substack{p=1 \\ p\neq k}}^N \vec{F}_{pk} - \Phi_\infty m_{gk} \vec{a}_{kU} = \vec{0}$.

A seguir apresentamos as principais características da força inercial na mecânica relacional, comparando-as com as propriedades análogas da força inercial na mecânica clássica.

- Ela é proporcional ao corpo de prova. Na mecânica relacional esta força é proporcional à massa gravitacional do corpo, enquanto que na mecânica clássica ela é proporcional à sua massa inercial.

- Ela é proporcional à aceleração do corpo de prova. Na mecânica relacional esta aceleração ocorre em relação ao conjunto das galáxias distantes. Já na mecânica clássica esta aceleração ocorre em relação ao espaço absoluto de Newton, que não tem relação com nada material externo ao corpo.

- Na mecânica relacional ela depende da distribuição isotrópica de matéria ao redor do corpo de prova. Se esta distribuição mudar, automaticamente altera-se a força inercial. Porém, enquanto esta distribuição de matéria permanecer inalterada, a força inercial vai ser imutável. Já na mecânica newtoniana a força inercial é sempre imutável, não dependendo da distribuição de matéria ao redor do corpo de prova.

- Na mecânica relacional ela vem de uma interação gravitacional entre o corpo de prova e a distribuição isotrópica de matéria ao seu redor. Já na mecânica clássica ela é inata e intrínseca ao corpo de prova, não dependendo de sua interação com outros corpos ao seu redor.

- Ela é um poder de resistir, através do qual todo corpo, estando em um determinado estado de repouso ou de movimento uniforme em linha reta, mantém esse estado. Na mecânica relacional este estado de repouso ou de movimento é para ser entendido em relação ao referencial universal U definido pelas galáxias ao redor do corpo. Já na mecânica newtoniana este estado de repouso ou de movimento é para ser entendido em relação ao espaço absoluto que, de acordo com Newton, não tem relação com qualquer coisa externa ao corpo.

- A força impressa resultante exercida pela distribuição anisotrópica de corpos ao redor do corpo de prova pode alterar o estado de movimento deste corpo. Como esta força impressa é resistida pela força inercial, a força inercial controla o efeito e a ordem de grandeza dessa mudança de estado. Na mecânica relacional a força inercial aumenta com o aumento da massa gravitacional do corpo de prova, enquanto que na mecânica newtoniana ela aumenta com o aumento da massa inercial do corpo de prova. A mudança de estado ocorre em relação ao referencial universal U na mecânica relacional, enquanto que na mecânica clássica essa mudança de estado ocorre em relação ao espaço absoluto.

- Na mecânica relacional esta força inercial só é exercida pelas galáxias distantes sobre o corpo de prova quando outra força, impressa sobre ele, procura mudar seu estado de repouso ou de movimento em linha reta em relação ao referencial universal U das galáxias distantes. Já na mecânica newtoniana é o próprio corpo que exerce esta força inercial quando outra força, impressa sobre ele, tenta mudar seu estado de repouso ou de movimento uniforme em linha reta em relação ao espaço absoluto.

Ou seja, enquanto na mecânica clássica esta força inercial é exercida pelo próprio corpo, na mecânica relacional esta força inercial atua sobre o corpo, sendo exercida gravitacionalmente pelas galáxias ao seu redor. Na mecânica relacional ela deixa de ser uma força intrínseca ao corpo, já que vem de uma interação gravitacional entre ele e a distribuição isotrópica de matéria ao seu redor. Esta força inercial vai existir na mecânica relacional sempre que houver uma aceleração relativa entre o corpo de prova e o conjunto de galáxias ao seu redor.

O comportamento e os efeitos da força inercial $-m_i\vec{a}$ introduzida por Newton nos referenciais inerciais da mecânica clássica são semelhantes ao comportamento e aos efeitos da força $\vec{F}_i \equiv -\Phi_\infty m_g \vec{a}_{mU}$ da mecânica relacional no referencial universal. Por este motivo resolvemos utilizar o mesmo nome para designar esta última expressão, a saber, "força inercial." Esta é uma homenagem a Newton por ter introduzido esta

expressão na mecânica clássica, além de ter sido muito claro sobre as propriedades associadas a esta força. Apesar destas duas forças terem o mesmo nome, a interpretação conceitual da força inercial na mecânica newtoniana é bem diferente da interpretação da força inercial na mecânica relacional.

Existem alguns aspectos que tornam esta distinção bem clara, a saber:

- Na mecânica newtoniana não se encontra o agente físico responsável pela força inercial. Na mecânica relacional este agente físico é identificado como sendo o conjunto das galáxias distantes. Além disso, o tipo de interação é identificado como sendo de origem gravitacional. Isto é, a força inercial vem da componente da força de Weber que depende da aceleração relativa $\ddot{r}$ entre os corpos que estão interagindo. Em particular, a força inercial vai surgir na mecânica relacional sempre que houver uma aceleração relativa entre o corpo de prova e o conjunto de galáxias ao seu redor.

- Na mecânica clássica a força inercial $-m_i\vec{a}$ só depende da massa inercial intrínseca ao corpo de prova e da sua aceleração em relação ao espaço absoluto de Newton. Este espaço absoluto não tem relação com nenhum outro corpo material. Já na mecânica relacional a força inercial $-\Phi_\infty m_g\vec{a}_{mU}$ exercida pelas galáxias distantes sobre um corpo de massa gravitacional m_g depende não apenas desta massa gravitacional e da aceleração do corpo de prova em relação ao conjunto de galáxias, mas também da densidade de massa gravitacional média do universo dada por ρ_{go}. Esta densidade aparece nas equações (16.43) e (16.64) através da constante Φ_∞, sendo esta constante Φ_∞ proporcional à densidade ρ_{go}, equação (16.41). Se fosse possível aumentar ou diminuir esta densidade, comparada com seu valor conhecido hoje em dia, seria possível controlar a força inercial atuando sobre qualquer corpo.

18.8.2 Ação e Reação da Força Inercial

Uma distinção bem importante que ocorre entre a mecânica clássica e a mecânica relacional diz respeito ao princípio de ação e reação quando se refere à força inercial.

Na mecânica clássica a força inercial $-m_i\vec{a}$ não satisfaz ao princípio de ação e reação. O fato de que as forças inerciais (do tipo $-m_i\vec{a}$ na segunda lei de Newton, a força centrífuga, a força de Coriolis etc.) da mecânica clássica não satisfazem à lei da ação e reação foi apontado claramente por Einstein na Apresentação do livro *Conceitos de Espaço*, de Max Jammer:[8]

> [...] o espaço (como sistema inercial) atua sobre todos os objetos materiais, ao passo que estes não exercem nenhuma ação sobre o espaço.

Este fato apontado por Einstein pode ser visto claramente no caso da experiência do balde. Se o balde e a água estão parados ou em movimento retilíneo uniforme em relação ao espaço absoluto newtoniano, a superfície da água é plana. Quando a água está girando em relação ao espaço absoluto, sua superfície livre fica curva, tendo subido em direção às paredes do balde e abaixado ao longo do eixo de rotação. Pode-se dizer então que o espaço absoluto está atuando sobre a água, empurrando-a para as paredes do balde. Por outro lado, não acontece nada com o espaço absoluto, isto é, a água girando não exerce qualquer força de reação no espaço.

Este fato de que a força inercial não satisfaz ao princípio de ação e reação na mecânica clássica foi apontado corretamente por Graneau e Graneau como sendo uma falha importante da teoria newtoniana.[9]

Já na mecânica relacional a força inercial satisfaz ao princípio de ação e reação, assim como ocorre com todas as outras forças da natureza. Vamos considerar, em particular, que estamos analisando o movimento de um corpo de prova com massa gravitacional m_g deslocando-se em relação ao referencial universal U com uma aceleração $\vec{a}_{mU}$. A força inercial exercida pelo conjunto de galáxias sobre ele é dada por $\vec{F}_i = -\Phi_\infty m_g\vec{a}_{mU}$, equação (16.43). Já a força exercida por este corpo sobre o conjunto de galáxias distantes é dada por $\vec{F}_{mi} = \Phi_\infty m_g\vec{a}_{mU}$, equação (16.44). Ou seja, as duas forças são iguais e opostas. Nas figuras deste livro $\vec{F}_{mi}$ será representada como atuando em apenas uma galáxia, mas deve ser entendido que esta força está distribuída sobre todas as galáxias.

18.8.3 A Força Inercial Centrífuga e a Força Inercial de Coriolis

Além da força $-m_i\vec{a}$, as outras forças inerciais que aparecem na mecânica clássica são a força centrífuga e a força de Coriolis, discutidas na Seção 10.3 e na Subseção 10.4.2, respectivamente. Estas forças são

[8] [Jam93, pág. xvi] e [Jam10, pág. 18].
[9] [GG06, pág. 96].

consideradas fictícias na mecânica clássica, só aparecendo em referenciais não inerciais que estão girando em relação a um referencial inercial. Não se encontra um agente físico que cause estas forças. Como na mecânica clássica estas forças inerciais não surgem de uma interação, elas não têm origem gravitacional, elétrica, magnética, elástica, nuclear etc. Ou seja, as forças inerciais na mecânica clássica não surgem de qualquer tipo de interação entre corpos.

Na mecânica relacional a força análoga à força centrífuga da mecânica clássica é dada pela componente $-\Phi_\infty m_g \vec{\Omega}_{GR} \times (\vec{\Omega}_{GR} \times \vec{r}_{mR})$ da equação (16.59). Ela é proporcional à massa gravitacional m_g do corpo de prova, à densidade média de massa gravitacional do universo ρ_{go} que está embutida na constante Φ_∞ através da equação (16.41), além de depender da velocidade angular $\vec{\Omega}_{GR}$ do conjunto de galáxias em relação ao referencial R.

Na mecânica relacional a força análoga à força de Coriolis da mecânica clássica é dada pela componente $-\Phi_\infty 2 m_g \vec{v}_{mR} \times \vec{\Omega}_{GR}$ da equação (16.59). Ela é proporcional à massa gravitacional m_g do corpo de prova, à densidade média de massa gravitacional do universo ρ_{go} que está embutida na constante Φ_∞ através da equação (16.41), além de depender da velocidade angular $\vec{\Omega}_{GR}$ do conjunto de galáxias em relação ao referencial R e da velocidade $\vec{v}_{mR}$ do corpo de prova em relação ao referencial R.

A força centrífuga da mecânica clássica e a componente análoga da mecânica relacional têm a mesma fórmula, fornecem o mesmo valor numérico e apontam na mesma direção ao atuarem sobre o corpo de prova. O mesmo pode ser dito da força de Coriolis da mecânica clássica e a componente análoga da mecânica relacional. Contudo, a interpretação conceitual sobre a origem desta força centrífuga e desta força de Coriolis na mecânica relacional é totalmente diferente da interpretação oferecida pela mecânica clássica.

Também se aplica tanto à força centrífuga quanto à força de Coriolis tudo o que foi dito na Subseção 18.8.1 quando a força inercial $-m_i \vec{a}$ da mecânica clássica foi comparada com a força inercial $-\Phi_\infty m_g \vec{a}_{mU}$ da mecânica relacional.

18.8.4 A Energia Cinética na Mecânica Clássica e a Energia Inercial na Mecânica Relacional

As mesmas semelhanças e diferenças aparecem na energia cinética da mecânica clássica quando comparada com a energia inercial da mecânica relacional. A energia cinética da mecânica newtoniana é dada por $m_i(\vec{v} \cdot \vec{v})^2/2$, com m_i sendo a massa inercial da partícula teste e $\vec{v}$ sua velocidade em relação ao espaço absoluto de Newton ou em relação a um referencial inercial. Já a energia inercial da mecânica relacional é dada no referencial universal U por $m_g(\vec{v}_{mU} \cdot \vec{v}_{mU})^2$, onde m_g é a massa gravitacional da partícula e $\vec{v}_{mU}$ sua velocidade em relação ao referencial das galáxias distantes. Enquanto que a primeira energia não vem de qualquer tipo de interação, a segunda energia vem de uma interação gravitacional entre o corpo de prova e o conjunto de galáxias ao seu redor.

18.9 Como Passar dos Resultados da Mecânica Clássica para os Resultados Análogos da Mecânica Relacional

A segunda lei de Newton para um corpo k de massa inercial m_{ik} deslocando-se em um referencial inercial é dada pela equação (1.5):

$$\sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^{N} \vec{F}_{pk} = m_{ik} \vec{a}_k \ . \tag{18.16}$$

Aqui $\sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^{N} \vec{F}_{pk}$ é a força resultante atuando sobre k, sendo $\vec{a}_k$ sua aceleração em relação ao referencial inercial.

A equação de movimento da mecânica relacional no referencial universal U fica na forma da equação (16.64):

$$\sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^{N} \vec{F}_{pk} + \vec{F}_i = \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^{N} \vec{F}_{pk} - \Phi_\infty m_{gk} \vec{a}_{kU} = \vec{0} \ . \tag{18.17}$$

Aqui $\sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^{N} \vec{F}_{pk}$ é a força sobre k devida às distribuições anisotrópicas de matéria ao seu redor, enquanto que $\vec{F}_i = -\Phi_\infty m_g \vec{a}_{mU}$ é a força sobre k devida às distribuições isotrópicas de matéria ao seu redor. Além disso, $\vec{a}_{kU}$ é a aceleração de k em relação ao referencial universal U, enquanto que a constante Φ_∞ é dada pelas equações (16.41) e (17.29).

Do que já foi visto até o momento, fica fácil fazer a transição da mecânica clássica para a mecânica relacional. Listamos as principais mudanças que têm de ser feitas para uma passagem suave:

- Na mecânica clássica existem os conceitos de massa inercial e massa gravitacional. Na mecânica relacional só é introduzido o conceito de massa gravitacional. A transição da mecânica newtoniana para a mecânica relacional pode ser feita falando apenas de massa gravitacional na mecânica newtoniana.

- A segunda lei de Newton assume sua forma mais simples, sem as forças fictícias, quando o movimento de um corpo é descrito em relação ao espaço absoluto ou em relação a um referencial inercial, equação (18.16). A equação de movimento da mecânica relacional assume sua forma mais simples no referencial universal U das galáxias distantes ou em relação a qualquer referencial que desloca-se com velocidade constante em relação ao referencial U, equação (18.17). A transição pode ser feita descrevendo os movimentos na mecânica newtoniana no referencial universal U, ou em qualquer referencial que se desloque com velocidade constante em relação ao referencial U.

- Substituir na segunda lei de Newton aplicada em um referencial inercial o termo $m_{ik}\vec{a}_k$ pelo termo $\Phi_\infty m_{gk}\vec{a}_{kU}$.

- Ao desenhar as forças atuando sobre uma partícula em qualquer figura da mecânica clássica descrita em um referencial inercial, acrescentar a força inercial $-m_{ik}\vec{a}_k$, ou seja, acrescentar a força $-\Phi_\infty m_{gk}\vec{a}_{kU}$.

- Lembrar que na mecânica relacional a força inercial é uma força real, assim como todas as outras forças de interação. Em particular, a força inercial vem de uma interação gravitacional entre o corpo de prova e o conjunto de galáxias distantes, existindo sempre que houver uma aceleração relativa entre o corpo de prova e o conjunto de galáxias. Logo, ao introduzir nas figuras da mecânica clássica a força inercial $-m_{ik}\vec{a}_k$, esta força deve ser considerada como vindo de uma interação entre corpos, assim como ocorre com todas as outras forças que são usualmente representadas nos diagramas de força da mecânica newtoniana.

- Os referenciais não inerciais passam a ser entendidos como os referenciais nos quais o conjunto de galáxias está acelerado. Caso o conjunto de galáxias esteja girando em algum referencial, vão surgir a chamada força inercial centrífuga e a denominada força inercial de Coriolis. Elas devem ser entendidas como forças reais de origem gravitacional, surgindo mais uma vez da interação do corpo de prova com o conjunto de galáxias.

Com isto é possível manter a maioria dos resultados da mecânica newtoniana, com todos seus sucessos, mudando apenas a interpretação das experiências.

O caminho inverso, ou seja, começar com a mecânica relacional e chegar nos resultados análogos da mecânica clássica, será visto nos Capítulos 19 até 22.

18.10 Resumo dos Principais Resultados da Mecânica Relacional ao Compará-la com a Mecânica Newtoniana

Resumimos aqui as principais consequências diretas da mecânica relacional quando a comparamos com a mecânica newtoniana:

- *Foram deduzidas* equações similares à primeira e segunda leis do movimento de Newton.

- *Foi deduzida* a proporcionalidade entre a massa inercial e a massa gravitacional.

- *Foi deduzido* o fato de que o melhor sistema de referência inercial de que dispomos é aquele das galáxias distantes, isto é, o referencial universal U.

- *Foi deduzida* a igualdade da rotação cinemática da Terra com sua rotação dinâmica. Isto é, foi *deduzido* o fato observacional de que $\vec{\omega}_c = \vec{\omega}_d$.

- *Foi deduzida* a energia cinética como sendo mais uma energia de interação, assim como todas as outras energias já conhecidas (energia potencial gravitacional, energia potencial elétrica, energia potencial magnética, energia potencial elástica, energia nuclear, energia térmica etc.). No caso particular da energia cinética, mostrou-se que ela é uma energia de interação gravitacional entre o corpo de prova e o conjunto das galáxias distantes. Esta energia vai ser diferente de zero sempre que o corpo de prova tiver uma velocidade não nula em relação ao conjunto das galáxias distantes.

- *Foi deduzido* o fato de que as forças fictícias da mecânica newtoniana são de fato forças reais como todas as outras forças usuais. Neste caso, são forças de origem gravitacional agindo sobre o corpo de prova e sendo exercidas pelo conjunto de galáxias distantes. Estas forças vão atuar sempre que o conjunto de galáxias estiver acelerado em relação ao corpo de prova. Em particular, tanto a força centrífuga quanto a força de Coriolis da mecânica clássica passam a ser explicadas na mecânica relacional como sendo forças gravitacionais exercidas pelo conjunto de galáxias distantes sobre o corpo de prova. Elas vão atuar em todo referencial R no qual há uma rotação do conjunto de galáxias distantes.

- *Foi deduzida* a equação (17.9) relacionando a constante G da lei da gravitação universal da mecânica clássica e as constantes cosmológicas α e ρ_{go} da mecânica relacional, sendo α a constante característica de decaimento exponencial da gravitação dada pela equação (16.17) e sendo ρ_{go} a densidade média de massa gravitacional do universo. Também foi *deduzida* a equação (17.14) relacionando G com ρ_{go} e com a constante de Hubble H_o.

- As forças inerciais da mecânica relacional, $\vec{F}_i$, têm sempre o mesmo valor numérico em todos os sistemas de referência, embora não necessariamente a mesma forma. Além disso, se esta força ao atuar sobre um certo corpo de prova aponta na reta que une este corpo a uma certa galáxia qualquer, então ela vai apontar nesta direção em todos os referenciais. Ou seja, na mecânica relacional não é necessário se preocupar com transformações de coordenadas. Já na mecânica clássica e nas teorias da relatividade de Einstein era necessário lidar com transformações de Galileu, transformações de Lorentz etc.

- *Foi deduzido* que o termo $-m_{ik}\vec{a}_k$ que aparece na segunda lei de Newton da mecânica clássica descrita em um referencial inercial, equação (1.5), é equivalente à força inercial $-\Phi_\infty m_{gk}\vec{a}_{kU}$ da mecânica relacional, equação (16.64). Este termo passa a ser entendido como uma força real atuando sobre o corpo de prova k de massa gravitacional m_{gk} sempre que ele tiver uma aceleração $\vec{a}_{kU}$ em relação ao referencial universal U no qual o conjunto de galáxias está parado. Esta força é de origem gravitacional, surgindo da componente com aceleração que está presente na lei de Weber gravitacional. Esta força é exercida sobre o corpo de prova pelo conjunto de galáxias ao seu redor. Esta força vai existir sempre que houver uma aceleração *relativa* entre o corpo de prova e o conjunto de galáxias ao seu redor.

Parte VI

Aplicações da Mecânica Relacional

Capítulo 19

Corpos em Repouso ou em Movimento Retilíneo Uniforme sobre a Terra

19.1 Equação de Movimento quando é Nula a Força Resultante sobre um Corpo devida à Sua Interação com os Corpos Locais

Vamos supor que temos N corpos locais interagindo entre si, além de interagirem com a distribuição isotrópica de matéria ao redor destes corpos. Seja k um corpo de prova pertencente a este conjunto de N corpos. Vamos supor que ele tenha uma massa gravitacional m_{gk}. A equação do movimento da mecânica relacional em um sistema de referência U em relação ao qual o conjunto das galáxias distantes está em repouso e sem rotação é dada pela equação (16.64):

$$\sum_{\substack{p=1 \\ p\neq k}}^{N} \vec{F}_{pk} - \Phi_\infty m_{gk} \vec{a}_{kU} = \vec{0} \ . \tag{19.1}$$

Nesta equação a aceleração $\vec{a}_{kU}$ é a aceleração de k em relação ao referencial U.

Nesta Seção vamos assumir que é nula a força resultante sobre k devida aos $N-1$ corpos locais:

$$\sum_{\substack{p=1 \\ p\neq k}}^{N} \vec{F}_{pk} = \vec{0} \ . \tag{19.2}$$

As equações (19.1) e (19.2) levam às seguintes consequências (observando que $m_{gk} \neq 0$):

$$\vec{a}_{kU} = \vec{0} \ , \quad \text{ou seja,} \quad \vec{v}_{kU} = \frac{d\vec{r}_{kU}}{dt} = \text{constante no tempo} \ . \tag{19.3}$$

A diferença em relação à equação (1.24) da mecânica newtoniana é que a velocidade $\vec{v}_{kU}$ que aparece na equação (19.3) é a velocidade da partícula teste m_{gk} em relação a este sistema de referência definido pelas galáxias distantes. Obviamente se a velocidade do corpo de prova é constante neste referencial, ela também vai ser constante em qualquer outro sistema de referência que se move com uma velocidade constante em relação ao referencial universal.

A aceleração centrípeta típica do sistema solar ao descrever uma órbita circular ao redor do centro de nossa galáxia em relação ao referencial das galáxias distantes, figura 3.5, é da ordem de 10^{-10} m/s^2. Ao desprezar acelerações desta ordem de grandeza, podemos dizer que o corpo de prova vai se mover com uma velocidade constante em relação ao referencial F das estrelas fixas ou em relação a qualquer outro sistema de referência que se move com uma velocidade linear constante em relação ao conjunto das estrelas fixas:

$$\vec{a}_{kF} = \vec{0} \ , \quad \text{ou seja,} \quad \vec{v}_{kF} = \frac{d\vec{r}_{kF}}{dt} = \text{constante no tempo} \ . \tag{19.4}$$

A aceleração centrípeta típica da Terra ao descrever uma órbita elíptica ao redor do Sol, em relação ao referencial das estrelas fixas, é da ordem de 6×10^{-3} m/s^2, figura 3.4. Já a aceleração centrípeta de uma partícula no equador terrestre, devida à rotação diária da Terra ao redor de seu eixo em relação ao referencial

das estrelas fixas, é da ordem de $3,4 \times 10^{-2}\ m/s^2$, figura 3.3. Se pudermos desprezar acelerações desta ordem de grandeza, então poderemos dizer que o corpo de prova vai se mover com uma velocidade constante em relação à Terra ou em relação a qualquer outro referencial que se move com velocidade linear constante em relação à Terra. Neste Capítulo vamos assumir que estas condições sejam satisfeitas. A equação de movimento do corpo k pode então ser escrita da seguinte forma:

$$\vec{a}_{kT} = \vec{0} \ , \quad \text{ou seja,} \quad \vec{v}_{kT} = \frac{d\vec{r}_{kT}}{dt} = \text{constante no tempo} \ , \tag{19.5}$$

onde $\vec{a}_{kT}$ é a aceleração do corpo de prova k em relação à Terra, sendo $\vec{v}_{kT}$ sua velocidade em relação ao solo.

Escolhendo a constante H_g como sendo dada pela constante G da gravitação universal, equação (17.28), obtém-se que as forças de interação da mecânica relacional podem ser escritas como as forças usuais da mecânica clássica, como visto na Seção 17.2.

Todos os resultados obtidos com a mecânica relacional coincidem com os resultados equivalentes obtidos na mecânica clássica nos casos em que a força resultante devida às interações do corpo de prova com a distribuição anisotrópica de corpos ao seu redor for nula (ou seja, quando a força $\vec{F}_a$ é nula, equação (19.2), sendo esta força $\vec{F}_a$ apresentada na Seção 16.2). Apenas as interpretações são diferentes. Na mecânica clássica dizemos que nestas condições o corpo de prova vai ficar parado ou em movimento retilíneo uniforme em relação ao espaço absoluto, figura 19.1 (a), ou em relação a qualquer referencial inercial que se desloca com velocidade constante em relação ao espaço absoluto. Já na mecânica relacional dizemos que nestas condições o corpo de prova vai ficar parado ou em movimento retilíneo uniforme em relação ao referencial universal U das galáxias distantes, figura 19.1 (b), ou relação a qualquer referencial que se desloca com velocidade constante em relação ao referencial U.

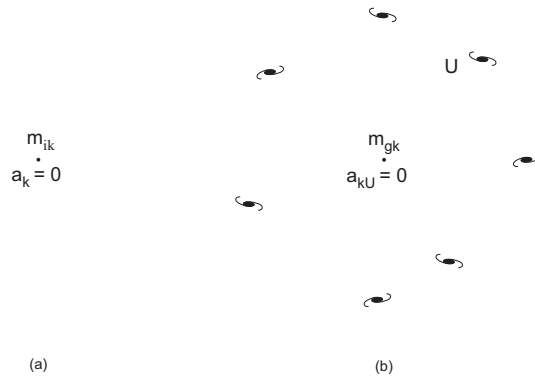



Figura 19.1: Casos nos quais é nula a força resultante devida aos corpos locais atuando sobre um corpo de prova k. (a) Na mecânica clássica o corpo de massa inercial m_{ik} não fica acelerado em relação ao espaço absoluto. (b) Na mecânica relacional o corpo de massa gravitacional m_{gk} não fica acelerado em relação ao referencial universal U.

Existem situações nas quais são válidas as condições especificas pelas equações (17.70) ou (17.73), juntamente com a equação (19.2). Nestes casos a equação (19.1) da mecânica relacional leva à conclusão de que o corpo de prova vai ficar parado ou em movimento retilíneo uniforme não apenas em relação ao referencial universal U, mas também em relação ao referencial F das estrelas fixas, figura 19.2. Como a Via Láctea está deslocando-se em relação ao referencial U das galáxias, as velocidades $\vec{v}_{kU}$ e $\vec{v}_{kF}$ não precisam ser iguais, embora ambas sejam constantes no tempo.

Quando as condições especificadas pelas equações (17.67) e (19.2) são válidas, podemos também dizer na mecânica relacional que o corpo vai ficar parado ou em movimento retilíneo uniforme no referencial U das galáxias, no referencial F das estrelas fixas, ou no referencial terrestre T, figura 19.3.

19.2 Corpo Dependurado em uma Mola Parada ou Deslizando com Velocidade Constante em Relação ao Solo

Vamos considerar aqui um único caso de um corpo parado em relação ao solo para ilustrar as semelhanças e diferenças entre a mecânica clássica e a mecânica relacional. Vamos considerar um corpo de massa gravita-

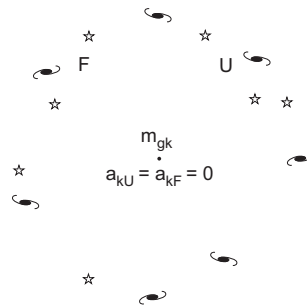



Figura 19.2: Na mecânica relacional o corpo de massa gravitacional m_{gk} não fica acelerado em relação ao referencial universal U nem em relação ao referencial F das estrelas fixas.

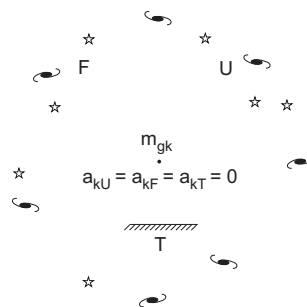



Figura 19.3: Na mecânica relacional o corpo de massa gravitacional m_{gk} não fica acelerado em relação ao referencial universal U, em relação ao referencial F das estrelas fixas, nem em relação ao referencial T terrestre.

cional m_g que está dependurado em uma mola vertical enquanto está sendo atraído gravitacionalmente pela Terra. Vamos desprezar a massa gravitacional da mola comparada com a massa gravitacional do corpo de prova. Esta situação foi estudada nas Seções 4.2 e 10.1. Vamos supor o corpo e a mola parados em relação ao solo. Vamos supor ainda que a mola tem um comprimento ℓ_o quando está parada na vertical suspensa por sua extremidade superior a um suporte fixo no solo. Ao colocar o corpo de prova em sua extremidade inferior e aguardar até que alcancem o equilíbrio, observa-se que o comprimento da mola passa a ser ℓ. Esta situação está representada na figura 19.4 (a). A força peso P exercida pela Terra é contrabalançada pela força elástica $F_e = k(\ell - \ell_o)$ exercida pela mola, figura 19.4 (b). Nesta figura estamos desprezando as acelerações do sistema solar e da Terra em relação ao referencial universal U.

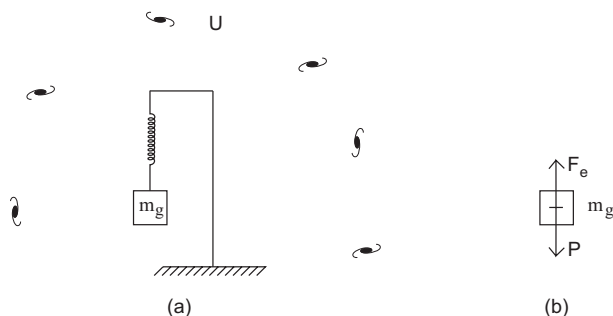



Figura 19.4: (a) Corpo parado no solo dependurado por uma mola, como visto no referencial universal U. (b) A força peso $\vec{P}$ é contrabalançada pela força elástica $\vec{F}_e$.

Já na figura 19.5 (a) temos a mesma situação da figura 19.4 (a), só que agora vista de um referencial A no qual o conjunto de galáxias tem uma aceleração $\vec{A}_{GA}$, a Terra tem uma aceleração $\vec{a}_{TA}$ e o corpo de massa gravitacional m_g tem uma aceleração $\vec{a}_{mA}$. Estas três acelerações são iguais: $\vec{A}_{GA} = \vec{a}_{TA} = \vec{a}_{mA}$. Elas podem ter um valor arbitrário, tal como 20 m/s^2. De acordo com a equação (16.72), a força inercial exercida pelo conjunto de galáxias distantes sobre o corpo preso à mola continua sendo nula, já que $\vec{a}_{mA} - \vec{A}_{GA} = \vec{0}$.

Isto significa que mesmo neste referencial A no qual o corpo m_g está acelerado, as únicas forças que vão estar atuando sobre ele de acordo com a mecânica relacional continuam sendo o peso exercido pela Terra e a força elástica exercida pela mola esticada, figura 19.5 (b).

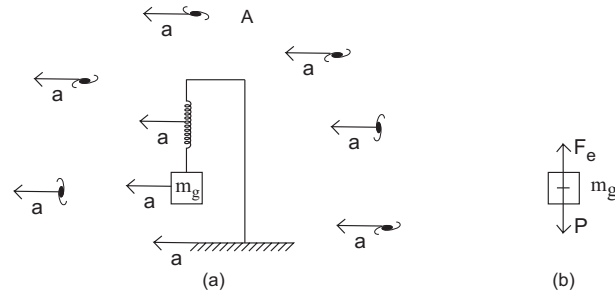



Figura 19.5: (a) Corpo parado no solo dependurado por uma mola, como visto em um referencial A no qual o corpo, a mola, a Terra e as galáxias têm a mesma aceleração constante. (b) A força peso $\vec{P}$ é contrabalançada pela força elástica $\vec{F}_e$.

Na mecânica clássica esta última situação recebia uma outra interpretação. O referencial não inercial S' da Seção 10.1 coincide com o referencial A desta Seção. Como visto na figura 10.4, era necessário introduzir neste referencial não inercial S' ou A, uma força fictícia F_f horizontal neste caso, já que a aceleração que aparece na segunda lei de Newton era interpretada como sendo a aceleração do corpo em relação ao referencial no qual estava sendo analisado o movimento. Já na mecânica relacional a única aceleração relevante é a aceleração *relativa* entre o corpo de prova e o conjunto das galáxias distantes. Quando esta aceleração relativa é nula, não vão haver forças inerciais no referencial U, nem no referencial A, nem em qualquer outro referencial arbitrário no qual o movimento esteja sendo analisado.

Vamos agora supor o caso em que a extremidade superior da mola está presa a um vagão que pode deslocar-se em relação ao solo. Observa-se que mesmo quando o vagão está deslocando-se com uma velocidade constante v_T em relação ao solo, a mola continua na vertical, figura 19.6 (a).

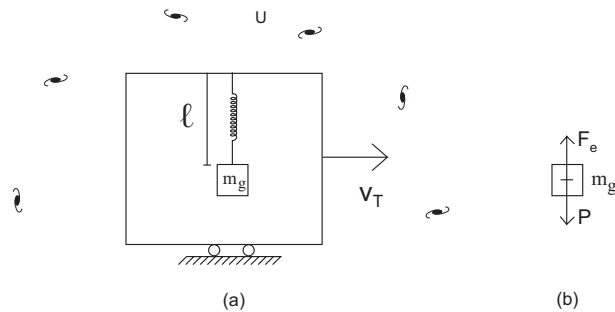



Figura 19.6: (a) Vagão deslocando-se em relação ao solo com uma velocidade constante v_T. (b) Forças atuando sobre o corpo preso à mola.

Na mecânica relacional as forças atuando sobre o corpo de massa gravitacional m_g continuam sendo o peso P e a força elástica F_e. O peso $P = m_g g$ é uma força exercida gravitacionalmente pela Terra sobre o corpo apontando para baixo, enquanto que a força elástica $F_e = k(\ell - \ell_o)$ é uma força exercida pela mola esticada sobre o corpo apontando para cima. Neste caso continua não havendo força inercial exercida gravitacionalmente pelas galáxias sobre o corpo, já que não há uma aceleração entre eles na aproximação que está sendo considerada aqui.

As principais diferenças entre a mecânica relacional e a mecânica newtoniana aparecem quando o corpo de prova está acelerado em relação ao referencial universal U. Este é o tema dos próximos Capítulos.

Capítulo 20

Corpos em Movimento Retilíneo com Aceleração Constante sobre a Terra

Consideramos agora situações nas quais é válida as equação (17.67), de tal forma que só precisamos considerar a aceleração do corpo de prova em relação à superfície terrestre. Nesta aproximação a aceleração do corpo de prova k de massa gravitacional m_{gk} em relação ao conjunto das galáxias distantes, $\vec{a}_{kU}$, será essencialmente a mesma que sua aceleração em relação ao referencial das estrelas fixas, $\vec{a}_{kF}$, ou em relação à Terra, $\vec{a}_{kT}$:

$$\vec{a}_{kU} = \vec{a}_{kF} = \vec{a}_{kT} \ . \tag{20.1}$$

A equação de movimento para este corpo de prova de massa gravitacional m_{gk} é então dada por (17.69):

$$\sum_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{N} \vec{F}_{pk} - \Phi_\infty m_{gk}\vec{a}_{kU} = \sum_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{N} \vec{F}_{pk} - \Phi_\infty m_{gk}\vec{a}_{kF} = \sum_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{N} \vec{F}_{pk} - \Phi_\infty m_{gk}\vec{a}_{kT} = \vec{0} \ . \tag{20.2}$$

Analisamos nesta aproximação uma situação em que $\sum_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{N} \vec{F}_{pk} = \vec{F}_o =$ constante. A aplicação da equação (20.2) leva a:

$$\vec{a}_{kT} = \frac{d\vec{v}_{kT}}{dt} = \frac{\vec{F}_o}{\Phi_\infty m_g} = \text{constante} \ . \tag{20.3}$$

Mais uma vez a diferença em relação à mecânica newtoniana é que esta não é a aceleração do corpo de prova em relação ao espaço absoluto nem em relação a referenciais inerciais, mas sim em relação à superfície terrestre, ou em relação às estrelas fixas, ou em relação ao referencial universal das galáxias distantes (nesta aproximação sendo considerada aqui onde é válida a equação (17.67)).

Se estivermos em um referencial A no qual o universo como um todo (o conjunto das galáxias distantes) tem uma aceleração translacional $\vec{A}_{GA}$ em relação a este referencial A, sem ter nenhuma rotação, a equação de movimento da mecânica relacional ficará na forma da equação (16.72), a saber:

$$\sum_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{N} \vec{F}_{pk} - \Phi_\infty m_{gk}(\vec{a}_{kA} - \vec{A}_{GA}) = \vec{0} \ . \tag{20.4}$$

No caso de uma força anisotrópica constante, $\sum_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{N} \vec{F}_{pk} = \vec{F}_o =$ constante, obtemos:

$$\vec{F}_o + \Phi_\infty m_{gk}\vec{A}_{GA} - \Phi_\infty m_{gk}\vec{a}_{kA} = \vec{0} \ . \tag{20.5}$$

Aqui $\vec{a}_{kA}$ é a aceleração do corpo de prova k neste referencial A. Se este referencial está fixo com o corpo de prova, $\vec{a}_{kA} = \vec{0}$. Isto significa que a força constante $\vec{F}_o$ é contrabalançada pela força gravitacional exercida sobre k pelo conjunto de galáxias que está deslocando-se em relação ao referencial A com uma aceleração $\vec{A}_{GA}$. Ou seja, $\vec{F}_o = -\Phi_\infty m_{gk}\vec{A}_{GA}$.

20.1 Queda Livre

20.1.1 Estudo do Movimento no Referencial Terrestre e no Referencial do Corpo de Prova

Quando consideramos o peso de um corpo sobre a superfície da Terra, ele não é mais dado simplesmente por $\vec{P} = m_g \vec{g}$, com $\vec{g} = -GM_{gT}\hat{r}/R_T^2$, já que esta expressão foi obtida com a lei de Newton da gravitação. Na mecânica relacional substituímos esta lei por uma força de Weber para a gravitação. Para saber a força exercida pela Terra sobre um corpo de prova movendo-se em sua superfície precisamos integrar a equação (16.31) para toda a Terra. Mas neste Capítulo só vamos considerar situações onde $v^2/c^2 \ll 1$ e $|ra|/c^2 \ll 1$, v sendo a velocidade do corpo de prova em relação à Terra, r sua distância ao centro da Terra e a sua aceleração em relação à Terra. Em geral analisaremos os problemas no referencial da Terra, de tal forma que $\vec{\Omega} = \vec{0}$.

Com estas aproximações a força exercida pela Terra sobre um corpo de prova movendo-se sobre sua superfície de acordo com a lei de Weber vai se reduzir ao resultado newtoniano, a saber: $\vec{P} = m_g \vec{g}$, com $\vec{g} = -GM_{gT}\hat{r}/R_T^2$. O valor aproximado de g próximo a superfície terrestre é $9,8\ m/s^2$, apontando radialmente para o centro da Terra.

Estudamos agora a queda livre de um corpo como uma maçã sobre a superfície da Terra, desprezando a resistência do ar. Vamos desprezar inicialmente a aceleração da Terra em relação ao referencial das galáxias distantes quando comparada com a aceleração da maçã em relação às galáxias distantes, devido ao fato de a maçã ter uma massa gravitacional muito menor do que a massa gravitacional da Terra.

Se a força constante é o peso do corpo de prova surgindo da atração gravitacional da Terra próximo a sua superfície, temos $\vec{F}_o = m_g \vec{g}$, onde $\vec{g} = -GM_{gT}\hat{r}/R_T^2$ é a força gravitacional da Terra por unidade de massa gravitacional. Utilizando este resultado na equação (20.3) resulta em:

$$\vec{a}_{mT} = \frac{\vec{F}_o}{\Phi_\infty m_g} = \frac{m_g \vec{g}}{\Phi_\infty m_g} = \frac{\vec{g}}{\Phi_\infty} = \text{constante} . \tag{20.6}$$

A aceleração do corpo de prova neste referencial universal está representada na figura 20.1 (a). Esta aceleração coincide nesta aproximação com a aceleração do corpo em relação às estrelas fixas, além de coincidir com a aceleração do corpo em relação ao solo. A representação gráfica das forças neste caso é dada na figura 20.1 (b).

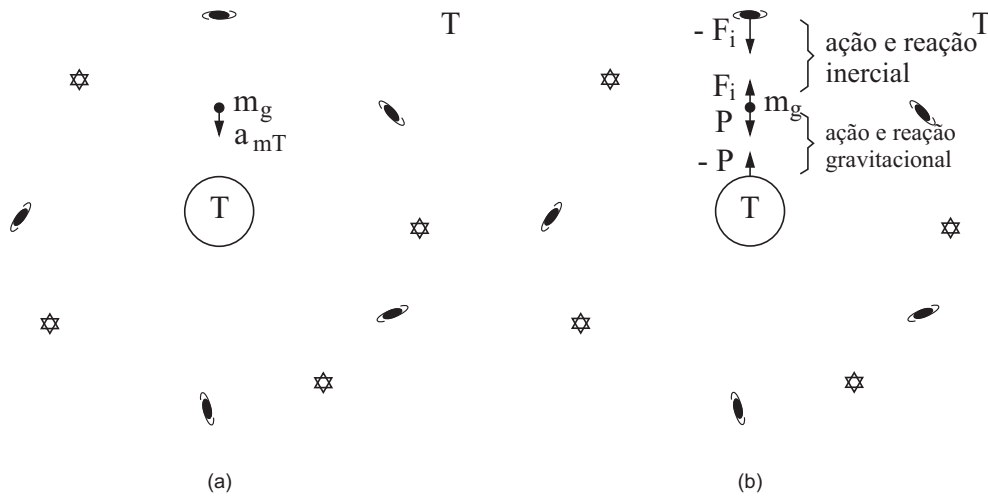



Figura 20.1: (a) Aceleração do corpo de prova no referencial terrestre T. (b) Forças de ação e reação entre o corpo e a Terra (P e $-P$), assim como forças de ação e reação entre o corpo e as galáxias (F_i e $-F_i$).

Existe ação e reação na interação gravitacional entre a Terra e o corpo de prova, como representado pelo peso P exercido pela Terra sobre o corpo, e pela força de reação $-P$ exercida pelo corpo sobre a Terra, figura 20.1 (b). Isto é, o peso do corpo de prova tem seu par em uma força oposta agindo sobre a Terra.

Também existe ação e reação na interação gravitacional entre o corpo de prova e o conjunto das galáxias distantes. A força gravitacional exercida pelas galáxias sobre m_g é dada pela força inercial $\vec{F}_i = -\Phi_\infty m_g \vec{a}_{mT}$. Ela tem seu par em uma força oposta sendo exercida por m_g e agindo sobre o conjunto das galáxias distantes,

$-\vec{F}_i = \Phi_\infty m_g \vec{a}_{mT}$. Na mecânica newtoniana, as forças inerciais como $-m_i\vec{a}$ não estavam associadas com nenhuma força oposta agindo sobre qualquer outro corpo.

Na mecânica relacional existem duas forças que atuam sobre o corpo nesta situação, a saber: (I) Seu peso $\vec{P} = m_g\vec{g}$, sendo esta força exercida pela Terra. (II) A força exercida pelo conjunto de galáxias sobre o corpo de prova acelerado em relação a elas, força esta dada por $-\Phi_\infty m_g \vec{a}_{mT}$. Estas forças se contrabalançam uma à outra, gerando a aceleração do corpo de prova em relação ao referencial universal dada por $\vec{a}_{mU} = \vec{a}_{mT}$.

Este problema também pode ser analisado no referencial A do corpo de prova. Na figura 20.2 (a) apresentamos as acelerações neste referencial A. Como este é o próprio referencial do corpo de prova, sua aceleração é nula, $\vec{a}_{mA} = \vec{0}$. Por outro lado, neste referencial A observa-se que a Terra, as estrelas e as galáxias são vistas com uma mesma aceleração de $9,8\ m/s^2$ no sentido do centro da Terra para o corpo.

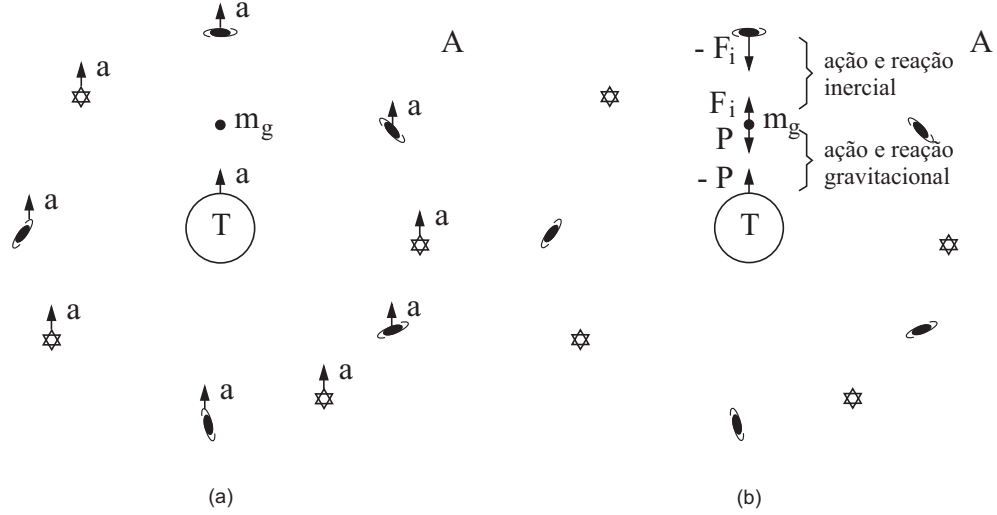



Figura 20.2: (a) Acelerações no referencial A do corpo de prova. O corpo de prova está parado em seu próprio referencial, $\vec{a}_{mA} = \vec{0}$. (b) Forças P e $-P$ de ação e reação entre o corpo e a Terra, assim como forças F_i e $-F_i$ de ação e reação entre o corpo e as galáxias.

Da equação (20.5) com $\vec{a}_{mA} = \vec{0}$ e lembrando que $\vec{F}_o = m_g\vec{g}$ obtém-se:

$$m_g\vec{g} + \Phi_\infty m_g \vec{A}_{GA} = \vec{0}\ . \tag{20.7}$$

Novamente temos ação e reação entre a Terra e o corpo de prova, P e $-P$. Também ocorre ação e reação entre o corpo de prova e o conjunto de galáxias, F_i e $-F_i$. Estas quatro forças têm o mesmo valor numérico e apontam nas mesmas direções, tanto no referencial terrestre T, quanto no referencial A preso ao corpo de prova.

Mas agora a interpretação é um pouco diferente. No referencial terrestre a força inercial era dada por $\vec{F}_i = -\Phi_\infty m_g \vec{a}_{mT}$, onde $\vec{a}_{mT}$ é a aceleração do corpo em relação à Terra. No referencial A do corpo de prova ele está em repouso, $\vec{a}_{mA} = \vec{0}$. Mas as galáxias neste referencial possuem uma aceleração $\vec{A}_{GA}$ apontando do centro da Terra para o corpo. Estas galáxias aceleradas exercem uma força inercial $\vec{F}_i = \Phi_\infty m_g \vec{A}_{GA}$. Como $\vec{A}_{GA} = -\vec{a}_{mT}$, as forças inerciais são as mesmas nos dois referenciais. No referencial A do corpo de prova dizemos que o peso do corpo é contrabalançado por uma força gravitacional apontando para cima exercida pelas galáxias distantes sendo aceleradas nesta direção, de tal forma que o corpo de prova não se move em seu próprio referencial.

20.1.2 Explicação do Motivo pelo Qual Dois Corpos Caem com a Mesma Aceleração Não Interessando Seus Pesos ou Composições Químicas

A equação (20.6) explica claramente o fato observacional obtido por Galileu de que todos os corpos caem no vácuo com a mesma aceleração em relação ao solo, não interessando seus pesos, formas, composições químicas etc. Esta igualdade das acelerações de queda livre surge do fato de que a força $-\Phi_\infty m_g \vec{a}_{mT}$ da mecânica relacional é uma força real devida a uma interação *gravitacional* do corpo de prova com as massas distantes do cosmo. Assim, a massa que aparece em $-\Phi_\infty m_g \vec{a}_{mT}$ é a mesma massa que aparece no peso do

corpo de prova devido a sua interação gravitacional com a Terra, a saber, a massa gravitacional que aparece na força peso $\vec{P} = m_g \vec{g}$. A explicação deste fato notável que tanto intrigou a Galileu, Newton, Einstein e muitos outros é óbvia na mecânica relacional. A explicação que se obtém aqui é muito simples e elegante. Não precisamos postular esta proporcionalidade entre a inércia e o peso, como havia sido feito na relatividade geral. Ao invés de postulá-la sem obter uma melhor compreensão do fenômeno, este resultado passa a ser *deduzido* na mecânica relacional. Adquirimos então uma compreensão completa do fato, o que abre nossas mentes para muitas outras possibilidades.

A explicação para este fato curioso é muito interessante na mecânica relacional. Quando aumentamos a massa gravitacional do corpo de prova, aumentamos seu peso. Porém, simultaneamente, aumentamos a força gravitacional exercida pelas galáxias sobre ele. Este aumento simultâneo da força peso e da força inercial faz com que fique inalterável a aceleração de queda livre do corpo em relação ao solo.

20.1.3 A Densidade de Massa Gravitacional do Universo Controla a Aceleração de Queda Livre

Vale a pena analisar aqui o que aconteceria na mecânica relacional se mantivéssemos as massas da Terra e do corpo de prova constantes, mas dobrássemos a massa ou densidade das galáxias externas. De acordo com a equação (16.41) o valor de Φ_∞ dobraria. Isto significa que a equação (16.64) só permanecerá válida com $\sum_{p=1, p\neq k}^{N} \vec{F}_{pk} \neq \vec{0}$ se a aceleração $\vec{a}_{kU}$ do corpo de prova com massa gravitacional m_{gk} tiver seu valor diminuído pela metade, pois estamos supondo que m_{gk} e $\sum_{p=1, p\neq k}^{N} \vec{F}_{pk}$ não se alteraram. No caso de queda livre isto significa que a aceleração do corpo de prova em direção ao centro da Terra tem de cair pela metade. Isto é, se dobrarmos a quantidade de galáxias no universo, deixando inalteradas a Terra e o corpo de prova, a aceleração de queda livre cairá para a metade de seu valor atual. Da mesma forma se aniquilássemos metade das galáxias ou se esta metade deixasse de existir, dobraria a aceleração de queda livre.

Vamos ver tudo isto em detalhes. A equação de movimento é dada por (20.6). Usando as equações (16.41) e (17.28) obtém-se:

$$\vec{a}_{mT} = \frac{\vec{g}}{\Phi_\infty} = -\frac{1}{\Phi_\infty}\frac{GM_{gT}}{R_T^2}\hat{r} = -\frac{3c^2\alpha^2}{4\pi G\rho_{go}\xi}\frac{GM_{gT}}{R_T^2}\hat{r} \ , \tag{20.8}$$

onde $\hat{r}$ aponta do centro da Terra para o corpo de prova. Ou seja, a aceleração de queda livre é inversamente proporcional à densidade média de massa gravitacional no universo ρ_{go}. Com a densidade conhecida dada pela equação (3.37) temos uma aceleração de queda livre de $9,8\ m/s^2$ em relação ao solo. Se pudéssemos dobrar ρ_{go}, sem alterar a massa da Terra, esta aceleração de queda livre passaria para $4,9\ m/s^2$. Se pudéssemos dividir por três esta densidade ρ_{go}, sem alterar a massa da Terra, esta aceleração passaria para $29,4\ m/s^2$.

Vamos chamar de caso (A) a situação atual em que uma maçã sofre uma aceleração de queda livre na superfície da Terra de $9,8\ m/s^2$. O caso (B) é quando dobramos a massa das galáxias, deixando a massa da Terra e da maçã inalteradas. Já o caso (C) é quando deixamos a massa das galáxias constantes e dividimos por dois a massa da Terra e da maçã. Nos três casos mantemos as distâncias entre todos os corpos inalteradas. Estes dois últimos casos são análogos e deveriam levar às mesmas consequências. Isto é devido ao fato de que as razões das massas (massa da Terra dividida pela massa da maçã, massa da Terra dividida pela massa de cada galáxia, assim como a massa da maçã dividida pela massa de cada galáxia) são as mesmas em (B) e em (C). Só que tanto na mecânica newtoniana quanto na relatividade geral a aceleração de queda no caso (C) passa para $4,9\ m/s^2$, enquanto que no caso (B) ela permanece em $9,8\ m/s^2$. Apenas na mecânica relacional conclui-se que tanto no caso (B) quanto no caso (C) a aceleração será de $4,9\ m/s^2$. E isto é o mais intuitivo e o mais filosoficamente aceitável, pois dizer que a massa da Terra e da maçã foram divididas por dois deveria ser análogo a dizer que dobraram as massas de todos os outros corpos do universo. Se este é o caso, então as consequências dinâmicas deveriam ser as mesmas em (B) e em (C). Somente na mecânica relacional isto acontece. Nestes exemplos, quando afirmamos que as massas da Terra, da maçã ou das galáxias foram divididas por dois ou dobraram, deve-se entender que estamos comparando-as com um corpo padrão (por exemplo, o quilograma-padrão mantido em Paris). Ou seja, apenas a mecânica relacional é compatível com o princípio das proporções físicas.[1]

Não podemos testar as consequências do caso (B), pois não temos controle sobre a massa de cada galáxia, ou sobre a densidade média de massa gravitacional do universo. Apesar disto, estas situações e análises são

[1] [Ass01], [Ass03a] e [Ass04].

boas para mostrar as implicações da mecânica relacional e suas diferenças em relação às formulações de Newton e de Einstein. De qualquer forma estas ideias sugerem um teste que poderia ser feito no laboratório para tentar distinguir a mecânica relacional tanto da mecânica clássica quanto da teoria da relatividade de Einstein, como será visto na Subseção 23.5.1.

20.1.4 Movimento de Atração entre Dois Corpos no Referencial Universal

Assim como feito na Subseção 6.2.3 e na Seção 17.1, podemos generalizar o tratamento feito até agora considerando o movimento tanto da Terra quanto da maçã em relação ao referencial universal U. Vamos chamar estes corpos de 1 e 2. O corpo 1 exerce uma força sobre o corpo 2 e o corpo 2 exerce uma força igual e oposta sobre 1. As massas gravitacionais de 1 e 2 serão representadas por m_{g1} e m_{g2}, respectivamente. Vamos tratar estes dois corpos como partículas localizadas em seus centros de massa gravitacional.

A equação de conservação da energia na mecânica relacional é dada pela equação (16.61). Utilizando as equações (17.28) e (17.38), a equação de conservação de energia fica na seguinte forma:

$$-G\frac{m_{g1}m_{g2}}{r_{12}} + \Phi_\infty m_{g1}\frac{\vec{v}_{1U}\cdot\vec{v}_{1U}}{2} + \Phi_\infty m_{g2}\frac{\vec{v}_{2U}\cdot\vec{v}_{2U}}{2} = \text{constante no tempo} \ . \tag{20.9}$$

Ou seja, a energia total tem sempre o mesmo valor ao longo do tempo, não interessando os valores de r_{12}, $\vec{v}_{1U}$ ou $\vec{v}_{2U}$.

As equações de movimento dos corpos 1 e 2 em termos das forças são dadas pelas equações (17.6), (17.7) e (17.28), a saber (usando que $\hat{r} = \hat{r}_{21} = -\hat{r}_{12}$):

$$Gm_{g1}m_{g2}\frac{\hat{r}_{21}}{r_{12}^2} - \Phi_\infty m_{g1}\vec{a}_{1U} = \vec{0} \ , \tag{20.10}$$

e

$$-Gm_{g1}m_{g2}\frac{\hat{r}_{21}}{r_{12}^2} - \Phi_\infty m_{g2}\vec{a}_{2U} = \vec{0} \ . \tag{20.11}$$

Na mecânica relacional tanto o momento linear total no referencial universal U quanto o momento angular total no referencial U se conservam no tempo, equações (17.45) e (17.51). Supondo que as partículas partam do repouso, $\vec{v}_{1U}(t=0) = \vec{v}_{2U}(t=0) = \vec{0}$, o momento linear total será sempre nulo, o mesmo acontecendo com o momento angular total. Vamos supor ainda o centro de massa gravitacional destas duas partículas localizado na origem do sistema de coordenadas do referencial U, $\vec{r}^{\,g}_{cm} = \vec{0}$, sendo $\vec{r}^{\,g}_{cm}$ definido pela equação (17.52). Com isto obtém-se:

$$\vec{r}^{\,g}_{cm} = m_{g1}\vec{r}_{1U} + m_{g2}\vec{r}_{2U} = \vec{0} \ , \tag{20.12}$$

e

$$\vec{r}_{2U} = -\frac{m_{g1}}{m_{g2}}\vec{r}_{1U} \ , \quad \vec{v}_{2U} = -\frac{m_{g1}}{m_{g2}}\vec{v}_{1U} \ , \quad \vec{a}_{2U} = -\frac{m_{g1}}{m_{g2}}\vec{a}_{1U} \ . \tag{20.13}$$

Usando $r_1 \equiv |\vec{r}_1|$, $r_2 \equiv |\vec{r}_2|$, as equações (16.41) e (17.28), obtém-se das equações (20.10), (20.11) e (20.13) os seguintes resultados:

$$\vec{a}_{2U} = -\frac{G}{\Phi_\infty}\frac{m_{g1}}{(r_1+r_2)^2}\hat{r}_{21} = -\frac{3c^2\alpha^2}{4\pi G\rho_{go}\xi}\frac{Gm_{g1}}{(r_1+r_2)^2}\hat{r}_{21} = -\frac{m_{g1}}{m_{g2}}\vec{a}_{1U} \ . \tag{20.14}$$

Se, por exemplo, $m_{g1} = 3m_{g2}$, então $\vec{a}_{2U} = -3\vec{a}_{1U}$. Por outro lado, se $m_{g1} \gg m_{g2}$, teremos $r_{1U} \ll r_{2U}$, $|\vec{v}_{1U}| \ll |\vec{v}_{2U}|$ e $|\vec{a}_{1U}| \ll |\vec{a}_{2U}|$. Por exemplo, supondo uma maçã com uma massa gravitacional $m_{g2} = 100\ g = 0,1\ kg$, usando que a massa gravitacional da Terra $= m_{g1} = 6\times 10^{24}\ kg$, e usando que a aceleração de queda livre da maçã é de $|\vec{a}_{2U}| = 9,8\ m/s^2$ obtém-se que a aceleração da Terra em relação ao referencial universal é dada por, pela equação (20.13): $|\vec{a}_{1U}| = 1,666\times 10^{-26}|\vec{a}_{2U}| = 1,6\times 10^{-25}\ m/s^2$, totalmente desprezível. Ou seja, se a massa de 1 for muito maior do que a massa de 2, é possível desprezar a aceleração do corpo 1 comparada com a aceleração do corpo 2. Mas não se deve esquecer que os dois corpos estarão acelerados em relação ao referencial universal. A conservação do momento linear na mecânica relacional ocorre neste referencial universal.

As acelerações das partículas 1 e 2 no referencial universal U estão representadas na figura 20.3 (a). Na figura 20.3 (b) estão representadas as forças atuando sobre o corpo 1, sobre o corpo 2, assim como as

forças atuando sobre o conjunto de galáxias. A força gravitacional exercida pelo corpo 2 sobre o conjunto de galáxias é representada por $\vec{F}_{2i}$. Embora a seta representando esta força na figura 20.3 (b) esteja colocada sobre uma única galáxia, deve-se entender que esta força está distribuída sobre todas as galáxias. O mesmo vale para a força gravitacional exercida pelo corpo 1 sobre as galáxias, $\vec{F}_{1i}$.

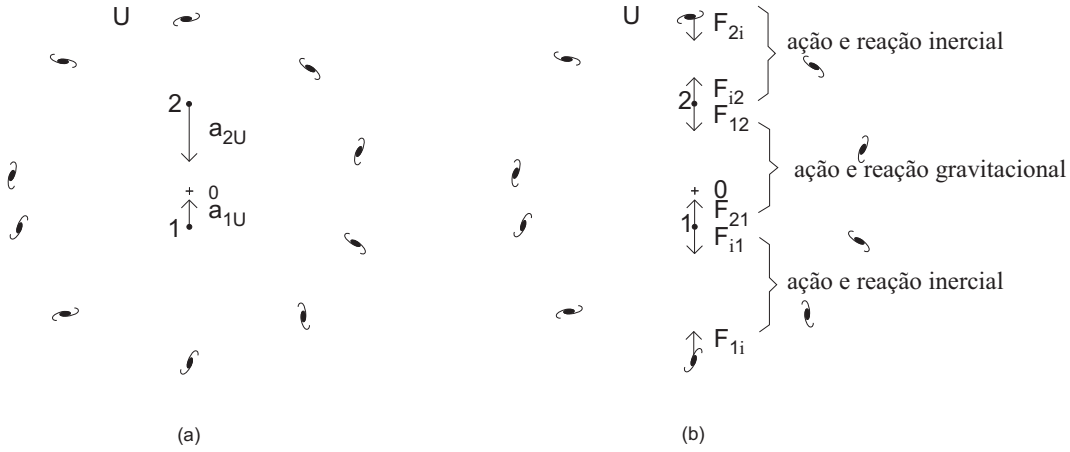



Figura 20.3: (a) Acelerações no referencial universal U de duas massas interagindo entre si, além de estarem interagindo gravitacionalmente com as galáxias. (b) De cima para baixo: Forças de ação e reação entre o corpo 2 e as galáxias, forças de ação e reação entre 1 e 2, assim como forças de ação e reação entre o corpo 1 e as galáxias.

Da equação (20.14) observa-se mais uma vez que as acelerações de 1 e 2 no referencial universal U são controladas pela densidade média de massa gravitacional no universo, ρ_{go}. Se pudéssemos aumentar esta densidade, sem mexer nas massas gravitacionais de 1 e 2, diminuiríamos suas acelerações no referencial U, supondo a mesma distância $r_1 + r_2$ entre os corpos. Por outro lado, se pudéssemos fazer $\rho_{go} \to 0$, as acelerações de 1 e 2 divergiriam.

20.2 Carga sendo Acelerada no Interior de um Capacitor Ideal

O outro exemplo analisado aqui é o de uma partícula eletrizada com uma carga elétrica q sofrendo a ação de um capacitor ideal em repouso em relação à Terra. O capacitor é carregado com densidades superficiais de carga $\pm\sigma$ sobre suas placas ortogonais ao eixo z, localizadas em $\pm z_o$. A carga teste está localizada no tempo t em $\vec{r} = z\hat{z}$ no interior do capacitor. Consideramos ainda que ela se desloca com velocidade $\vec{v}_{qT} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z}$ e aceleração $\vec{a}_{qT} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y} + a_z\hat{z}$ em relação às placas do capacitor, figura 20.4.

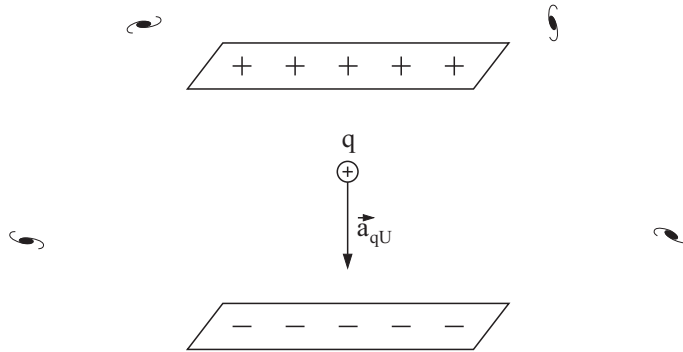



Figura 20.4: Carga acelerada no interior de um capacitor parado no solo.

A força exercida por este capacitor sobre a carga pontual q deslocando-se no interior do capacitor é dada na eletrodinâmica de Weber pela equação (6.34). Consideramos aqui apenas movimentos tais que $v_{qT}^2/c^2 \ll 1$ e $|za_{qT}|/c^2 \ll 1$, de tal forma que este resultado se reduz ao caso eletrostático obtido com a força de Coulomb, ou seja:

$$\vec{F} = -q\frac{\sigma\hat{z}}{\varepsilon_o} \equiv q\vec{E} \ , \tag{20.15}$$

onde $\vec{E} \equiv -\sigma\hat{z}/\varepsilon_o$ é a força eletrostática por unidade de carga.

As equações (20.2) e (20.15) levam a:

$$\vec{a}_{qT} = \frac{q}{\Phi_\infty m_g}\vec{E} = -\frac{3c^2\alpha^2}{4\pi G\rho_{go}\xi}\frac{q\sigma}{m_g\varepsilon_o}\hat{z} \ . \tag{20.16}$$

Como não há relação entre a carga elétrica q e a massa gravitacional da partícula m_g, podem ser diferentes a aceleração de dois corpos eletrizados distintos, tais como uma partícula alfa e um próton, no mesmo capacitor. E esta diferença entre as acelerações é observada experimentalmente.

A aceleração da carga em relação ao capacitor é controlada pela densidade média de massa gravitacional do universo, ρ_{go}. Se pudéssemos dobrar esta densidade, mantendo inalteradas as cargas da partícula e do capacitor, mantendo também inalterada a massa gravitacional da partícula, cairia pela metade a aceleração da partícula de acordo com a mecânica relacional. Se pudéssemos dividir pela metade o valor da densidade média de massa gravitacional do universo, sem alterar as cargas da partícula teste e do capacitor, mantendo também inalterada a massa gravitacional da partícula, dobraria a aceleração da partícula.

20.3 Corpo sendo Acelerado em Relação ao Solo enquanto está Preso em uma Mola

Consideramos agora dois corpos com mesma massa gravitacional m_g apoiados sobre um vagão sem atrito. Os corpos estão presos a duas molas horizontais iguais de comprimento relaxado ℓ_o quando o vagão está em repouso no solo, figura 20.5 (a). As molas estão presas ao vagão. Cada corpo está preso em uma única mola. Vamos desprezar a massa gravitacional de cada mola em comparação com a massa gravitacional m_g do corpo preso a ela, $m_{g\ mola} \ll m_g$.

Aplica-se uma força sobre o vagão até deixá-lo deslocando-se em relação ao solo com uma velocidade constante v_{mT}. Depois que esta situação foi estabilizada, tanto as molas quanto os corpos também vão estar deslocando-se em relação ao solo com esta velocidade constante, já que estão presos ao vagão. observa-se que as duas molas continuam relaxadas mantendo o comprimento inicial ℓ_o, figura 20.5 (b). O cilindro representa um corpo externo ao vagão parado em relação ao solo.

Figura 20.5: (a) Vagão parado no solo. (b) Vagão deslocando-se com velocidade constante em relação ao solo.

Ao fornecer uma aceleração constante a_{mT} ao vagão em relação ao solo, tanto as molas quanto os corpos passam a deslocar-se com esta mesma aceleração constante em relação ao solo, já que estão presos ao vagão. Observa-se que uma das molas fica comprimida e a outra mola fica esticada, figura 20.6. Nesta figura o vagão está sendo acelerado em direção a um cilindro preso ao solo. Em particular, fica comprimida a mola da esquerda, cuja extremidade presa ao vagão está mais afastada do cilindro do que sua extremidade presa ao corpo de massa gravitacional m_g. Já a mola da direita, cuja extremidade presa ao vagão está mais próxima do cilindro do que sua extremidade presa ao corpo de massa gravitacional m_g, fica esticada.

Vamos considerar como positivo o sentido que aponta do vagão para o cilindro. A força vertical exercida pela Terra é contrabalançada pela força normal exercida pelo chão do vagão sobre cada uma das massas. De acordo com a força de Weber gravitacional, a Terra também vai exercer uma pequena força horizontal sobre cada massa m_g quando elas estão aceleradas em relação ao solo. Nas contas a seguir vamos desprezar

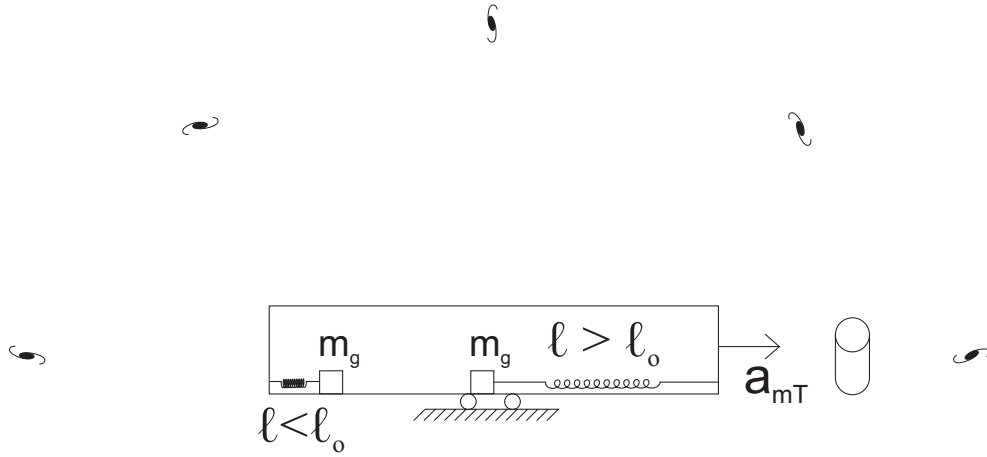



Figura 20.6: Vagão deslocando-se com aceleração constante em relação ao solo.

esta componente horizontal quando comparada com a força elástica exercida pelas molas. Pode-se utilizar a lei de Hooke juntamente com a equação de movimento da mecânica relacional, equações (2.6) e (20.2), para obter a compressão da mola da esquerda:

$$-k(\ell - \ell_o) - \Phi_\infty m_g a_{mT} = 0 \; . \tag{20.17}$$

Com as mesmas equações (2.6) e (20.2) pode-se obter o esticamento da mola da direita, a saber:

$$k(\ell - \ell_o) - \Phi_\infty m_g a_{mT} = 0 \; . \tag{20.18}$$

Ou seja, as duas molas sofrem a mesma variação de comprimento dada por:

$$|\ell - \ell_o| = \frac{\Phi_\infty m_g |a_{mT}|}{k} \; . \tag{20.19}$$

20.3.1 Qual é a Origem da Força que está Esticando a Mola?

Na figura 2.4 vimos uma mola ser esticada por forças de natureza diferente, a saber, (a) gravitacional, (b) elétrica e (c) magnética. Uma mola não se estica sozinha. Para que isto ocorra, são necessárias duas forças iguais e opostas atuando sobre as extremidades da mola, sendo que a força que atua em cada extremidade está apontando no sentido que vai do centro da mola para esta extremidade, como visto nas figuras 2.3 (c) e 2.5.

Qual é a origem da força que está esticando a mola da direita da figura 20.6? Qual é a origem da força que está comprimindo a mola da esquerda da figura 20.6?

A resposta a estas perguntas na mecânica relacional é que a mola da direita da figura 20.6 está sendo esticada pela força gravitacional exercida pelo conjunto de galáxias sobre o corpo de massa m_g preso a ela, sendo esta força transmitida à mola. Ou seja, esta é uma força real de origem gravitacional.

Na figura 20.7 (a) apresentamos a mola esticada da direita com o corpo de massa m_g sendo acelerado para a direita. Na figura 20.7 (b) apresentamos as forças atuando sobre o corpo. Temos a força inercial $F_i = -\Phi_\infty m_g a_{mU} = -\Phi_\infty m_g a_{mT}$ exercida gravitacionalmente pelo conjunto de galáxias apontando para a esquerda e a força elástica $F_e = k(\ell - \ell_o)$ exercida pela mola esticada apontando para a direita. Na figura 20.7 (c) apresentamos as forças atuando sobre a mola. A força inercial F_i atuando sobre o corpo é transmitida à mola, puxando a extremidade esquerda da mola para o lado esquerdo. A parede do vagão exerce uma força de tração T sobre a mola puxando sua extremidade direita para o lado direito.

Na figura 20.8 (a) apresentamos a mola comprimida da esquerda com o corpo de massa m_g sendo acelerado para a direita. Na figura 20.8 (b) apresentamos as forças atuando sobre o corpo. Temos a força inercial $F_i = -\Phi_\infty m_g a_{mU} = -\Phi_\infty m_g a_{mT}$ exercida gravitacionalmente pelo conjunto de galáxias apontando para a esquerda e a força elástica $F_e = k(\ell_o - \ell)$ exercida pela mola comprimida apontando para a direita. Na figura 20.8 (c) apresentamos as forças atuando sobre a mola. A força inercial F_i atuando sobre o corpo é transmitida à mola, empurrando a extremidade direita da mola para o lado esquerdo. A parede exerce uma força de tração T sobre a mola empurrando sua extremidade esquerda para o lado direito.

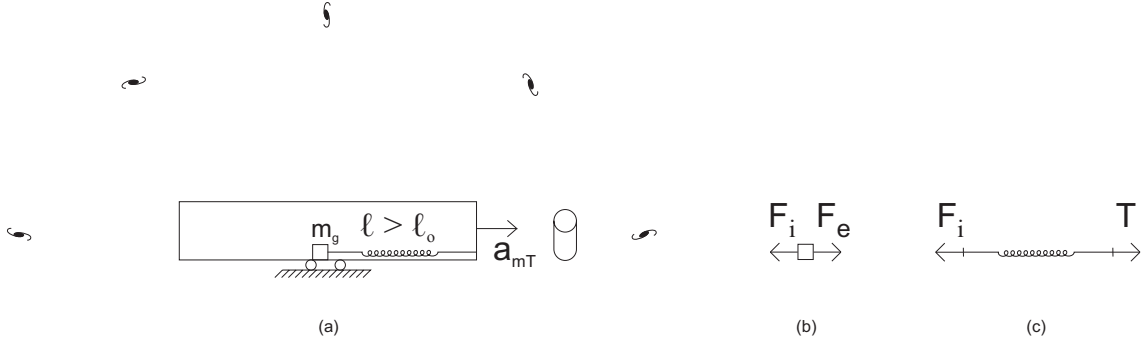



Figura 20.7: (a) Corpo e mola acelerados para a direita. (b) Forças atuando sobre o corpo: Força elástica F_e e força inercial F_i. (c) Forças atuando sobre a mola esticada: Força inercial F_i e força de tração T.

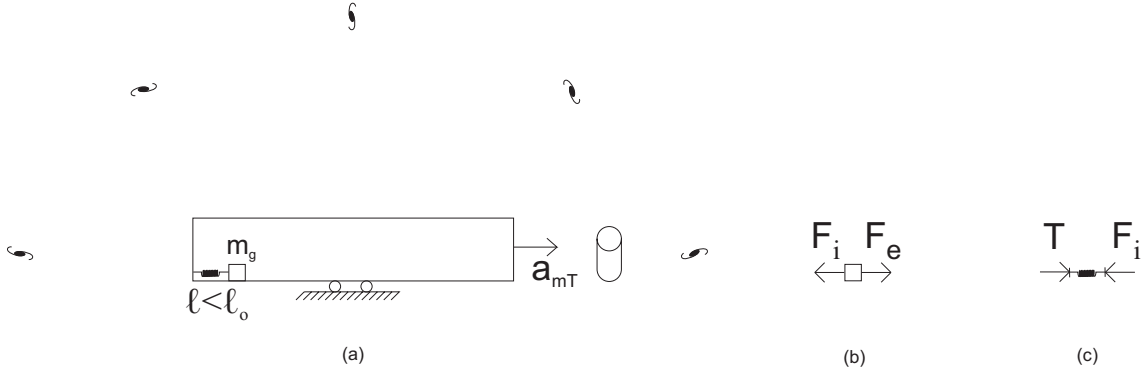



Figura 20.8: (a) Corpo e mola acelerados para a direita. (b) Forças atuando sobre o corpo: Força elástica F_e e força inercial F_i. (c) Forças atuando sobre a mola comprimida: Força inercial F_i e força de tração T.

Na figura 2.4 (a) temos que a força peso exercida pela Terra sobre cada corpo dependurado na mola é transmitida por forças de contato à mola, esticando a mola. Na figura 2.4 (b) a força elétrica exercida sobre cada corpo é transmitida à mola, esticando-a. Na figura 2.4 (c) é a força magnética atuando em cada corpo que é transmitida à mola, fazendo que ela se estique. Na figura 2.3 (c) a força peso exercida pela Terra sobre o corpo dependurado na mola é transmitida à mola, puxando sua extremidade inferior para baixo. Como a extremidade superior da mola está presa ao suporte, a mola é esticada até que o suporte exerça uma força de tração para cima sobre esta extremidade superior da mola que iguale a força peso atuando para baixo sobre a extremidade inferior da mola. Ela então fica esticada por estas duas forças. O mesmo ocorre na figura 20.7. Ou seja, o conjunto de galáxias exerce uma força para a esquerda sobre o bloco quando ele está acelerado para a direita em relação às galáxias. Esta força de origem gravitacional é transmitida à extremidade esquerda da mola, esticando-a. Como a extremidade direita da mola está presa ao vagão, a mola é esticada até que o vagão exerça uma força de tração sobre esta extremidade, apontando para a direita, e tendo módulo igual à força inercial (no caso em que o peso da mola é desprezível comparado com o peso do bloco).

20.3.2 A Densidade de Massa Gravitacional do Universo Controla a Aceleração de um Corpo Ligado a uma Mola Esticada

Pelas equações (17.29) e (20.19) obtém-se que a variação de comprimento das molas da figura 20.6 é dada por:

$$|\ell - \ell_o| = \frac{\Phi_\infty m_g |a_{mT}|}{k} = \frac{4\pi G \rho_{go} \xi}{3c^2\alpha^2} \frac{m_g |a_{mT}|}{k} \ . \qquad (20.20)$$

Esta equação indica que a variação de comprimento é diretamente proporcional à densidade média ρ_{go} de massa gravitacional no universo. Se pudéssemos dobrar esta densidade, mantendo inalteradas as constantes elásticas k das molas e mantendo inalteradas as massas gravitacionais m_g dos corpos presos a estas molas,

dobraria a variação de comprimento destas molas quando o vagão estivesse com a mesma aceleração $\vec{a}_{mT}$ em relação ao solo. Se pudéssemos dividir por 2 esta densidade ρ_{go}, a variação de comprimento destas molas também teria a metade do valor indicado na figura 20.6.

Um possível teste experimental destas ideias encontra-se na Subseção 23.5.4.

Ao fazer esta densidade ir a zero, $\rho_{go} \to 0$, as molas não sofreriam variação de comprimento. Este último resultado é apenas uma aproximação. De acordo com uma lei de Weber gravitacional, a Terra exerce uma força horizontal sobre as massas presas às molas quando as massas são aceleradas em relação ao solo. Este efeito não foi levado em consideração nas contas que levaram à equação (20.19). Caso este efeito fosse levado em consideração ao realizar o cálculo da variação de comprimento das molas, ainda haveria uma pequena alteração de comprimento que viria pelo fato dos corpos estarem acelerados em relação ao solo, mesmo quando $\rho_{go} \to 0$.

20.3.3 Forças no Referencial do Vagão

Na figura 20.9 apresentamos a situação da figura 20.7 vista por uma pessoa que está dentro do vagão. Este é o referencial A no qual o conjunto de galáxias é visto sendo acelerado para a esquerda com uma aceleração $\vec{A}_{GA}$. Neste referencial A o planeta Terra tem uma aceleração para a esquerda, $\vec{A}_{TA}$, igual à aceleração das galáxias, $\vec{A}_{TA} = \vec{A}_{GA}$.

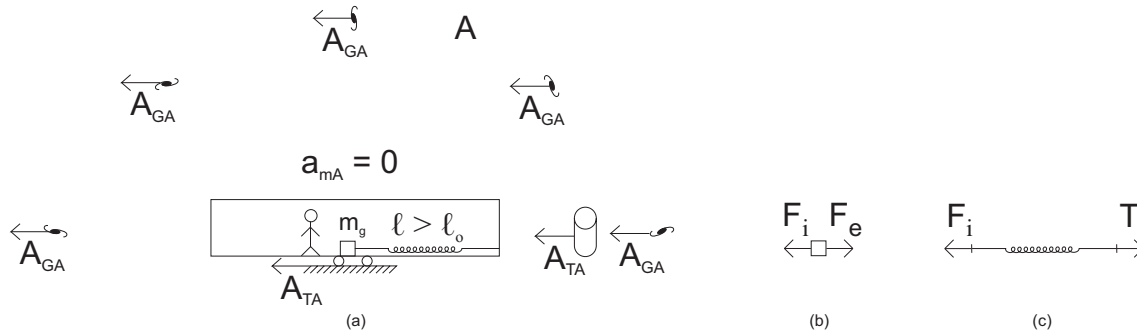



Figura 20.9: (a) No referencial A de uma pessoa dentro do vagão temos o bloco e a mola parados, enquanto que a Terra e as galáxias são vistos acelerados para a esquerda com a mesma aceleração $\vec{A}_{TA} = \vec{A}_{GA}$. (b) Forças atuando sobre o corpo: Força elástica F_e e força inercial F_i. (c) Forças atuando sobre a mola esticada: Força inercial F_i e força de tração T.

A equação de movimento neste caso é dada pela equação (20.4) com $\vec{a}_{kA} = \vec{0}$. As forças exercidas sobre o bloco estão representadas na figura 20.9 (b). Novamente temos a força inercial apontando para a esquerda. Esta força é exercida pelas galáxias sobre o bloco. Ou seja, as galáxias aceleradas para a esquerda exercem uma força gravitacional sobre o corpo dada por $\Phi_\infty m_g \vec{A}_{GA}$. O corpo está preso à extremidade esquerda da mola. Logo a força exercida pelas galáxias sobre o corpo é transmitida à extremidade esquerda da mola. A extremidade direita da mola está presa ao vagão. A mola vai esticando até que o vagão exerce sobre esta extremidade uma força T de tração igual à força inercial. Esta força aponta para a direita, esticando a mola. A mola esticada exerce uma força elástica F_e sobre o bloco, equilibrando a força inercial exercida pelas galáxias sobre o bloco.

Mesmo para quem esteja pensando de um ponto de vista da mecânica newtoniana, talvez fique mais evidente perceber que a força inercial é uma força real, ao pensar neste problema no referencial A do vagão, figura 20.9. Ou seja, a mola está parada e são as galáxias aceleradas para a esquerda que exercem uma força para a esquerda sobre o bloco. Esta força é transmitida à mola, esticando-a já que sua extremidade da direita está presa ao vagão. De qualquer forma, a força inercial F_i é a mesma em qualquer referencial, tanto neste referencial A quanto no referencial terrestre ou no referencial universal U.

Uma análise semelhante pode ser feita no caso da mola da esquerda da figura 20.8 de um ponto de vista de um referencial A que está parado em relação ao vagão.

20.3.4 Qual Seria o Comprimento da Mola se Fosse Possível Acelerar as Galáxias em Relação ao Solo?

Nesta Subseção discutimos uma situação hipotética que ilustra os aspectos machianos da mecânica relacional. Vamos utilizar a Terra como sendo o referencial ao qual se referem as velocidades e acelerações. Como nas situações anteriores, supomos duas molas iguais presas ao vagão, cada uma com um corpo de massa gravitacional m_g preso à sua extremidade livre, figura 20.10 (a). Vamos supor que o comprimento relaxado de cada mola de constante elástica k seja ℓ_o quando ela e o conjunto de galáxias estão em repouso em relação ao solo. Vamos supor ainda que as massas gravitacionais das molas são desprezíveis comparadas com as massas gravitacionais dos corpos presos a elas.

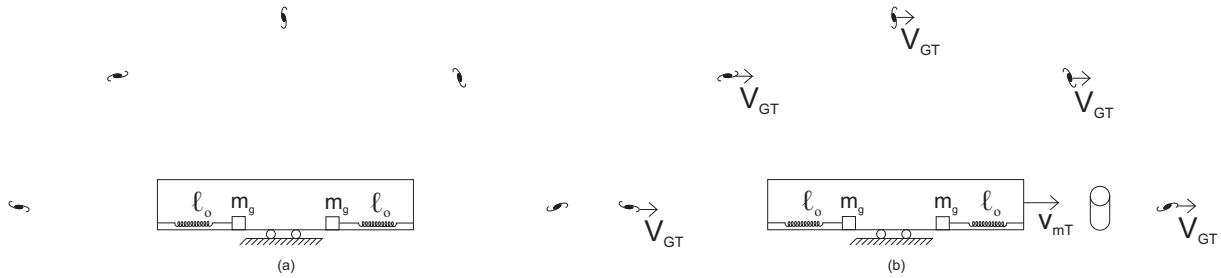



Figura 20.10: (a) Molas e galáxias paradas no solo. (b) Vagão, molas e massas m_g deslocando-se juntos com velocidade constante v_{mT} em relação ao solo, enquanto que as galáxias deslocam-se com velocidade V_{GT}.

Vamos supor que em seguida seja fornecida uma velocidade horizontal constante ao vagão em relação ao solo dada por v_{mT} e uma velocidade horizontal constante ao conjunto de galáxias em relação ao solo dada por V_{GT}. Como as molas e os corpos estão presos ao vagão, eles também vão passar a se deslocar em relação ao solo com uma velocidade constante v_{mT}. De acordo com a mecânica relacional e a equação (16.54), o conjunto de galáxias não vai exercer uma força resultante sobre nenhum corpo, já que não tem aceleração entre este corpo e as galáxias. Isto significa que as molas vão continuar com seu comprimento relaxado ℓ_o, figura 20.10 (b).

Em seguida aplica-se uma aceleração horizontal constante a_{mT} ao vagão e uma aceleração horizontal constante A_{GT} ao conjunto de galáxias. Estas duas acelerações podem ter valores diferentes, sendo sempre consideradas em relação ao solo. Qual vai ser o comprimento ℓ de cada mola neste caso?

Como a mola tem uma extremidade presa ao vagão e outra extremidade presa ao corpo, ambos vão adquirir a mesma aceleração constante a_{mT} que foi aplicada ao vagão. Esta situação hipotética está representada na figura 20.11.

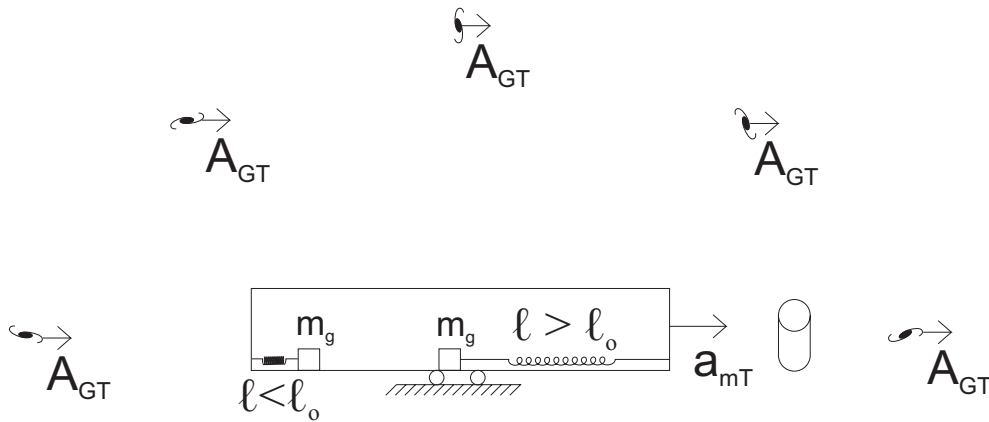



Figura 20.11: Vagão, molas e massas m_g deslocando-se juntos com aceleração constante a_{mT} em relação ao solo, enquanto que as galáxias estão com aceleração A_{GT} em relação ao solo. Situação na qual $a_{mT} > A_{GT}$.

Vamos considerar como positivo o sentido que aponta do vagão para o cilindro preso ao solo da figura 20.11. De acordo com a equação (16.54), a força inercial atuando sobre cada corpo será dada por $F_i = -\Phi_\infty m_g(a_{mT} - A_{GT})$. A força elástica exercida pela mola esquerda da figura 20.11 é dada por $F_e = -k(\ell - \ell_o)$,

enquanto que a força elástica exercida pela mola da direita é dada por $F_e = k(\ell - \ell_o)$. Para a mola da esquerda obtém-se então, pelo princípio de equilíbrio dinâmico dado pela equação (16.72) e desprezando a força da Terra sobre as molas aceleradas:

$$-k(\ell - \ell_o) - \Phi_\infty m_g (a_{mT} - A_{GT}) = 0 \ . \qquad (20.21)$$

Ou seja, se $a_{mT} > A_{GT}$ teremos $\ell < \ell_o$, como indicado na mola da esquerda da figura 20.11. Por outro lado, se $a_{mT} < A_{GT}$ teremos $\ell > \ell_o$.

Da mesma forma obtém-se para a mola da direita a seguinte equação de movimento:

$$k(\ell - \ell_o) - \Phi_\infty m_g (a_{mT} - A_{GT}) = 0 \ . \qquad (20.22)$$

Ou seja, se $a_{mT} > A_{GT}$ teremos $\ell > \ell_o$, como indicado na mola da direita da figura 20.11. Por outro lado, se $a_{mT} < A_{GT}$ teremos $\ell < \ell_o$.

O mais importante é que para as duas molas teremos $\ell = \ell_o$ sempre que $a_{mT} = A_{GT}$, ou seja, sempre que não houver aceleração relativa entre os corpos e as galáxias. Em particular, as molas vão ficar relaxadas como na figura 20.5 (a), mesmo quando $\vec{a}_{mT} \neq \vec{0}$, desde que $\vec{a}_{mT} = \vec{A}_{GT}$.

Também teremos $\ell = \ell_o$ quando desaparecemos com as galáxias fazendo $\rho_{go} \to 0$, já que Φ_∞ é proporcional à densidade média de massa gravitacional no universo pelas equações (16.41) e (17.29).

Um possível teste experimental destas ideias encontra-se na Subseção 23.5.4.

20.4 Corpo sendo Acelerado em Relação ao Solo enquanto está Dependurado em um Fio

Vamos supor que temos um fio ideal de comprimento constante ℓ com sua extremidade superior presa ao teto de um vagão fechado que pode deslocar-se em relação ao solo. Na extremidade inferior do fio coloca-se um corpo de massa gravitacional m_g. Quando o corpo e o fio estão parados em relação ao solo o fio fica na vertical, figura 20.12 (a). O peso P do corpo apontando para baixo é contrabalançado pela força de tração T exercida pelo fio esticado e apontando para cima. O peso é a força gravitacional exercida pela Terra sobre o corpo, enquanto que a tração é a força exercida pelo fio esticado sobre o corpo. Aplica-se uma força sobre o vagão até que ele passe a se deslocar com uma velocidade v_T constante em relação ao solo. Observa-se que o fio continua dependurado na vertical enquanto esta velocidade permanece constante, figura 20.12 (b).

Figura 20.12: (a) Vagão parado em relação ao solo. (b) Vagão deslocando-se com velocidade constante v_T em relação ao solo.

Aplica-se agora uma força horizontal ao vagão fazendo com que ele se desloque em relação ao solo com uma aceleração constante a_T. Observa-se que o fio fica inclinado de um ângulo θ em relação à vertical, figura 20.13 (a).

A análise deste problema na mecânica relacional é feita com a equação (20.2). Existem três forças atuando sobre o corpo: (a) A força gravitacional exercida pela Terra, que é seu peso $\vec{P}$ apontando para baixo, desprezando a pequena força horizontal exercida pela Terra sobre o corpo acelerado em relação a ela. (b) A força de tensão $\vec{T}$ exercida pelo fio esticado, apontando ao longo de seu comprimento. (c) A força inercial $\vec{F}_i = -\Phi_\infty m_g \vec{a}_{mU} = -\Phi_\infty m_g \vec{a}_{mT}$ exercida gravitacionalmente pelas galáxias e apontando no sentido inverso à aceleração $\vec{a}_{mU}$ do corpo em relação às galáxias. Estas três forças estão representadas na figura 20.13 (b). A equação (20.2) pode então ser escrita como:

$$\vec{P} + \vec{T} - \Phi_\infty m_g \vec{a}_{mT} = \vec{0} \ . \qquad (20.23)$$

Usando o ângulo θ da figura 20.13 (b) e o fato de que a aceleração do corpo é apenas horizontal obtém-se:

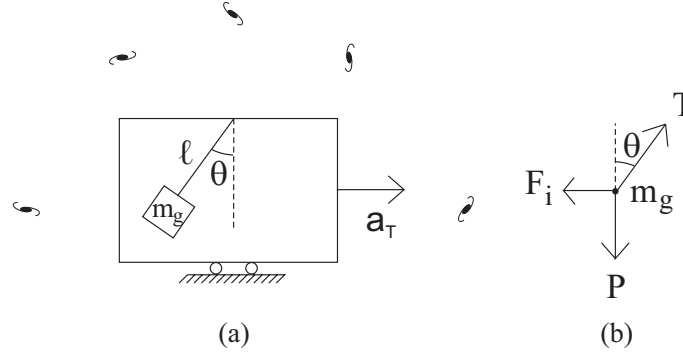



Figura 20.13: (a) Vagão acelerado em relação ao solo, com o fio inclinado de um ângulo θ em relação à vertical. (b) Forças atuando sobre o corpo.

$$T \operatorname{sen}\theta = \Phi_\infty m_g a_{mT} \ , \tag{20.24}$$

e

$$T \cos\theta = P \ . \tag{20.25}$$

Dividindo a equação (20.24) pela equação (20.25), usando que $P = m_g g$ e a equação (17.29), obtém-se:

$$\tan\theta = \frac{\Phi_\infty m_g a_{mT}}{P} = \Phi_\infty \frac{a_{mT}}{g} = \frac{4\pi G \rho_{go} \xi}{3c^2 \alpha^2} \frac{a_{mT}}{g} = \frac{a_{mT}}{g} \ . \tag{20.26}$$

Ou seja, a tangente do ângulo de inclinação θ do fio em relação à vertical é proporcional à aceleração do corpo em relação ao conjunto das galáxias, que coincide nesta aproximação com sua aceleração em relação ao solo. Como esta aceleração pode ser alterada mudando a força horizontal que se aplica ao vagão, é possível controlar o ângulo de inclinação do fio em relação à vertical.

Elevando ao quadrado as equações (20.24) e (20.25), além de utilizar a equação (17.29), obtém-se que a tensão no fio é dada por:

$$T = \sqrt{\Phi_\infty^2 m_g^2 a_{mT}^2 + P^2} = m_g \sqrt{\Phi_\infty^2 a_{mT}^2 + g^2} = m_g \sqrt{\left(\frac{4\pi G \rho_{go} \xi}{3c^2 \alpha^2}\right)^2 a_{mT}^2 + g^2} = m_g \sqrt{a_{mT}^2 + g^2} \ . \tag{20.27}$$

Para medir esta tensão seria necessário utilizar um dinamômetro preso ao fio.

20.4.1 Qual é a Origem da Força que está Inclinando o Fio?

Como visto na figura 20.13 (b), a força horizontal que está inclinando o fio é a força inercial. Esta é uma força de origem gravitacional exercida pelas galáxias sobre o corpo preso ao fio quando há uma aceleração entre este corpo e o conjunto de galáxias. Esta força aponta no sentido de diminuir esta aceleração relativa, ou seja, na direção contrária à aceleração $\vec{a}_{mU}$ do corpo em relação ao referencial universal U, que coincide com a aceleração a_{mT} do corpo em relação ao solo.

Tanto a força peso apontando para baixo quanto a força inercial apontando horizontalmente no sentido oposto à aceleração $\vec{a}_{mT} = \vec{a}_{mU}$ são proporcionais à massa gravitacional m_g do corpo preso ao fio. Isto explica o motivo pelo qual se pode cancelar estas duas massas gravitacionais na equação (20.26), fazendo com que a inclinação do fio não dependa da massa gravitacional do corpo preso a ela.

Por outro lado, pela equação (20.26) observa-se que esta inclinação do fio é diretamente proporcional à densidade média de massa gravitacional do universo ρ_{go} e inversamente proporcional à massa gravitacional da Terra, M_{gT}. A massa gravitacional da Terra aparece na força peso por unidade de massa, $P/m_g = g = GM_{gT}/R_T^2$, onde R_T é o raio da Terra. Como a aceleração de queda livre na Lua tem 1/6 da aceleração de queda livre na Terra, $g_L = 1,6\ m/s^2$, obtém-se da equação (20.26) que a tangente do ângulo de inclinação será 6 vezes maior na Lua do que na Terra, supondo que o vagão tenha a mesma aceleração em relação ao referencial universal U tanto na Lua quanto na Terra.

Se pudéssemos controlar a densidade média de massa gravitacional do universo, ρ_{go}, poderíamos alterar o ângulo de inclinação do fio em relação à vertical, sem ter de alterar a aceleração do corpo preso ao fio em relação ao referencial U e sem ter de alterar a massa gravitacional do planeta que está atraindo este corpo. Ou seja, da equação (20.26) observa-se que $\tan\theta$ é proporcional a ρ_{go}, de tal forma que mesmo mantendo a_{mT}/g constante, poderíamos variar este ângulo ao variar ρ_{go}. Em particular, aumentando esta densidade aumentamos o ângulo, enquanto que diminuindo esta densidade diminuímos o ângulo. Isto indica que o conjunto de galáxias distantes controla a inclinação do fio. Caso $\rho_{go} \to 0$, esta equação indica que o fio ficaria na vertical, $\theta \to 0$, apesar do corpo ainda estar acelerado em relação ao solo. Este último resultado é apenas uma aproximação. De acordo com uma lei de Weber gravitacional, quando um corpo está acelerado horizontalmente em relação ao solo, vai haver uma pequena componente horizontal da força gravitacional exercida pela Terra sobre o corpo que depende desta aceleração. Esta componente da força de Weber foi desprezada em comparação com a componente horizontal da força de tensão no fio para assim chegar na equação (20.26). Caso esta pequena componente não tivesse sido desprezada, concluiríamos que ainda haveria uma pequena inclinação do fio em relação à vertical quando o corpo estivesse acelerado em relação ao solo, mesmo que $\rho_{go} \to 0$.

Uma outra maneira de perceber a influência das galáxias distantes neste problema ocorre ao observar que a tensão T no fio depende da densidade média ρ_{go} de massa gravitacional no universo através da equação (20.27). Quanto maior for esta densidade, maior será a tensão no fio para uma mesma aceleração a_{mT} do corpo em relação ao solo.

Um possível teste experimental destas ideias encontra-se na Subseção 23.5.4.

20.4.2 Forças no Referencial Parado com o Corpo

O problema também pode ser analisado no referencial A de uma pessoa que está dentro do vagão. Neste caso o fio e o corpo preso ao fio são vistos em repouso, $\vec{a}_{mA} = \vec{0}$, apesar do fio estar inclinado de um ângulo θ em relação à vertical. Já a Terra e as galáxias são vistas como tendo a mesma aceleração neste referencial A, ou seja, $\vec{a}_{TA} = \vec{A}_{GA}$, figura 20.14.

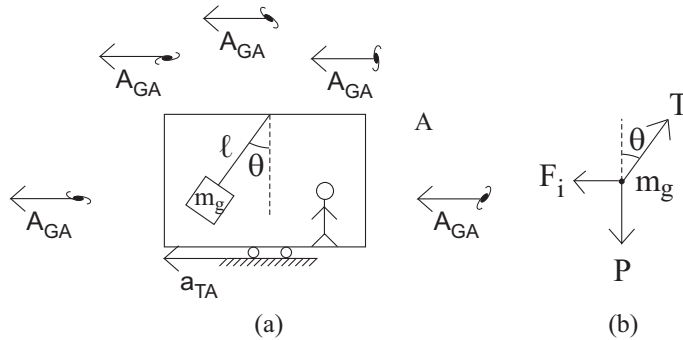



Figura 20.14: Situação da figura 20.13 vista de um referencial A parado em relação ao vagão. (a) Fio e corpo parados enquanto que a Terra e as galáxias deslocam-se para a esquerda com a mesma aceleração. (b) Forças atuando sobre o corpo.

A inclinação do fio em relação à vertical ocorre no mesmo sentido da aceleração das galáxias. Este fato é explicado na mecânica relacional devido à força inercial F_i exercida pelas galáxias sobre o corpo preso ao fio. Esta força de origem gravitacional aponta no sentido da aceleração das galáxias em relação ao referencial A, de acordo com a equação (20.4), figura 20.14 (b). Ao puxarem o corpo para a esquerda, as galáxias fazem com que aumente a tensão no fio comparada com a tensão $T = m_g g$ no caso em que o vagão está parado na Terra com o fio na vertical. Este aumento de tensão devido à força inercial exercida pelas galáxias está indicado na equação (20.27).

20.4.3 Qual Seria a Inclinação do Fio se Fosse Possível Acelerar as Galáxias em Relação ao Solo?

As discussões anteriores podem ser generalizadas considerando uma situação hipotética na qual é fornecida uma aceleração horizontal $\vec{a}_{mT}$ ao vagão, ao mesmo tempo em que se fornece uma aceleração horizontal $\vec{A}_{GT}$ ao conjunto de galáxias, figura 20.15. Estas duas acelerações podem ter valores diferentes entre si, sendo

sempre consideradas em relação ao solo. Como o fio e o corpo de massa gravitacional m_g estão ligados ao vagão, eles também vão atingir a mesma aceleração $\vec{a}_{mT}$ em relação ao solo. Qual seria a inclinação θ do fio em relação à vertical neste caso?

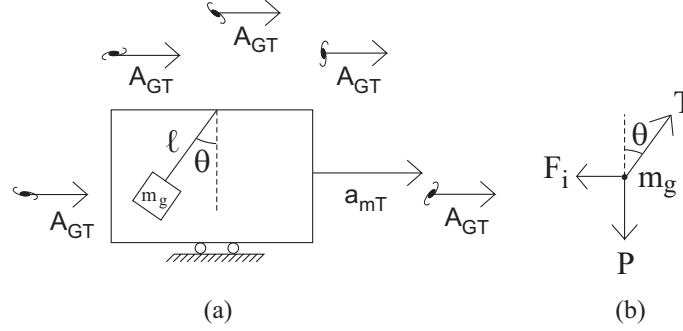



Figura 20.15: (a) Vagão e galáxias deslocando-se com acelerações constantes a_{mT} e A_{GT} em relação ao solo. Situação na qual $a_{mT} > A_{GT}$. (b) Forças atuando sobre o corpo.

A equação de movimento neste caso é dada pela equação (20.4). Além da força inercial $\vec{F}_i$ atuando no sentido contrário à aceleração relativa entre o corpo e as galáxias, as outras forças atuando sobre o corpo são seu peso $\vec{P} = -m_g g\hat{z}$ apontando verticalmente para baixo (desprezando a pequena componente horizontal que surge nesta força exercida pela Terra sobre o corpo, devida à aceleração do corpo em relação ao solo) e a tensão $\vec{T}$ da corda esticada atuando ao longo de seu comprimento, figura 20.15 (b). Em termos das componentes horizontal e vertical esta equação pode então ser escrita como:

$$T \operatorname{sen}\theta = \Phi_\infty m_g (a_{mT} - A_{GT}) \ , \tag{20.28}$$

e

$$T \cos\theta = P \ . \tag{20.29}$$

Dividindo a equação (20.28) pela equação (20.29), usando que $P = m_g g$ e a equação (17.29), obtém-se:

$$\tan\theta = \frac{\Phi_\infty m_g (a_{mT} - A_{GT})}{P} = \Phi_\infty \frac{(a_{mT} - A_{GT})}{g} = \frac{4\pi G \rho_{go} \xi}{3c^2\alpha^2} \frac{(a_{mT} - A_{GT})}{g} = \frac{(a_{mT} - A_{GT})}{g} \ . \tag{20.30}$$

Elevando ao quadrado as equações (20.28) e (20.29) obtém-se que a tensão no fio é dada por:

$$T = \sqrt{\Phi_\infty^2 m_g^2 (a_{mT} - A_{GT})^2 + P^2} = m_g \sqrt{\Phi_\infty^2 (a_{mT} - A_{GT})^2 + g^2} \ . \tag{20.31}$$

O ponto importante a observar nas equações (20.30) e (20.31) é que na mecânica relacional tanto a tangente do ângulo de inclinação θ do fio em relação à vertical, quanto a tensão T no fio, dependem apenas da aceleração *relativa* entre o corpo de prova e o conjunto de galáxias, a saber, $a_{mT} - A_{GT}$. Ou seja, não interessa a aceleração do corpo de prova em relação ao observador. Só interessa a aceleração do corpo em relação ao conjunto de galáxias, já que estamos desprezando aqui os pequenos efeitos que surgem devidos à aceleração do corpo em relação ao solo ou em relação ao céu de estrelas fixas pertencentes à nossa galáxia. Em particular, se $a_{mT} - A_{GT} = 0$, o fio volta a ficar na vertical, com a tensão sendo dada pelo peso, $T = P = m_g g$. Isto vai acontecer mesmo quando $a_{mT} \neq 0$, desde que $a_{mT} = A_{GT}$.

Um possível teste experimental destas ideias encontra-se na Subseção 23.5.4.

20.5 Corpo sendo Acelerado em Relação ao Solo enquanto está Dependurado em uma Mola

Podemos tratar do caso em que o corpo sendo acelerado em relação ao solo está dependurado em uma mola em analogia com o que foi feito nas Seções 6.6, 19.2 e 20.4. Novamente desprezamos a massa gravitacional da mola comparada com a massa gravitacional do corpo preso a ela. Essencialmente substituímos o fio da Seção 20.4 por uma mola de constante elástica k e comprimento relaxado ℓ_o. Quando o vagão desloca-se

com uma aceleração $\vec{a}_T$ em relação ao solo, observa-se que a mola fica inclinada de um ângulo θ em relação à vertical e fica esticada com um comprimento ℓ, figura 20.16 (a).

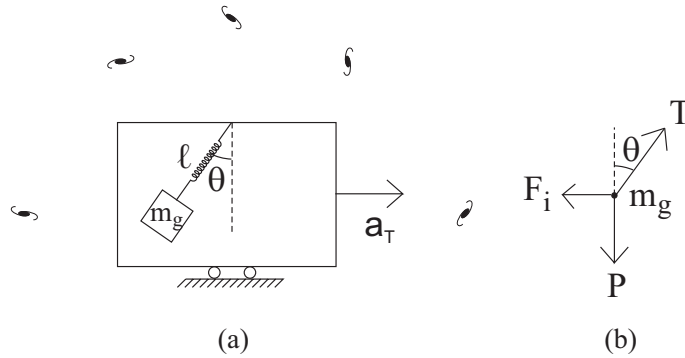



Figura 20.16: (a) Mola acelerada em relação ao solo, inclinada de um ângulo θ em relação à vertical. (b) Força peso, força inercial e força de tensão atuando sobre o corpo.

Todos os resultados obtidos na Seção 20.4 continuam válidos aqui. A única diferença é que a tensão T da mola pode ser visualizada por sua mudança de comprimento através de $T = k(\ell - \ell_o)$.

Os pontos importantes a observar na comparação da mecânica relacional com a mecânica clássica são que tanto a inclinação da mola quanto seu esticamento estão relacionadas à interação gravitacional entre o corpo preso à mola e o conjunto de galáxias. A força inercial exercida pelas galáxias sobre o corpo é transmitida à mola, inclinando-a em relação à vertical e esticando-a. Estes aspectos dependem da densidade média de massa gravitacional no universo, ρ_{go}, assim como da aceleração *relativa* entre o corpo de prova e o conjunto de galáxias, $a_{mT} - A_{GT}$. Em particular, a mola ficará na vertical com a tensão equilibrada pelo peso, $T = k(\ell - \ell_o) = P = m_g g$, não apenas quando $\rho_{go} \to 0$, mas também quando $a_{mT} = A_{GT}$.

20.6 Recipiente Acelerado sobre o Solo, com um Fluido em seu Interior

Analisa-se agora a situação discutida nas Seções 4.3, 5.3 e 6.7. Temos um recipiente com um fluido incompressível sobre a mesa. Quando o recipiente está parado ou em movimento retilíneo uniforme em relação ao solo, observa-se que a superfície do fluido permanece horizontal, figura 20.17.

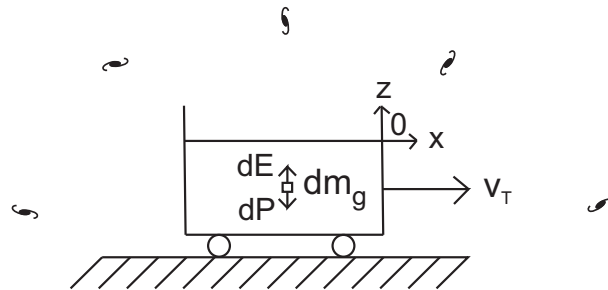



Figura 20.17: Recipiente parado ou deslizando com velocidade constante em relação ao solo, com um fluido em seu interior.

As forças atuando sobre um elemento do fluido de massa gravitacional dm_g e volume dV são seu peso $d\vec{P}$ apontando para baixo e o empuxo $d\vec{E} = -(\nabla p)dV$ apontando para cima devido ao gradiente de pressão no fluido. Na aproximação sendo considerada aqui não existe aceleração do fluido em relação ao referencial universal U, $\vec{a}_{mT} = \vec{a}_{mU} = \vec{0}$. A análise matemática deste problema é a mesma fornecida pela mecânica newtoniana. A pressão $p(z)$ varia linearmente com a profundidade do fluido de acordo com a equação (4.11), onde p_o é a pressão atmosférica na superfície livre do fluido e g é a força gravitacional por unidade de massa exercida pela Terra sobre um elemento do fluido. As superfícies isobáricas são planos horizontais paralelos à superfície livre do fluido.

Porém, quando o recipiente passa a deslocar-se com uma aceleração horizontal constante $\vec{a}_T$ em relação ao solo, observa-se que a superfície livre do fluido fica inclinada de um ângulo α em relação à horizontal, figura 20.18 (a).

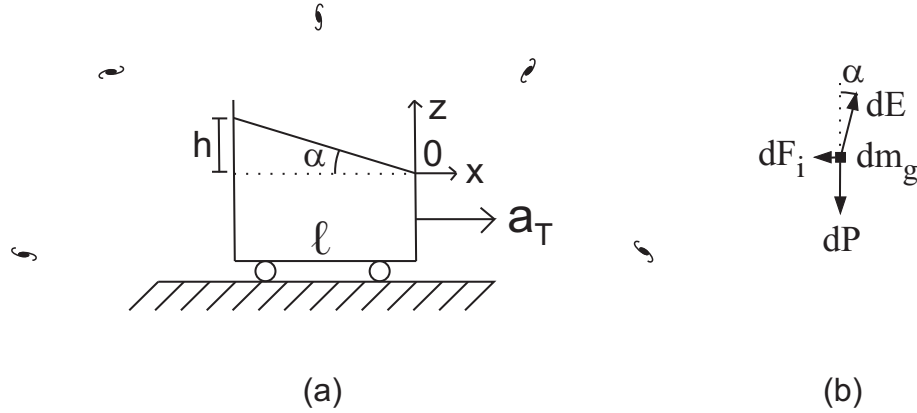



Figura 20.18: (a) Recipiente com aceleração linear constante em relação ao solo, com um fluido em seu interior. (b) Força peso dP, força de empuxo dE e força inercial dF_i atuando sobre um elemento do fluido.

As forças atuando sobre um elemento do fluido de massa gravitacional dm_g são mostradas na figura 20.18 (b). Existem duas componentes da força gravitacional exercida pela Terra sobre este elemento do fluido. A mais importante é a força peso $d\vec{P} = -dm_g g\hat{z}$ apontando verticalmente para baixo. A outra componente que vem de uma força de Weber gravitacional é horizontal e surge quando há uma aceleração entre o fluido e o solo. Na análise apresentada aqui vamos desprezar esta componente horizontal quando comparada com a componente vertical dada pelo peso do elemento de fluido. Além da força exercida pela Terra, existem duas outras forças exercidas sobre este elemento de fluido, a saber, a força de empuxo devida ao restante do fluido ao seu redor, além da força exercida sobre o elemento pelas galáxias distantes. A força de empuxo devida ao gradiente de pressão é dada por $d\vec{E} = -(\nabla p)dV$. A força inercial exercida pelo conjunto de galáxias devida à aceleração $\vec{a}_{mU} = \vec{a}_{mT}$ do fluido em relação às galáxias é dada por $d\vec{F}_i = -\Phi_\infty dm_g \vec{a}_{mU} = -\Phi_\infty dm_g \vec{a}_{mT}$. Pelo princípio de equilíbrio dinâmico, equação (20.2), a equação de movimento fica dada por

$$-dm_g g\hat{z} - (\nabla p)dV - \Phi_\infty dm_g \vec{a}_{mT} = \vec{0} \; . \tag{20.32}$$

Seguindo o procedimento da Seção 6.7 obtém-se que a tangente do ângulo α de inclinação e a pressão $p(x, \; y, \; z)$ em um ponto qualquer do fluido são dadas por, respectivamente (com h e ℓ sendo mostrados na figura 20.18):

$$\tan\alpha = \Phi_\infty \frac{a_{mT}}{g} = \frac{4\pi G\rho_{go}\xi}{3c^2\alpha^2}\frac{a_{mT}}{g} = \frac{a_{mT}}{g} = \frac{h}{\ell} \; , \tag{20.33}$$

e

$$p(x, \; y, \; z) = -\Phi_\infty \rho_g a_{mT} x - \rho_g g z + p_o \; . \tag{20.34}$$

Ou seja, as superfícies isobáricas são planos paralelos ao plano da superfície livre do fluido dado por $z = -(\tan\alpha)x$.

A superfície livre do fluido fica inclinada quando ele está acelerado em relação ao conjunto das galáxias distantes. São estas galáxias que exercem gravitacionalmente a força inercial horizontal $d\vec{F}_i$ que atua sobre cada elemento do fluido, inclinando sua superfície livre em relação à horizontal.

20.6.1 Qual é a Origem da Força que está Inclinando o Fluido?

De acordo com a mecânica relacional, a força horizontal $d\vec{F}_i$ indicada na figura 20.18 (b) é a força inercial exercida pelas galáxias sobre o elemento de fluido. Ela é dada por $d\vec{F}_i = -\Phi_\infty dm_g \vec{a}_{mU}$, sendo que na aproximação considerada aqui temos $\vec{a}_{mU} = \vec{a}_{mT}$. A força inercial vai ser exercida quando houver uma aceleração do fluido em relação ao referencial U das galáxias distantes. Esta é uma força de origem gravitacional que vem da componente da força de Weber que depende da aceleração $\ddot{r}$ entre os corpos que estão

interagindo. Por este motivo o elemento de massa dm_g do fluido que aparece em $d\vec{F}_i$ é um elemento de massa gravitacional.

A influência da massa gravitacional das galáxias está indicada na equação (20.33) através da densidade média ρ_{go} de massa gravitacional do universo. Se fosse possível aumentar ρ_{go}, mantendo a_{mT}/g constante, aumentaríamos o ângulo α de inclinação do fluido em relação à horizontal. Um possível teste experimental destas ideias encontra-se na Subseção 23.5.4.

20.6.2 Qual Seria a Inclinação do Fluido se Todos os Outros Corpos Astronômicos Desaparecessem?

De acordo com a equação (20.33), a inclinação α do fluido tenderia a zero se fosse possível desaparecer com as galáxias distantes fazendo $\rho_{go} \to 0$, mesmo que o fluido ainda mantivesse a mesma aceleração a_{mT} em relação ao solo.

Na realidade esta previsão é apenas uma aproximação já que para chegar na equação (20.33) foi desprezada a pequena componente horizontal da força gravitacional da Terra exercida sobre o fluido quando há uma aceleração entre ambos. Caso esta pequena componente fosse incluída nas contas, concluiríamos que ainda haveria uma pequena inclinação do fluido em relação à horizontal mesmo quando $\rho_{go} \to 0$.

20.6.3 Forças no Referencial Parado com o Fluido

Na figura 20.19 (a) apresentamos esta mesma situação do ponto de vista de um referencial A que está preso ao recipiente. O recipiente e a água estão em repouso neste referencial, enquanto que a Terra e as galáxias são vistas com uma mesma aceleração $\vec{A}_{TA} = \vec{A}_{GA}$ para a esquerda. Na figura 20.19 (b) apresentamos as forças sobre um elemento de massa gravitacional do fluido de acordo com a mecânica relacional.

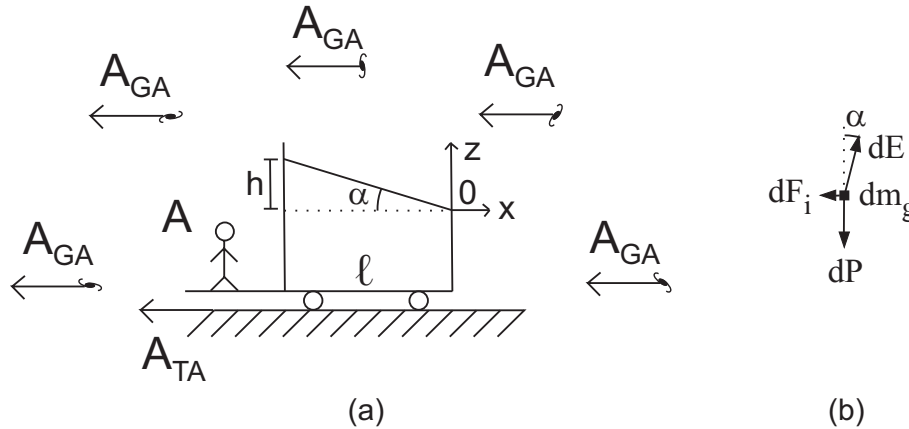



Figura 20.19: Referencial A de uma pessoa parada em relação ao recipiente e ao fluido. A Terra e as galáxias são vistas tendo a mesma aceleração para a esquerda, $\vec{A}_{TA} = \vec{A}_{GA}$. (a) Fluido inclinado de um ângulo α em relação à horizontal. (b) Força peso dP, força de empuxo dE e força inercial dF_i atuando sobre um elemento do fluido.

A equação de movimento é dada pela equação (20.4) com $\vec{a}_{kA} = \vec{0}$. Além da força peso dP exercida pela Terra e da força de empuxo dE exercida pelo restante do fluido sobre o elemento de massa gravitacional dm_g, existe ainda a força inercial dF_i exercida pelas galáxias. Como as galáxias estão aceleradas para a esquerda, elas exercem uma força inercial $d\vec{F}_i = \Phi_\infty dm_g \vec{A}_{GA}$ para a esquerda sobre o elemento de fluido, fazendo com que a superfície livre do fluido fique inclinada em relação à horizontal.

20.6.4 Qual Seria a Inclinação do Fluido se Fosse Possível Acelerar as Galáxias em Relação ao Solo?

Nesta Subseção vamos considerar a Terra como sendo o referencial T em relação ao qual as acelerações devem ser consideradas. Na figura 20.20 apresentamos uma situação hipotética na qual é fornecida uma aceleração horizontal $\vec{a}_{mT}$ ao fluido, sendo que ao mesmo tempo é fornecida uma aceleração horizontal $\vec{A}_{GT}$ ao conjunto de galáxias distantes ao redor da Terra.

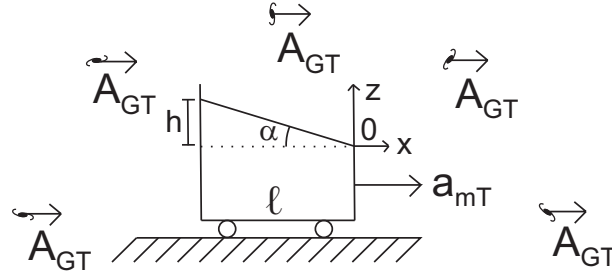



Figura 20.20: Recipiente e fluido com aceleração horizontal $\vec{a}_{mT}$ em relação ao solo, enquanto que as galáxias estão com aceleração horizontal $\vec{A}_{GT}$ em relação ao solo. Caso em que $a_{mT} > A_{GT}$.

A equação de movimento é dada pela equação (20.4). Fazendo as contas da mesma forma que na Seção 20.6 obtém-se que a tangente do ângulo α de inclinação do fluido em relação à horizontal fica dado por:

$$\tan\alpha = \Phi_\infty \frac{a_{mT} - A_{GT}}{g} = \frac{4\pi G \rho_{go}\xi}{3c^2\alpha^2}\frac{a_{mT} - A_{GT}}{g} = \frac{a_{mT} - A_{GT}}{g} = \frac{h}{\ell} \; . \tag{20.35}$$

O importante a observar nesta equação é que a inclinação α da superfície livre do fluido vai depender apenas da aceleração *relativa* $a_{mT} - A_{GT}$ entre o fluido e o conjunto de galáxias. Se tivermos $a_{mT} - A_{GT} = 0$, então $\alpha \to 0$.

Esta inclinação é controlada não apenas pela aceleração relativa entre o fluido e o conjunto de galáxias, mas também pela densidade média de massa gravitacional do universo, ρ_{go}. Se pudéssemos variar ρ_{go}, poderíamos alterar o ângulo de inclinação do fluido mantendo inalterada sua aceleração relativa em relação ao conjunto de galáxias e mantendo inalterada a massa gravitacional da Terra.

Um possível teste experimental destas ideias encontra-se na Subseção 23.5.4.

20.7 Distinção entre a Mecânica Newtoniana e a Mecânica Relacional

Na figura 20.21 apresentamos de forma reduzida uma previsão da mecânica relacional que a distingue da mecânica newtoniana. Consideramos aqui corpos movendo-se sobre a superfície terrestre supondo novamente que as condições (17.67) e (20.1) sejam satisfeitas.

Na figura 20.21 (a) temos um vagão em repouso sobre o solo. Também estão em repouso sobre o solo os corpos que estão no interior do vagão, a saber, duas molas horizontais, um recipiente com fluido e um corpo dependurado em um fio. As molas idênticas têm a mesma constante elástica k e estão com seus comprimentos naturais ℓ_o, estando apoiadas sobre a superfície sem atrito do vagão. Um corpo de massa gravitacional m_g está ligado a cada uma destas molas, sendo que as outras extremidades das molas estão presas às paredes do vagão. O recipiente possui um fluido incompressível ideal cuja superfície livre fica na horizontal quando o recipiente está parado ou em movimento retilíneo uniforme sobre o solo. O fio preso ao teto com um corpo de massa gravitacional m_g em sua extremidade inferior é considerado ideal, tendo um comprimento constante ℓ. Estes corpos não possuem aceleração em relação ao solo, $\vec{a}_{mT} = \vec{0}$. Também estão representadas nesta figura o conjunto de galáxias ao redor da Terra. Também se considera que elas não estão aceleradas em relação ao solo, $\vec{A}_{GT} = \vec{0}$.

Na figura 20.21 (b) é indicado o que acontece com estes corpos quando o vagão é acelerado para a direita em relação ao solo com uma aceleração $\vec{a}_{mT} = \vec{a}$, supondo que as galáxias continuam sem aceleração em relação ao solo, $\vec{A}_{GT} = \vec{0}$. A aceleração relativa entre os corpos e as galáxias é dada por $\vec{a}_{mT} - \vec{A}_{GT} = \vec{a} - \vec{0} = \vec{a}$. A mola da esquerda fica comprimida, a mola da direita fica esticada, o fluido fica inclinado em relação à horizontal, o mesmo acontecendo com o fio preso ao teto.

Na figura 20.21 (c) está indicado o que aconteceria com estes corpos de acordo com a mecânica newtoniana em uma experiência de pensamento na qual os corpos continuassem em repouso em relação ao solo, $\vec{a}_{mT} = \vec{0}$, enquanto que o conjunto de galáxias fosse acelerado para a esquerda em relação ao solo com uma aceleração $\vec{A}_{GT} = -\vec{a}$. A aceleração relativa entre os corpos e as galáxias é dada por $\vec{a}_{mT} - \vec{A}_{GT} = \vec{0} - (-\vec{a}) = \vec{a}$. Ou seja, é a mesma aceleração relativa que ocorria no caso da figura 20.21 (b). Apesar desta igualdade entre as acelerações relativas nos casos (b) e (c), os efeitos dinâmicos não são os mesmos. Na mecânica clássica o conjunto de galáxias aceleradas em relação ao solo continua não exercendo uma força resultante sobre os

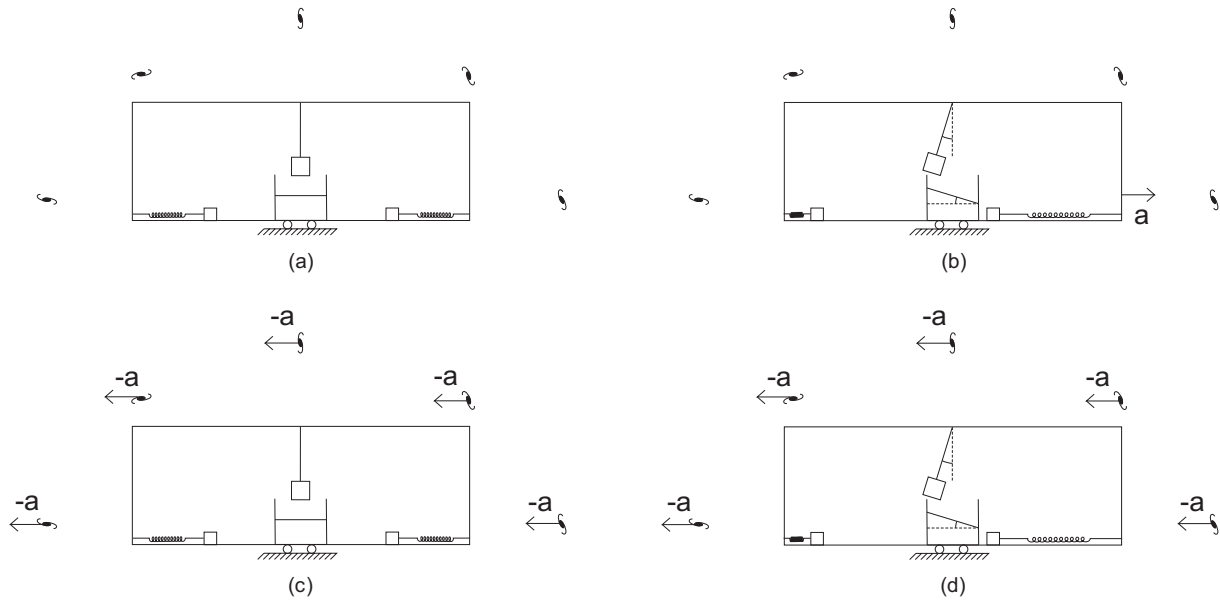



Figura 20.21: (a) Corpos e galáxias sem aceleração em relação ao solo, $\vec{a}_{mT} = \vec{A}_{GT} = \vec{0}$. (b) Efeitos sobre os corpos quando estão acelerados em relação às galáxias, $\vec{a}_{mT} = \vec{a}$ e $\vec{A}_{GT} = \vec{0}$. (c) Previsão da mecânica newtoniana sobre o que aconteceria com os corpos se fosse possível acelerar o conjunto de galáxias em relação ao solo, $\vec{A}_{GT} = -\vec{a}$, mantendo os corpos parados em relação ao solo, $\vec{a}_{mT} = \vec{0}$. (d) Previsão da mecânica relacional para esta última situação.

corpos na Terra, de tal forma que as duas molas continuam com seus comprimentos relaxados ℓ_o, a superfície livre do fluido continua horizontal, além do fio preso ao teto continuar na vertical.

Na figura 20.21 (d) está indicado o que aconteceria com estes corpos de acordo com a mecânica relacional nesta última situação. Ou seja, na situação na qual os corpos continuam em repouso em relação ao solo, $\vec{a}_{mT} = \vec{0}$, enquanto que o conjunto de galáxias fica acelerado para a esquerda em relação ao solo com uma aceleração $\vec{A}_{GT} = -\vec{a}$. A aceleração relativa entre os corpos e as galáxias é dada por $\vec{a}_{mT} - \vec{A}_{GT} = \vec{0} - (-\vec{a}) = \vec{a}$. Ou seja, é a mesma aceleração relativa que ocorria no caso da figura 20.21 (b). De acordo com a mecânica relacional os efeitos dinâmicos no caso (d) são os mesmos efeitos que ocorriam no caso (b). As galáxias exercem forças inerciais sobre os corpos dentro do vagão no caso (d) que possuem os mesmos sentidos e intensidades das forças inerciais exercidas pelas galáxias sobre os corpos no caso (b). São forças de origem gravitacional que dependem apenas da aceleração dos corpos em relação às galáxias, $\vec{a}_{mT} - \vec{A}_{GT}$. Logo, a mecânica relacional prevê que a mola da esquerda deve ficar comprimida, a mola da direita deve ficar esticada, o fluido deve ficar inclinado em relação à horizontal, enquanto que o fio preso ao teto deve ficar inclinado em relação à vertical.

Não é possível controlar a aceleração das galáxias em relação ao solo. Logo não é possível testar estas previsões da mecânica relacional. Mas as ideias expostas nesta Subseção sugerem um teste experimental que poderia ser realizado no laboratório, como será visto na Subseção 23.5.4.

Capítulo 21

Movimentos Oscilatórios

Consideramos aqui corpos movendo-se sobre a superfície terrestre supondo novamente que as condições (17.67) e (20.1) sejam satisfeitas. Neste caso a equação de movimento da mecânica relacional se reduz à equação (20.2).

21.1 Mola

Analisamos inicialmente um corpo de massa gravitacional m_g preso a uma mola e oscilando horizontalmente na superfície da Terra. O peso do corpo é contrabalançado por uma força de reação normal exercida por uma mesa sem atrito, figura 21.1.

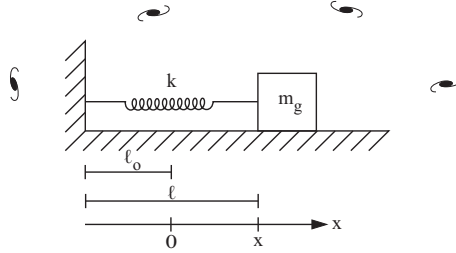



Figura 21.1: Corpo preso a uma mola horizontal que tem a outra extremidade fixa em relação ao solo.

A mola de constante elástica k tem um comprimento relaxado ℓ_o, sendo ℓ seu comprimento quando está esticada ou comprimida. Seja x um eixo horizontal com origem $x = 0$ sobre o corpo no caso em que a mola está relaxada. Seja $x \equiv \ell - \ell_o$ a variação de comprimento da mola, com $x > 0$ indicando o caso em que ela está esticada e $x < 0$ indicando o caso em que ela está comprimida. As forças atuando sobre o corpo são a força elástica $\vec{F}_e = -k(\ell - \ell_o)\hat{x} = -kx\hat{x}$ exercida pela mola comprimida ou esticada, além da força inercial $\vec{F}_i = -\Phi_\infty m_g \vec{a}_{mU} = -\Phi_\infty m_g \vec{a}_{mT}$ exercida pelo conjunto de galáxias no caso em que o corpo está acelerado no referencial universal U. Neste caso a equação de movimento (20.2) se reduz a:

$$- kx - \Phi_\infty m_g a_{mT} = 0 \ . \tag{21.1}$$

Como estamos considerando apenas o movimento unidimensional, podemos colocar $a_{mT} = \ddot{x}$. A solução desta equação de movimento resulta em:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \theta_o) \ , \tag{21.2}$$

onde A é a amplitude de oscilação (especificada pelas condições iniciais), θ_o é a fase de oscilação (também especificada pelas condições iniciais) e ω é a frequência angular de oscilação. Usando a equação (17.29) esta frequência angular é dada por:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\Phi_\infty m_g}} = \sqrt{\frac{3c^2\alpha^2}{4\pi G \rho_{go} \xi}} \sqrt{\frac{k}{m_g}} = \sqrt{\frac{k}{m_g}} \ . \tag{21.3}$$

Este resultado mostra que para molas oscilando horizontalmente, a frequência de vibração é inversamente proporcional ao peso do corpo de prova, como observado experimentalmente.

Uma comparação com a equação (7.4) da mecânica newtoniana mostra que a maior diferença é o aparecimento na mecânica relacional de $\Phi_\infty m_g$ no lugar da massa inercial m_i. Se pudéssemos dobrar ρ_{go}, mantendo inalteradas a mola, a Terra e o corpo de prova, diminuiríamos a frequência angular de oscilação em $\sqrt{2}$ comparada com a frequência normal de oscilação desta mola. Isto seria equivalente a dobrar a massa inercial newtoniana do corpo de prova. Ou seja, a frequência de oscilação é controlada pela densidade média de massa gravitacional do universo.

Um possível teste experimental destas ideias encontra-se na Subseção 23.5.2.

21.2 Pêndulo Simples

Consideramos agora um pêndulo simples no equador oscilando próximo à superfície terrestre. Vamos utilizar a condição de que o comprimento ℓ do fio permanece constante e um sistema de coordenadas polares (ℓ, θ), sendo θ o ângulo de inclinação do fio em relação à vertical. Um corpo de massa gravitacional m_g está preso à extremidade inferior do fio, enquanto que a extremidade superior do fio está presa a um suporte fixo em relação ao solo, figura 21.2 (a).

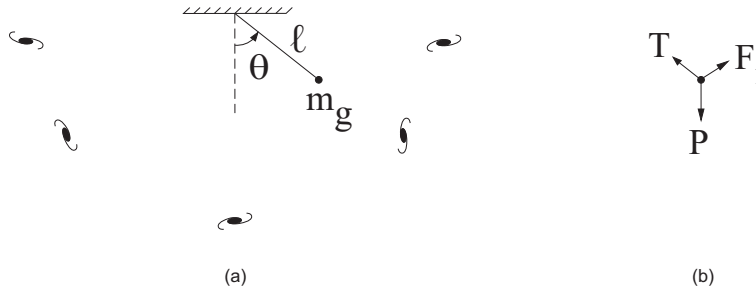



Figura 21.2: (a) Pêndulo de comprimento ℓ inclinado de um ângulo θ em relação à vertical, com um corpo de massa gravitacional m_g em sua extremidade inferior. (b) Forças atuando sobre m_g na mecânica relacional: peso $\vec{P}$, tensão $\vec{T}$ no fio, além da força inercial $\vec{F}_i$ exercida gravitacionalmente pelas galáxias distantes.

Desprezando a resistência do ar, as forças agindo sobre o corpo de massa gravitacional m_g são seu peso $\vec{P}$ atuando verticalmente para baixo, a tensão $\vec{T}$ no fio esticado atuando ao longo de seu comprimento, além da força gravitacional exercida pelas galáxias distantes. Esta última força é a chamada força inercial atuando sobre o pêndulo, sendo dada por $\vec{F}_i = -\Phi_\infty m_g \vec{a}_{mT}$. Estas três forças estão representadas na figura 21.2 (b).

O movimento é descrito pela equação (20.2):

$$\vec{T} + m_g\vec{g} - \Phi_\infty m_g \vec{a}_{mT} = \vec{0} \ . \tag{21.4}$$

Usando que o comprimento ℓ do fio é constante, a aceleração do corpo em relação ao solo pode ser expressa em termos das coordenadas polares na seguinte forma:

$$\vec{a}_{mT} = -\ell\dot{\theta}^2\hat{\ell} + \ell\ddot{\theta}\hat{\theta} \ . \tag{21.5}$$

Aqui $\hat{\ell}$ é um vetor de módulo unitário apontando ao longo do comprimento do fio em cada instante, enquanto que $\hat{\theta}$ é um vetor de módulo unitário apontando tangencialmente ao longo da direção azimutal θ em cada instante, figura 21.3.

Usamos agora que a tensão no fio é dada por $\vec{T} = -|\vec{T}|\hat{\ell} = -T\hat{\ell}$, sendo $T \equiv |\vec{T}|$ o módulo da tensão. Usamos ainda que $\vec{P} = -m_g g\hat{z} = m_g g(\cos\theta\hat{\ell} - \operatorname{sen}\theta\hat{\theta})$, onde escolhemos o eixo z apontando para cima, tal que $\hat{z} = -\cos\theta\hat{\ell} + \operatorname{sen}\theta\hat{\theta}$, figura 21.3. Utilizando estes resultados juntamente com as equações (21.4) e (21.5) obtém-se que o movimento fica descrito pela seguinte equação:

$$-T\hat{\ell} + m_g g(\cos\theta\hat{\ell} - \operatorname{sen}\theta\hat{\theta}) + \Phi_\infty m_g(\ell\dot{\theta}^2\hat{\ell} - \ell\ddot{\theta}\hat{\theta}) = \vec{0} \ . \tag{21.6}$$

A equação (21.6) pode então ser escrita da seguinte forma em termos de suas componentes $\hat{\ell}$ e $\hat{\theta}$, respectivamente:

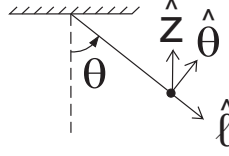



Figura 21.3: Vetor unitário $\hat{\ell}$ ao longo do comprimento do pêndulo e vetor unitário azimutal $\hat{\theta}$ apontando tangencialmente ao longo da direção azimutal θ. Também está representado o vetor unitário $\hat{z}$ apontando verticalmente para cima.

$$-T + m_g g \cos\theta + \Phi_\infty m_g \ell \dot{\theta}^2 = 0 \ , \tag{21.7}$$

e

$$m_g g \operatorname{sen}\theta + \Phi_\infty m_g (\ell \ddot{\theta}) = 0 \ . \tag{21.8}$$

A equação (21.8) mostra que mesmo sem aproximações adicionais, o valor do ângulo de oscilação como uma função do tempo não vai depender de m_g, já que m_g pode ser cancelado nesta equação. O mesmo não acontece na equação (21.7) para a tensão T.

Na aproximação de pequenas oscilações ($\theta \ll 1$ rad, tal que $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$), a equação (21.8) e sua solução se reduzem a:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\Phi_\infty \ell}\theta = 0 \ , \tag{21.9}$$

e

$$\theta = A\cos(\omega t + B) \ , \tag{21.10}$$

onde A e B são constantes que dependem das condições iniciais e ω é a frequência angular de oscilação. Utilizando as equações (17.29), (21.9) e (21.10) esta frequência angular fica dada por:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Phi_\infty \ell}} = \sqrt{\frac{3c^2\alpha^2}{4\pi G \rho_{go} \xi}}\sqrt{\frac{g}{\ell}} = \sqrt{\frac{g}{\ell}} = \frac{2\pi}{T} \ . \tag{21.11}$$

Nesta equação T representa o período para uma oscilação completa de ida e volta do pêndulo. Embora estejamos utilizando o mesmo símbolo T para representar tanto a tensão no fio quanto o período de oscilação do pêndulo, deve ser enfatizado que estes são conceitos distintos que possuem unidades de medida diferentes (período medido em segundos e tensão medida em Newtons).

Vemos assim que a mecânica relacional explica imediatamente o resultado experimental de Newton de que corpos com composições químicas diferentes oscilam com a mesma frequência em pêndulos de mesmo comprimento colocados no mesmo ponto da superfície terrestre. Esta explicação vem do fato de que a frequência angular ω da equação (21.11) não depende da massa gravitacional do corpo de prova. Esta massa gravitacional m_g aparece tanto no peso do corpo, quanto na força inercial exercida pelas galáxias sobre o corpo, equação (21.8).

Escolhendo como condições iniciais $\theta(t=0) = \theta_o$ e $\dot{\theta}(t=0) = 0$ obtém-se $A = \theta_o$ e $B = 0$. Com isto a solução (21.10) fica na seguinte forma:

$$\theta = \theta_o \cos(\omega t) \ . \tag{21.12}$$

Em particular, quando $t = T/4 = \pi/(2\omega)$, obtém-se $\theta = 0$. Neste instante a velocidade tangencial tem seu valor máximo dado por $v_\theta = \ell\dot{\theta} = -\ell\theta_o\omega$.

A tensão T no fio é dada pela equação (21.7), ou seja:

$$T = m_g g \cos\theta + \Phi_\infty m_g \ell \dot{\theta}^2 \ . \tag{21.13}$$

Em $t = 0$ obtém-se o valor inicial da tensão, $T_o = m_g g \cos\theta_o$, já que $\dot{\theta}_o = 0$. É neste instante que a tensão tem intensidade mínima. Já em $t = \pi/(2\omega)$, quando $\theta = 0$ e $\dot{\theta} = -\theta_o\omega$, obtém-se o valor máximo da tensão dado por $T_{max} = m_g g + \Phi_\infty m_g \ell \theta_o^2 \omega^2$.

Com estas condições iniciais obtém-se que a força inercial fica dada por:

$$\vec{F}_i = -\Phi_\infty m_g \vec{a}_{mT} = \Phi_\infty m_g (\ell\dot{\theta}^2\hat{\ell} - \ell\ddot{\theta}\hat{\theta}) = \Phi_\infty m_g \ell\theta_o\omega^2 \left[\theta_o \operatorname{sen}^2(\omega t)\hat{\ell} + \cos(\omega t)\hat{\theta}\right] . \qquad (21.14)$$

Em $t = 0$, quando $\theta = \theta_o$ e $\dot{\theta} = 0$, obtém-se o valor inicial da força inercial, que é perpendicular ao fio, $\vec{F}_i^o = \Phi_\infty m_g \ell\theta_o\omega^2\hat{\theta}$. Neste instante a força inercial tem sua intensidade mínima. Já em $t = \pi/(2\omega)$, quando $\theta = 0$ e $\dot{\theta} = -\theta_o\omega$, obtém-se que a força inercial tem máxima intensidade, apontando verticalmente para baixo: $\vec{F}_i = \Phi_\infty m_g \ell\theta_o^2\omega^2\hat{\ell}$.

21.2.1 Força Inercial no Pêndulo

É interessante analisar detalhadamente as forças atuando sobre o pêndulo simples na mecânica relacional.[1] Todas as velocidades e acelerações mencionadas aqui são consideradas em relação ao solo. Para isto vamos considerar três instantes típicos. O primeiro é logo depois que o pêndulo é solto do repouso de um ângulo inicial θ_o, quando $t_o = 0$. Sua velocidade inicial é nula, $\dot{\theta}_o = 0$ e $v_o = 0$, mas ele já tem aceleração não nula, $a_o \neq 0$, como indicado na figura 21.4 (a). O instante t_1 corresponde a um ponto intermediário da descida no qual a velocidade tangencial já tem um valor finito e no qual o corpo tem uma aceleração tangencial que vai aumentando esta velocidade, além de ter uma aceleração centrípeta relacionada com a mudança de direção da velocidade do corpo. O instante $t_2 = T/4 = \pi/(2\omega)$ corresponde ao ponto mais baixo da trajetória, $\theta_2 = 0$. Neste instante a velocidade tangencial é máxima, $\dot{\theta}_2 = -\theta_o\omega$ e $v_2 = -\ell\theta_o\omega$, a aceleração tangencial é nula, $\ddot{\theta}_2 = 0$, enquanto que a aceleração centrípeta tem seu valor máximo, $a_c = \ell\dot{\theta}_2^2 = \ell\theta_o^2\omega^2$, apontando verticalmente para cima.

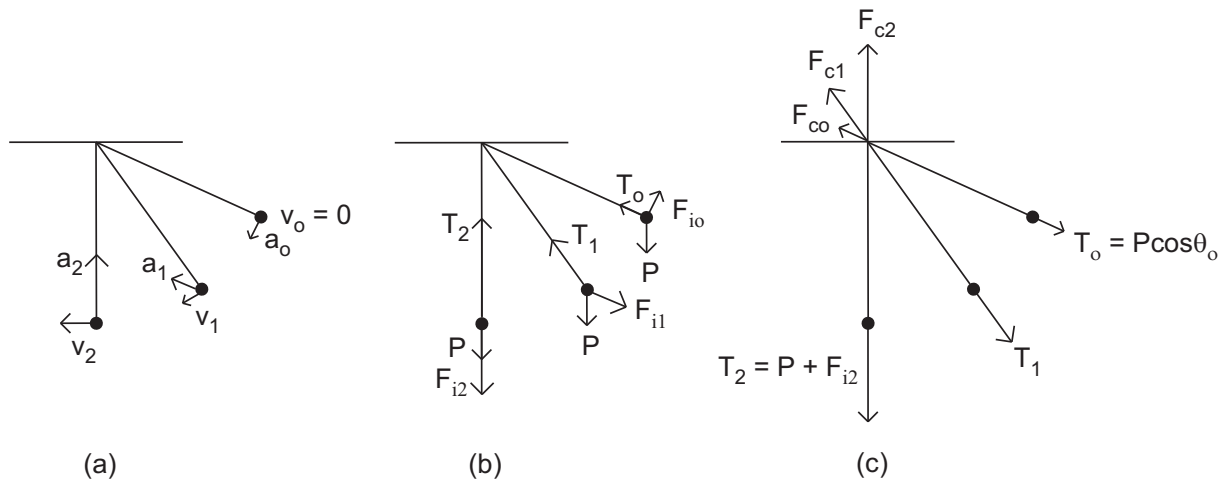



Figura 21.4: (a) Velocidade v e aceleração a do pêndulo no instante inicial $t_o = 0$ quando $\theta = \theta_o$ e $\dot{\theta}_0 = 0$, em um instante t_1 intermediário da descida e no instante t_2 em que ele chega no ponto mais baixo, $t_2 = T/4 = \pi/(2\omega)$, quando $\theta_2 = 0$ e $\dot{\theta}_2 = -\theta_o\omega$. (b) Peso P, tração T no fio e força inercial F_i atuando sobre o corpo nestes três instantes. (c) Forças exercidas sobre as duas extremidades do fio nestes três instantes.

As forças atuando sobre o corpo de massa gravitacional m_g preso ao pêndulo nestes três instantes estão representadas na figura 21.4 (b). O peso $\vec{P}$ é exercido pela Terra sobre o corpo, tendo sempre o mesmo valor e sentido, apontando para baixo. A força inercial $\vec{F}_i$ é exercida gravitacionalmente pelas galáxias distantes sobre o corpo. Ela aponta no sentido contrário à aceleração $\vec{a}_{mU} = \vec{a}_{mT}$ do corpo em relação ao referencial universal das galáxias. Na aproximação sendo considerada aqui, equação (20.1), esta aceleração coincide com a aceleração do corpo em relação ao solo. No instante inicial a força inercial aponta perpendicularmente ao fio, no sentido de θ crescente. Já no ponto mais baixo da trajetória, quando $t_2 = T/4 = \pi/(2\omega)$, sendo $\theta_2 = 0$ e $\dot{\theta}_2 = -\theta_o\omega$, a força inercial tem sua intensidade máxima, apontando para baixo no mesmo sentido da força peso. Além destas duas forças, existe uma terceira força exercida sobre o corpo que é a tração $\vec{T}$ exercida pelo fio esticado. Esta força de tração é uma reação do fio à força resultante atuando sobre ele na direção de seu comprimento, já que a extremidade superior do fio está presa ao teto e não pode se deslocar. Soma-se então a componente do peso na direção do fio com a componente da força inercial na direção do fio. A força exercida pelo fio esticado sobre o corpo tem o valor desta soma, mas atua no sentido contrário à

[1] [GG06, págs. 57-63].

soma destas duas componentes. Ou seja, a força exercida pelo fio sobre o corpo aponta ao longo do fio, no sentido que vai do corpo até a extremidade superior do fio.

Na figura 21.4 (c) é mostrada a força resultante que atua sobre a extremidade inferior do fio, sendo o módulo desta força igual à tração T no fio. Também é mostrada a força de contato F_c exercida pelo teto sobre a extremidade superior do fio. O fio é esticado por este conjunto de duas forças de mesma intensidade, com sentidos opostos, atuando nas duas extremidades do fio. No instante inicial a tração no fio é dada apenas pela componente do peso nesta direção, $T_o = P\cos\theta_o$, quando a tração tem sua intensidade mínima. À medida em que o corpo vai sendo acelerado em relação às galáxias, as galáxias passam a exercer uma força gravitacional sobre o pêndulo na direção contrária a esta aceleração. A componente desta força atuando ao longo do fio é transmitida ao fio, já que o corpo está preso ao fio e a extremidade superior do fio está presa ao teto. No instante intermediário t_1 a tração T_1 no fio é dada pela soma de $P\cos\theta_1$ com a componente da força inercial que atua ao longo do fio, $T_1 = P\cos\theta_1 + \Phi_\infty m_g \ell\dot{\theta}_1^2$. No ponto mais baixo da trajetória a aceleração centrípeta aponta ao longo do fio, fazendo com que a força inercial aponte verticalmente para baixo, no mesmo sentido que o peso do corpo. Neste instante a tensão no fio é máxima, $T_2 = P + \Phi_\infty m_g \ell\dot{\theta}_2^2$. A soma do peso com a força inercial pode ser grande o suficiente para romper o fio.

Esta força inercial é controlada pelas galáxias. Se pudéssemos aumentar apenas ρ_{go}, sem afetar o comprimento do pêndulo ou a massa gravitacional da Terra, diminuiríamos a frequência angular de oscilação do pêndulo. É a força gravitacional exercida pelas galáxias sobre o pêndulo que controla sua aceleração no referencial U.

21.3 Pêndulo Eletrizado Oscilando sobre um Ímã

Vamos discutir agora do ponto de vista da mecânica relacional o caso de um pêndulo eletrizado oscilando sobre um ímã, figura 21.5.

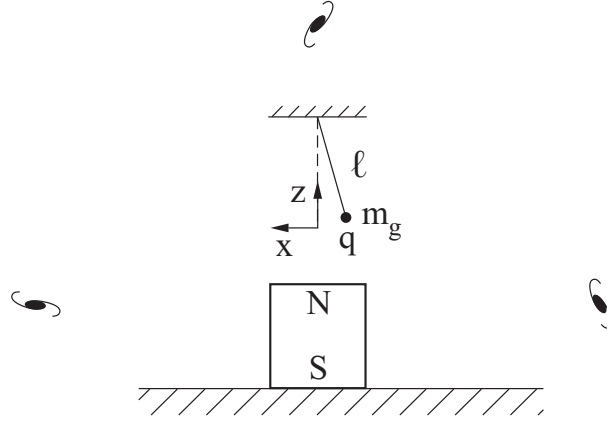



Figura 21.5: Pêndulo simples carregado oscilando sobre um grande ímã.

Esta situação foi analisada na Seção 7.4 dentro do ponto de vista da mecânica clássica. O pêndulo tem um comprimento constante ℓ, massa gravitacional m_g, está eletrizado com uma carga q, sofrendo pequenas oscilações a partir de um ângulo $\theta_o \ll 1$ rad em relação ao eixo vertical z. Vamos considerar o ímã oscilando no equador terrestre, onde não ocorre a precessão de Foucault. Vamos também desprezar o magnetismo terrestre comparado com o magnetismo do ímã próximo ao pêndulo.

O ímã vai ser modelado como uma casca esférica de raio R uniformemente eletrizada com uma carga total Q girando ao redor do eixo vertical z com uma velocidade angular constante em relação ao solo dada por $\vec{\Omega}_{CT} = \Omega_{CT}\hat{z}$. Esta casca esférica está ao redor do pêndulo, figura 21.6.

As forças que atuam sobre a massa gravitacional m_g do pêndulo são o peso $\vec{P}$, a tração $\vec{T}$ no fio, a força inercial $\vec{F}_i = -\Phi_\infty m_g \vec{a}_{mT}$ exercida pelas galáxias e a força da casca eletrizada. De acordo com a eletrodinâmica de Weber esta força é dada pela equação (7.56). Como a casca está girando com uma velocidade angular constante, $d\vec{\Omega}_{CT}/dt = \vec{0}$. Supondo $|(\mu_o qQ)/(12\pi R)| \ll m_g$, podemos desprezar o primeiro termo do colchetes da equação (7.56) em relação à força inercial $\vec{F}_i$. Vamos aqui supor também que o termo centrífugo, proporcional a $\vec{\Omega}_{CT} \times (\vec{\Omega}_{CT} \times \vec{r})$, onde $\vec{r}$ é o vetor posição da carga q em relação ao centro da casca, também possa ser desprezado, já que não leva a uma precessão do plano de oscilação do pêndulo, que

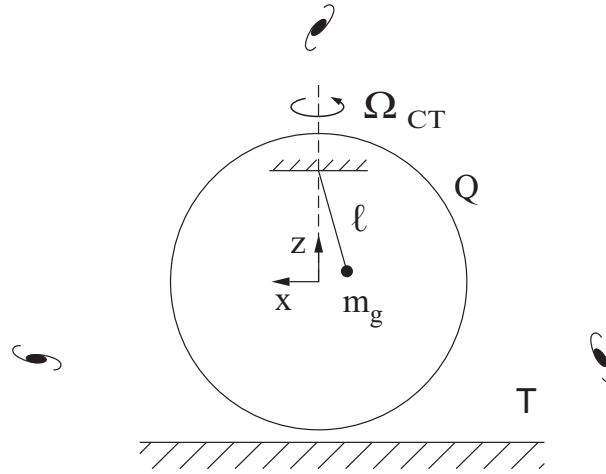



Figura 21.6: Casca esférica de raio R e carga Q girando em relação ao solo com velocidade angular Ω_{CT} ao redor do pêndulo eletrizado.

é a grandeza que nos interessa obter. Neste caso a equação de movimento da mecânica relacional dada pela equação (20.2) simplifica-se para a seguinte forma:

$$\vec{P} + \vec{T} + \frac{\mu_o qQ}{6\pi R}\vec{v} \times \vec{\Omega}_{CT} - \Phi_\infty m_g \vec{a}_{mT} = \vec{0} \ . \tag{21.15}$$

Esta equação tem a mesma forma que as equações (7.38) e (7.58). Com isto obtém-se o mesmo resultado final para a velocidade angular de precessão do plano de oscilação do pêndulo em relação ao solo, Ω_{pT}, dada pelas equações (7.53) e (7.59), a saber:

$$\Omega_{pT} = -\frac{\mu_o qQ}{12\pi\Phi_\infty m_g R}\Omega_{CT} \ . \tag{21.16}$$

Observa-se então que a velocidade angular Ω_{pT} de precessão do plano de oscilação do pêndulo em relação ao laboratório é proporcional à velocidade angular Ω_{CT} da casca esférica em relação ao solo. A velocidade angular Ω_{pT} também é proporcional à quantidade de carga Q sobre a casca esférica. A influência das galáxias aparece no termo Φ_∞, assim como nas velocidades angulares, já que na aproximação que está sendo considerada aqui temos $\Omega_{pT} = \Omega_{pU}$ e $\Omega_{CT} = \Omega_{CU}$. Ou seja, as velocidades angulares em relação ao solo são essencialmente iguais às velocidades angulares em relação ao referencial universal U das galáxias. Ao pararmos a rotação da casca esférica em relação ao solo, fazemos com que pare a precessão do plano de oscilação do pêndulo em relação ao solo. Esta precessão também cessa ao fazer $Q \to 0$. Estas duas suposições são equivalentes à eliminação do ímã da figura 21.5.

21.4 Pêndulo de Foucault

Neste caso, apenas a força de Coriolis será relevante. O tratamento da mecânica relacional é equivalente ao da mecânica newtoniana, fornecendo os mesmos resultados mas com outra interpretação. A diferença é o aparecimento de $\Phi_\infty m_g$ em vez da massa inercial m_i, além do aparecimento da rotação relativa entre a Terra e o conjunto das galáxias em vez da rotação da Terra em relação ao espaço absoluto.

O que deve ser enfatizado aqui, mais uma vez, é que a mecânica relacional oferece uma explicação física para a força de Coriolis. Ela passa a ser vista como uma força gravitacional real devida a uma rotação relativa entre a Terra e o conjunto das galáxias distantes.

Na figura 21.7 temos a Terra centrada em O girando com uma velocidade angular $\vec{\omega}_{TU} = \omega_{TU}\hat{z}$ em relação ao referencial universal U fixo em relação às galáxias distantes. A Terra dá uma volta por dia ao redor de seu eixo Norte-Sul, em relação às galáxias distantes. O pêndulo de comprimento ℓ está localizado na latitude α (isto é, fazendo um ângulo $\theta = \pi/2 - \alpha$ com o eixo Norte-Sul da Terra). O peso do pequeno corpo m_g preso ao pêndulo é $-m_g g\hat{r}$ apontando para o centro da Terra.

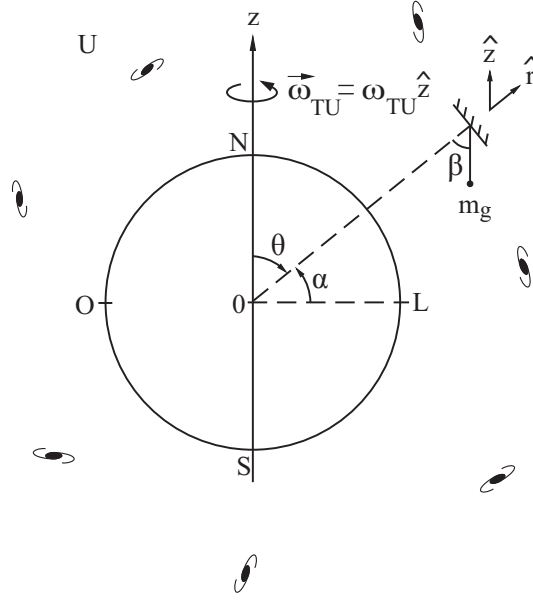



Figura 21.7: Pêndulo de Foucault no referencial universal U no qual a Terra gira com uma velocidade angular $\vec{\omega}_{TU} = \omega_{TU}\hat{z}$.

Vamos analisar o problema no referencial terrestre T, figura 21.8. Neste referencial o conjunto de galáxias dá uma volta por dia em relação à Terra. As galáxias giram ao redor do eixo Norte-Sul terrestre com uma velocidade angular $\vec{\Omega}_{GT} = -\vec{\omega}_{TU} = -\omega_{TU}\hat{z}$.

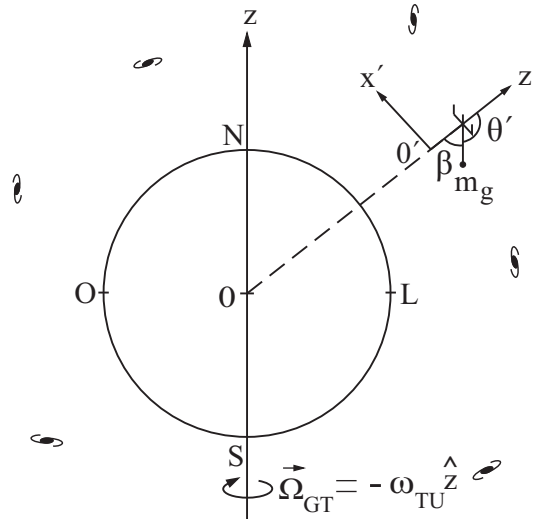



Figura 21.8: Pêndulo de Foucault no referencial T da Terra no qual o conjunto de galáxias gira ao redor do eixo Norte-Sul terrestre com uma velocidade angular $\vec{\Omega}_{GT} = -\vec{\omega}_{TU} = -\omega_{TU}\hat{z}$.

No referencial T da Terra a equação de movimento da mecânica relacional é dada pela equação (18.8):

$$\sum_{\substack{p=1 \\ p\neq k}}^{N} \vec{F}_{pk} - \Phi_\infty m_{gk}\left[\vec{a}_{kT} + \vec{\Omega}_{GT}\times(\vec{\Omega}_{GT}\times\vec{r}_{kT}) + 2\vec{v}_{kT}\times\vec{\Omega}_{GT} + \vec{r}_{kT}\times\frac{d\vec{\Omega}_{GT}}{dt}\right] = \vec{0}\ . \tag{21.17}$$

Nesta equação $\vec{r}_{kT}$ é o vetor posição de massa gravitacional m_g presa ao pêndulo em relação ao centro da Terra. Já $\vec{v}_{kT}$ e $\vec{a}_{kT}$ são a velocidade e a aceleração de m_g em relação ao solo.

Como estamos no referencial terrestre, todas as velocidades lineares e angulares, assim como as acelerações, são relativas à superfície da Terra. Podemos considerar $d\vec{\Omega}_{GT}/dt = \vec{0}$ neste problema. Além do mais,

sabemos que a força centrífuga dada por $-\Phi_\infty m_{gk}\vec{\Omega}_{GT}\times(\vec{\Omega}_{GT}\times\vec{r}_{kT})$ não tem efeito sobre a precessão do plano de oscilação do pêndulo, de tal forma que vamos desprezar esta força aqui. A equação de movimento para o corpo de massa gravitacional m_g pode então ser escrita como:

$$\sum_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{N}\vec{F}_{pk}-2\Phi_\infty m_{gk}\vec{v}_{kT}\times\vec{\Omega}_{GT}=\Phi_\infty m_{gk}\vec{a}_{kT}\ . \tag{21.18}$$

Introduzimos um outro sistema de coordenadas $(x',\ y',\ z')$ também parado em relação ao solo. A origem deste novo sistema de coordenadas O' é escolhida no ponto mais baixo da oscilação do pêndulo, ou seja, na posição onde a massa m_g fica parada quando não está oscilando. Consideramos o eixo z' apontando verticalmente para cima naquela localização da Terra, isto é, ortogonal a superfície da Terra em cada ponto, figura 21.8.

As forças locais agindo sobre o pêndulo são seu peso $\vec{P}=-m_g g\hat{z}'$ e a tensão $\vec{T}$ no fio atuando ao longo de seu comprimento. A equação de movimento da mecânica relacional pode então ser escrita como:

$$\vec{P}+\vec{T}-2\Phi_\infty m_{gk}\vec{v}_{kT}\times\vec{\Omega}_{GT}=\Phi_\infty m_g\vec{a}_{mT}\ . \tag{21.19}$$

Esta equação é análoga à equação (7.38) descrevendo o movimento de um pêndulo eletrizado oscilando sobre um ímã. As diferenças são o aparecimento da força de Coriolis $-2\Phi_\infty m_{gk}\vec{v}_{kT}\times\vec{\Omega}_{GT}$ em vez da força magnética $q\vec{v}\times\vec{B}$, além do aparecimento de $\Phi_\infty m_g$ em vez da massa inercial m_i.

Vamos considerar que inicialmente o movimento está no plano $x'z'$, figura 21.8. Vamos considerar a influência de três possíveis componentes de $\vec{\Omega}_{GT}$ no movimento do corpo, a saber, $\vec{\Omega}_{GT}=\Omega_{GT}^{x'}\hat{x}'+\Omega_{GT}^{y'}\hat{y}'+\Omega_{GT}^{z'}\hat{z}'$. É então fácil ver que uma possível componente de $\vec{\Omega}_{GT}$ na direção y', $\Omega_{GT}^{y'}$, só vai mudar a tensão no fio para manter seu comprimento constante, mas não vai alterar o plano de oscilação do pêndulo (observando que a força $-2\Phi_\infty m_g\vec{v}_{mT}\times\vec{\Omega}_{GT}$ estará neste plano $x'z'$).

A componente de $\vec{\Omega}_{GT}$ na direção x', $\Omega_{GT}^{x'}$, também não vai alterar o plano de oscilação pelos motivos descritos a seguir. A componente x' da velocidade $\vec{v}_{mT}$ da partícula não será influenciada por esta componente x' de $\vec{\Omega}_{GT}$ uma vez que o produto vetorial entre estas componentes se anula. Por outro lado, quando o pêndulo estiver indo para baixo (com uma componente da velocidade em direção à parte negativa de z'), a força de Coriolis estará na direção negativa de y'. Já quando o pêndulo estiver indo para cima, a força de Coriolis estará na direção positiva de y'. E ambas as direções da força vão se alterar quando o pêndulo estiver voltando ao ponto inicial após este meio período. Isto mostra que a componente x' de $\vec{\Omega}_{GT}$ não vai girar o plano de oscilação do pêndulo, na média de cada período.

O mesmo já não acontece com a componente z' de $\vec{\Omega}_{GT}$, $\Omega_{GT}^{z'}$. Durante meio período (enquanto o pêndulo desce e sobe, deslocando-se no sentido positivo de x'), o pêndulo vai sofrer uma força na direção positiva y'. Ou seja, $-2\Phi_\infty m_{gk}\vec{v}_{kT}\times\vec{\Omega}_{GT}\approx 2\Phi_\infty m_{gk}v_{kT}^{x'}\Omega_{GT}^{z'}\hat{y}'$. Durante o meio período seguinte (enquanto o pêndulo desce e sobe, deslocando-se no sentido negativo de x'), a força estará apontando na direção negativa y'. E estas forças claramente giram o plano de oscilação em relação ao solo. Por estes motivos e para simplificar a análise do que nos interessa (calcular a velocidade angular de precessão do plano de oscilação), daqui por diante só consideraremos a componente de $\vec{\Omega}_{GT}$ da direção z', denominada aqui de $\Omega_{GT}^{z'}\hat{z}'$.

As estrelas e galáxias distantes giram ao redor do eixo Norte-Sul da Terra. Esta é a direção da velocidade angular das galáxias ao redor da Terra, $\vec{\Omega}_{GT}=-\omega_{TU}\hat{z}$, figura 21.8. Para um pêndulo oscilando na latitude α (por exemplo, em Paris onde $\alpha=48^o\ 51'\ N$), a componente z' de $\vec{\Omega}_{GT}$ será dada por $\Omega_{GT}^{z'}=\Omega_{GT}\cos\theta=\Omega_{GT}\cos(90^o-\alpha)=\Omega_{GT}\operatorname{sen}\alpha$.

A solução da equação (21.19) é então análoga à solução da equação (7.38), a saber, a equação (7.47) colocando $-2\Phi_\infty m_g\Omega_{GT}^{z'}$ no lugar de qB, além de colocar $\Phi_\infty m_g$ no lugar de m_i. A velocidade angular de precessão do pêndulo de Foucault em relação ao solo, Ω_{pT}, fica então dada por:

$$\Omega_{pT}=-\frac{-2\Phi_\infty m_g\Omega_{GT}^{z'}}{2\Phi_\infty m_g}=\Omega_{GT}^{z'}=\Omega_{GT}\operatorname{sen}\alpha\ . \tag{21.20}$$

E este é o valor observado da precessão do plano de oscilação. Como visto nos cálculos da Seção 7.4, este resultado é válido na seguinte aproximação: $2\Omega_{GT}^{z'}\ll\sqrt{g/\ell}$. Esta aproximação é facilmente justificada observando que na experiência real de Foucault tínhamos $\ell=11\ m$ de tal forma que $\sqrt{g/\ell}\approx 1\ rad/s\gg 2\Omega_{GT}\operatorname{sen}\alpha=2(7,3\times10^{-5}\ rad/s)\times0,75=10^{-4}\ rad/s$.

Isto é, na mecânica relacional podemos interpretar esta precessão do plano de oscilação do pêndulo de Foucault como sendo análoga à precessão do plano de oscilação de um pêndulo eletrizado oscilando sobre

um ímã. No caso do pêndulo de Foucault, o conjunto de galáxias girando ao redor da Terra exerce uma força de Coriolis $-2\Phi_\infty m_g \vec{v}_{mT} \times \vec{\Omega}_{GT}$ sobre as massas gravitacionais que estão deslocando-se sobre o solo com velocidade $\vec{v}_{mT}$. É esta força de origem gravitacional que faz com que o plano de oscilação do pêndulo gire em relação ao solo.

O pêndulo de Foucault não pode mais ser utilizado como prova da rotação absoluta e real da Terra. Na mecânica relacional a precessão do plano de oscilação do pêndulo de Foucault em relação ao solo pode ser explicada no referencial universal U com o conjunto das galáxias distantes em repouso exercendo uma força gravitacional $-\Phi_\infty m_g \vec{a}_{mU}$ sobre o corpo de prova deslocando-se em relação ao referencial universal U, enquanto a Terra gira em relação a este referencial. Esta precessão também pode ser explicada no referencial terrestre T com a Terra em repouso enquanto as galáxias distantes giram ao redor dela exercendo uma força gravitacional $-\Phi_\infty m_g [\vec{a}_{mT} + 2\vec{v}_{mT} \times \vec{\Omega}_{GT}]$ sobre o corpo de prova. Ambas explicações são igualmente corretas e levam à mesma precessão do pêndulo de Foucault em relação ao solo. Passa a ser então uma questão de conveniência ou de convenção escolher a Terra, ou as galáxias distantes, ou qualquer outro corpo ou sistema de referência como estando em repouso. Este é um resultado muito elegante e profundo da mecânica relacional, que não tinha sido implementado quantitativamente por qualquer outra formulação da mecânica até o momento.

Adquirimos assim uma nova compreensão do pêndulo de Foucault. Vamos apresentá-la apenas no caso mais simples de um pêndulo oscilando no polo Norte. Concluímos que o plano de oscilação é fixo em relação ao referencial das galáxias distantes, não interessando a rotação da Terra em relação a este referencial, figura 21.9. Nesta figura estamos no referencial universal U olhando a Terra girar embaixo de nós. Enquanto a Terra gira, o plano de oscilação permanece fixo no referencial U das galáxias.

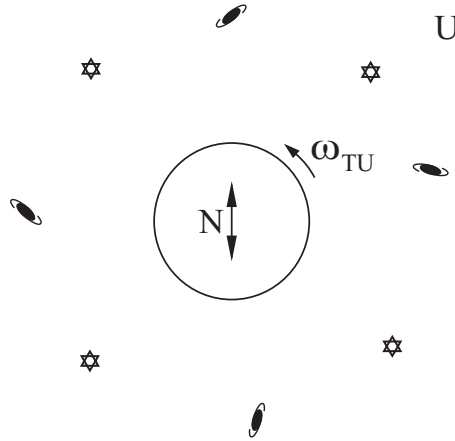



Figura 21.9: Plano de oscilação do pêndulo de Foucault fixo em relação às galáxias distantes.

Para um observador fixo na Terra, a explicação é a mesma. Isto é, ele pode dizer que o conjunto das galáxias distantes girando ao redor dele faz com que o plano de oscilação do pêndulo gire junto com as galáxias, $\vec{\Omega}_{pT} = \vec{\Omega}_{GT}$, como ilustrado na figura 21.10.

Se todas as galáxias externas fossem aniquiladas, mantendo inalterados o pêndulo, a Terra e a nossa galáxia, então o plano de oscilação do pêndulo ficaria fixo em relação à Terra de acordo com a mecânica relacional. Afinal de contas, não haveria mais a força de Coriolis atuando sobre o pêndulo. Esta consequência pode ser obtida a partir da equação (21.20). O lado direito desta equação é proporcional à velocidade angular Ω_{GT} das galáxias em relação ao solo. Ao aniquilar as galáxias fazemos com que $\Omega_{GT} \to 0$. Isto fará com que o lado esquerdo da equação (21.20) também se anule, $\Omega_{pT} \to 0$. Ou seja, o plano de oscilação do pêndulo deixará de precessar em relação ao solo.

Se pudéssemos parar a rotação das galáxias em relação ao solo fazendo $\Omega_{GT} \to 0$, o plano de oscilação do pêndulo de Foucault também pararia de precessar em relação ao solo, como visto pela equação (21.20). Ou seja, neste caso teríamos $\Omega_{pT} \to 0$ de acordo com a mecânica relacional.

Deve ser lembrado ainda que nos cálculos desta Seção a força exercida pela Terra sobre o pêndulo de massa m_g foi escrita como sendo dada pelo peso do corpo, $\vec{P} = m_g \hat{g} = -m_g g \hat{z}$. Na verdade esta suposição é apenas uma aproximação. De acordo com uma força de Weber gravitacional, equação (17.37), a Terra vai exercer uma força sobre a massa m_g oscilando sobre ela que dependerá também da velocidade e da aceleração de m_g em relação ao solo. Como estas componentes que dependem da velocidade e da aceleração do corpo são pequenas quando comparadas com a componente que não depende da velocidade e da aceleração do

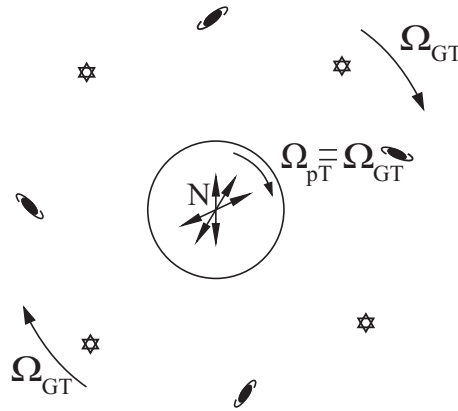



Figura 21.10: Universo girando ao redor da Terra e fazendo com que o plano de oscilação do pêndulo gire junto com ele.

corpo, elas em geral podem ser desprezadas sem afetar significativamente o resultado final. Já no caso desta experiência de pensamento na qual se aniquilam as estrelas e galáxias ao redor da Terra, sobrando apenas a Terra e o corpo de massa m_g do pêndulo, estas componentes não mais seriam desprezíveis. Elas precisariam ser levadas em conta para obter a previsão do que ocorreria com o movimento do pêndulo neste caso de acordo com a mecânica relacional.

No caso do pêndulo de Foucault observa-se que a precessão do plano de oscilação do pêndulo ocorre no mesmo sentido de rotação das galáxias ao redor da Terra, já que o plano de oscilação do pêndulo gira junto com as galáxias em relação ao solo, figura 21.10. No caso de um pêndulo eletrizado oscilando no interior de uma casca esférica eletrizada girando ao seu redor, foi visto na figura 7.15 que o plano de oscilação do pêndulo gira em sentido contrário à casca, caso o pêndulo e a casca estejam eletrizados com cargas de mesmo sinal. Esta diferença de comportamento é facilmente explicada lembrando que cargas de mesmo sinal se repelem, enquanto que massas gravitacionais se atraem.

Capítulo 22

Movimento Circular Uniforme

22.1 Órbita Circular de um Planeta no Referencial das Estrelas Fixas

Nesta Seção consideramos dois corpos orbitando um ao redor do outro em relação ao referencial F das estrelas fixas, devido à atração gravitacional entre eles. Vamos considerar aqui estes dois corpos como sendo o Sol e a Terra, completando uma órbita no período de um ano. As expressões algébricas também se aplicam à órbita de qualquer planeta ao redor do Sol, à órbita de um satélite de Júpiter orbitando ao redor de Júpiter, ou às órbitas de dois corpos arbitrários 1 e 2 deslocando-se em relação às estrelas fixas.

A aceleração centrípeta do sistema solar ao redor do centro de nossa galáxia é dado aproximadamente por $a_{centripeta\ galáxia} \approx 10^{-10}\ m/s^2$. As acelerações centrípetas típicas dos planetas orbitando ao redor do Sol, no referencial das estrelas fixas, têm a mesma ordem de grandeza que a aceleração centrípeta da Terra ao orbitar ao redor do Sol, ou seja: 10^{-2} ou $10^{-3}\ m/s^2$. Como estas acelerações são muito maiores do que $a_{centripeta\ galáxia}$, podemos desprezar a aceleração do sistema solar em relação às galáxias distantes ao estudar o movimento planetário. Isto é, o conjunto das galáxias distantes pode ser considerado como essencialmente sem aceleração em relação ao referencial das estrelas fixas. O referencial F é então equivalente ao referencial universal U das galáxias distantes. Isto significa que $\vec{a}_{kU} = \vec{a}_{kF}$, onde $\vec{a}_{kU}$ é a aceleração do corpo de prova m_{gk} em relação ao referencial U, enquanto que $\vec{a}_{kF}$ é a aceleração deste corpo em relação ao referencial F. Assim, a equação (16.64) se reduz a:

$$\sum_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{N} \vec{F}_{pk} - \Phi_\infty m_{gk}\vec{a}_{kU} = \sum_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{N} \vec{F}_{pk} - \Phi_\infty m_{gk}\vec{a}_{kF} = \vec{0}\ . \tag{22.1}$$

Esta é a equação de movimento da mecânica relacional válida no referencial das estrelas fixas nesta aproximação de $|\vec{a}_{kF}| \gg 10^{-10}\ m/s^2$.

Na figura 22.1 apresentamos a situação na qual duas massas gravitacionais m_{g1} e m_{g2} descrevem órbitas circulares ao redor do centro de massa gravitacional entre elas. Colocamos as galáxias para representar o pano de fundo em relação ao qual estas órbitas ficam determinadas.

A força gravitacional exercida entre os corpos 1 e 2 é dada pela lei de Weber com um decaimento exponencial, equação (16.18). Consideramos aqui a situação na qual eles estão se movendo em círculos em relação às estrelas fixas, mantendo uma distância constante para o centro de massa gravitacional entre eles. Neste caso $\dot{r}_{12} = 0$ e $\ddot{r}_{12} = 0$. A distância típica de um planeta ao Sol é da ordem de grandeza da unidade astronômica, ou seja, $d_{TS} = 1,50 \times 10^{11}\ m$. A constante α que aparece na equação (16.18) vale aproximadamente $10^{-27}\ m^{-1}$, equação (17.12). Logo $0 < r\alpha \approx 10^{-16} \ll 1$, fazendo com que $e^{-\alpha r} \approx 1$. Nestas condições a força gravitacional de Weber com decaimento exponencial reduz-se à força gravitacional de Newton, equação (17.39).

Escolhemos a origem do sistema de coordenadas no centro de massa gravitacional dos dois corpos. Neste caso de movimentos circulares as acelerações dos corpos 1 e 2 são apenas suas acelerações centrípetas, a saber: $\vec{a}_{1F} = -(v_{1F}^2/r_1)\hat{r}_1$ e $\vec{a}_{2F} = -(v_{2F}^2/r_2)\hat{r}_2$. Aqui v_{1F} é a velocidade tangencial do corpo 1 em relação ao referencial das estrelas fixas a uma distância $r_1 = |\vec{r}_1|$ do centro de massa gravitacional e $\hat{r}_1$ é o vetor unitário radial apontando para ele, analogamente para o corpo 2. Temos ainda $\hat{r}_1 = -\hat{r}_2 = \hat{r}_{12}$ e $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$. Neste caso as equações (17.39) e (22.1) fornecem:

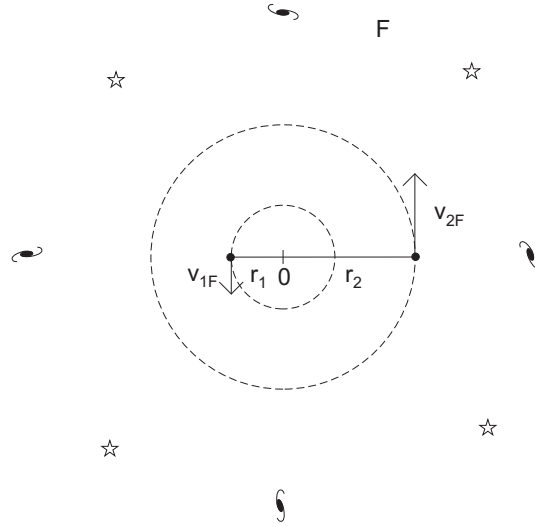



Figura 22.1: Duas massas orbitando ao redor do centro de massa no referencial das estrelas fixas.

$$-G\frac{m_{g1}m_{g2}}{(r_1+r_2)^2}\hat{r}_1+\Phi_\infty m_{g1}\frac{v_{1F}^2}{r_1}\hat{r}_1=\vec{0}\ , \tag{22.2}$$

e

$$G\frac{m_{g1}m_{g2}}{(r_1+r_2)^2}\hat{r}_1+\Phi_\infty m_{g2}\frac{v_{2F}^2}{r_2}\hat{r}_2=\vec{0}\ . \tag{22.3}$$

Ou seja:

$$G\frac{m_{g1}m_{g2}}{(r_1+r_2)^2}=\Phi_\infty m_{g1}a_{1F}=\Phi_\infty m_{g1}\frac{v_{1F}^2}{r_1}=\Phi_\infty m_{g2}a_{2F}=\Phi_\infty m_{g2}\frac{v_{2F}^2}{r_2}\ . \tag{22.4}$$

As velocidades de 1 e de 2 no referencial F são dadas por:

$$v_{1F}=\frac{Gm_{g2}r_1}{\Phi_\infty(r_1+r_2)^2}\ , \tag{22.5}$$

e

$$v_{2F}=\frac{Gm_{g1}r_2}{\Phi_\infty(r_1+r_2)^2}\ . \tag{22.6}$$

Como temos $m_{g1}r_1=m_{g2}r_2$, vemos que ambos os corpos orbitam com a mesma velocidade angular constante em relação ao referencial das estrelas fixas. Esta velocidade angular $\omega_{1F}=\omega_{2F}\equiv\omega_F$ é dada por:

$$\omega_{1F}=\omega_{2F}=\omega_F=\frac{v_{1F}}{r_1}=\frac{v_{2F}}{r_2}=\sqrt{\frac{Gm_{g1}}{\Phi_\infty(r_1+r_2)^2r_2}}=\sqrt{\frac{Gm_{g2}}{\Phi_\infty(r_1+r_2)^2r_1}}\ . \tag{22.7}$$

Seja o eixo z normal ao plano do movimento, passando pelo centro de massa gravitacional dos dois corpos e apontando de acordo com a regra da mão direita seguindo o movimento dos planetas. Logo este eixo z vai apontar para cima na figura 22.4. A velocidade angular vetorial de rotação dos planetas será então dada por $\vec{\omega}_{mF}=\omega_{mF}\hat{z}$.

Usando $m_{g1}r_1=m_{g2}r_2$ na equação (22.7), é possível escrever a distância entre as duas massas da seguinte forma:

$$r_1+r_2=\left[\frac{G(m_{g1}+m_{g2})}{\Phi_\infty\omega_{mF}^2}\right]^{1/3}\ . \tag{22.8}$$

De acordo com a equação (22.4), a aceleração centrípeta de cada planeta em relação às estrelas fixas é dada por:

$$a_{1F} = \frac{Gm_{g2}}{\Phi_\infty (r_1 + r_2)^2} \ , \tag{22.9}$$

e

$$a_{2F} = \frac{Gm_{g1}}{\Phi_\infty (r_1 + r_2)^2} \ . \tag{22.10}$$

22.1.1 Influência das Galáxias no Movimento Orbital de um Planeta ao Redor do Sol

Na figura 22.2 (a) apresentamos as velocidades e acelerações dos corpos 1 e 2 no referencial F das estrelas fixas.

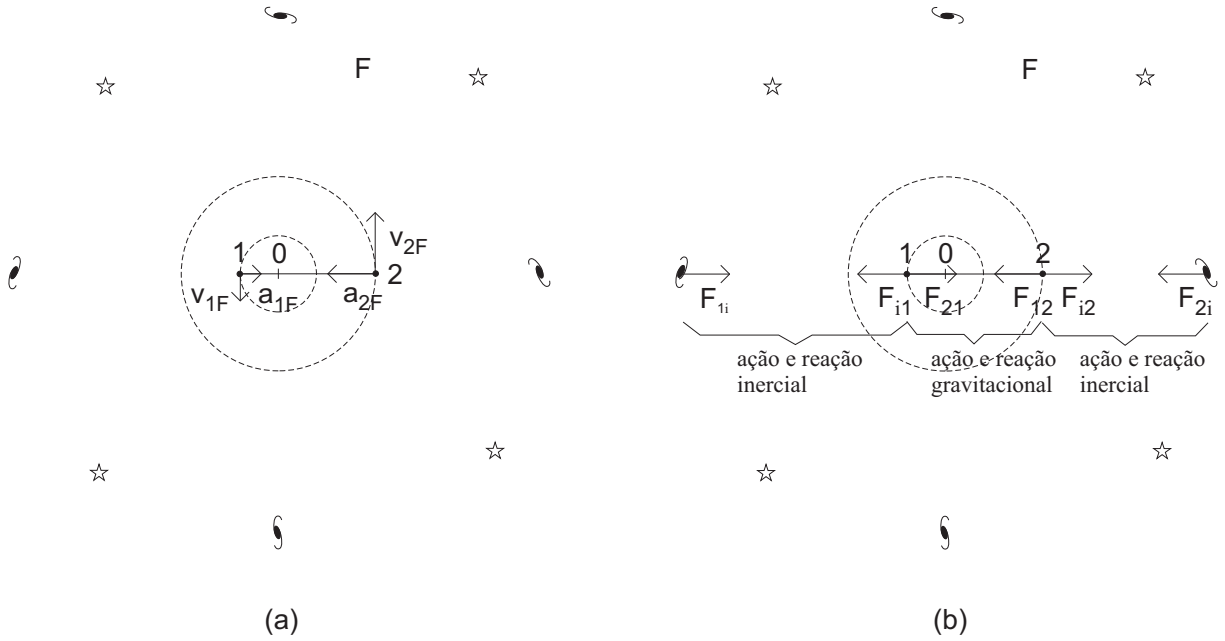



Figura 22.2: (a) Velocidades e acelerações de duas massas orbitando ao redor do centro de massa no referencial F das estrelas fixas. (b) Da esquerda para a direita: Forças de ação e reação entre as galáxias e o corpo 1; forças de ação e reação entre os corpos 1 e 2; forças de ação e reação entre as galáxias e o corpo 2.

Na figura 22.2 (b) apresentamos as forças atuando sobre 1, sobre 2 e sobre as galáxias. A força gravitacional exercida por 2 em 1 é representada por F_{21}, enquanto que F_{12} é a força de reação exercida por 1 em 2. A força gravitacional exercida pelas galáxias em 1 é representada por F_{i1}, enquanto que F_{1i} é a força de reação exercida por 1 nas galáxias. Esta força F_{i1} exercida pelas galáxias sobre o corpo 1 está sendo chamada aqui de força inercial ou de força centrífuga. A força gravitacional exercida pelas galáxias em 2 é representada por F_{i2}, enquanto que F_{2i} é a força de reação exercida por 2 nas galáxias. Esta força F_{i2} exercida pelas galáxias sobre o corpo 2 está sendo chamada aqui de força inercial ou de força centrífuga.

É a força centrífuga F_{i1} atuando em 1 que contrabalança a força centrípeta exercida por 2 em 1, fazendo com que 1 descreva um círculo de raio r_1 constante ao redor do centro O no referencial F das estrelas fixas. Da mesma forma, é a força centrífuga F_{i2} atuando em 2 que contrabalança a força centrípeta exercida por 1 em 2, fazendo com que 2 descreva um círculo de raio r_2 constante ao redor do centro O no referencial F das estrelas fixas.

Deve ser enfatizado aqui a grande diferença conceitual quando este problema é tratado na mecânica newtoniana e na mecânica relacional. Na mecânica newtoniana este é um problema de apenas dois corpos, a saber, os corpos 1 e 2. Temos então o Sol e um planeta, ou Júpiter e um de seus satélites, orbitando no espaço ao redor do centro de massa. Por outro lado, na mecânica relacional este é um problema de muitos corpos interagindo entre si, a saber: os corpos 1 e 2 interagindo entre si, a interação do corpo 1 com as galáxias, além da interação do corpo 2 com as galáxias. As galáxias distantes têm um papel fundamental na mecânica relacional e não podem ser desprezadas. Deve-se sempre estar ciente desta diferença conceitual. As

galáxias estão presentes em nosso universo e exercem uma força gravitacional sobre qualquer corpo, sempre que este corpo estiver acelerado em relação às galáxias. Logo, não se pode mais tratar de um "problema de dois corpos" na mecânica relacional, já que as estrelas e galáxias distantes têm sempre de aparecer na formulação de qualquer problema. Elas só podem ser desprezadas nos casos em que o corpo de prova não está acelerado em relação ao referencial universal U.

Como visto na Subseção 12.2.1, Berkeley apontou claramente esta impossibilidade do movimento circular quando só existem dois corpos no universo na Seção 59 de sua obra *De Motu*:[1]

> 59. Imaginemos, portanto, dois globos como existentes e, além deles, nada de corpóreo. Imaginemos, então, que forças são neles aplicadas de algum modo; seja qual for a compreensão que tenhamos da aplicação das forças, não se pode conceber pela imaginação um movimento circular dos dois globos em torno de um centro comum. Suponhamos, então, que o céu das estrelas fixas seja criado; subitamente, a partir da concepção da aproximação dos globos nas diferentes partes desse céu, o movimento será concebido. Isso significa afirmar que, como o movimento é relativo por sua própria natureza, ele não poderia ser concebido antes que os corpos correlatos fossem dados. Do mesmo modo, nenhuma outra relação pode ser concebida sem correlatos.

Ou seja, para poder conceber dois corpos 1 e 2 descrevendo um movimento circular ao redor de um centro comum, é necessário a presença de outros corpos (tais como as estrelas ou galáxias) ao redor deles. Em um certo instante o corpo 1 estaria se aproximando de uma certa estrela E_A, enquanto que o corpo 2 estaria se afastando desta mesma estrela. Em um outro instante o corpo 1 estaria se afastando desta estrela E_A, enquanto que o corpo 2 estaria se aproximando dela. E este movimento de aproximação e de afastamento entre 1 e a estrela E_A iria se alternando ao longo do tempo, o mesmo ocorrendo com o movimento de afastamento e de aproximação entre 2 e esta mesma estrela E_A. A mecânica relacional concorda com este ponto de vista apresentado por Berkeley, que nos parece muito mais intuitivo do que a existência de um movimento circular entre dois corpos pontuais no qual a distância entre eles permanece constante e no qual eles giram em relação ao espaço vazio. Esta última possibilidade é que nos parece anti-intuitiva e absurda. Como dois pontos só definem uma reta, não dá para imaginar esta reta girando ao redor de um eixo perpendicular a ela se não houvesse nada mais no universo além destes dois corpos pontuais.

Além desta questão de como conceber o movimento circular de dois corpos em torno de um centro comum, a mecânica relacional traz consigo algumas consequências dinâmicas relacionadas à presença das galáxias distantes em relação ao movimento circular dos corpos 1 e 2. Como visto na Subseção 12.1.2, Clarke havia previsto que um planeta orbitando ao redor do Sol perderia a força centrífuga que surge de seu movimento circular se fosse eliminada toda a matéria ao redor do Sol e do planeta. Clarke considerava esta consequência absurda. Esta consequência é implementada matematicamente na mecânica relacional, indo além do que havia sido apontado por Berkeley e Clarke.

Como a constante Φ_∞ é proporcional à densidade média de massa gravitacional no universo, equação (17.29), obtém-se a partir da equação (22.7) que se pudéssemos manter as massas de 1 e 2 constantes, mantendo também constantes as distâncias r_1 e r_2 de cada corpo ao centro O das órbitas circulares, a velocidade angular ω_F aumentaria na medida em que ρ_{go} diminuísse. Da mesma forma, a partir da equação (22.8) obtém-se que, diminuindo ρ_{go} (mas mantendo m_{g1}, m_{g2} e ω_F constantes), aumentaria a distância $r_1 + r_2$ entre 1 e 2. Em particular, de acordo com a mecânica relacional não poderia haver nenhuma órbita circular se só existissem estes dois corpos 1 e 2 no universo. A força centrífuga atuando no corpo 1, por exemplo, é dada por $\vec{F}_{i1} = \Phi_\infty m_{g1}\omega_{1F}^2\vec{r}_1$. Esta força centrífuga de origem gravitacional tende a zero quando aniquilamos toda a matéria exterior que cerca os corpos 1 e 2 (ou seja, quando aniquilamos com as galáxias distantes), fazendo $\rho_{go} \to 0$.

22.1.2 Forças no Referencial que Gira Junto com o Planeta e com o Sol

Suponha agora que estamos em um referencial R com sua origem no centro de massa gravitacional dos dois corpos. Vamos supor ainda que este referencial R gire junto com os corpos 1 e 2 em relação ao referencial F das estrelas fixas, de tal forma que 1 e 2 fiquem parados no referencial R, como indicado na figura 22.3 (a).

Neste novo referencial as galáxias distantes e as estrelas fixas são vistas girando como um todo com uma velocidade angular $\vec{\Omega}_{GR}$, figura 22.3 (a). Se estes dois corpos forem o Sol e a Terra, então o conjunto de galáxias vai completar uma volta ao redor deles no período de 1 ano.

Esta velocidade angular das galáxias ao redor de 1 e 2 é dada por:

[1] [Ber06] e [Ber92].

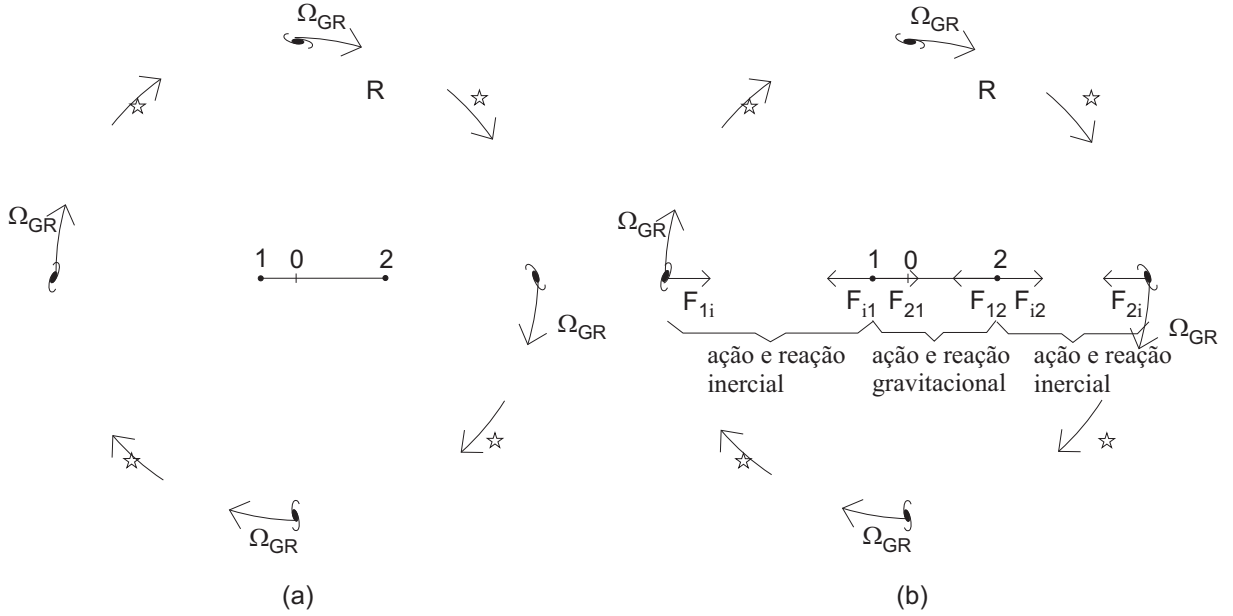



Figura 22.3: (a) Referencial R no qual os corpos 1 e 2 estão em repouso, enquanto que as estrelas e galáxias giram ao redor destes corpos. (b) Da esquerda para a direita: Forças de ação e reação entre as galáxias e o corpo 1; forças de ação e reação entre os corpos 1 e 2; forças de ação e reação entre as galáxias e o corpo 2.

$$\vec{\Omega}_{GR} = -\vec{\omega}_{1F} = -\vec{\omega}_{2F} = -\sqrt{\frac{Gm_{g1}}{\Phi_\infty (r_1 + r_2)^2 r_2}}\hat{z} \ . \tag{22.11}$$

Ou seja, as galáxias giram no referencial R com a mesma velocidade angular com que os corpos 1 e 2 giram no referencial das estrelas fixas, mas em sentido contrário, como indicado nas figuras 22.2 (a) e 22.3 (a). Isto é, os corpos 1 e 2 giram no sentido anti-horário no referencial F, figura 22.2 (a). Esta situação é equivalente a um giro de mesma intensidade do conjunto de galáxias no referencial R, só que no sentido horário, figura 22.3 (a).

A equação de movimento da mecânica relacional neste caso é dada pela equação (18.8), a saber:

$$\sum_{\substack{p=1 \\ p\neq k}}^{N} \vec{F}_{pk} - \Phi_\infty m_{gk} \left[\vec{a}_{kR} + \vec{\Omega}_{GR} \times (\vec{\Omega}_{GR} \times \vec{r}_{kR}) + 2\vec{v}_{kR} \times \vec{\Omega}_{GR} + \vec{r}_{kR} \times \frac{d\vec{\Omega}_{GR}}{dt} \right] = \vec{0} \ . \tag{22.12}$$

Como neste referencial os corpos 1 e 2 são vistos em repouso, $\vec{v}_{kR} = \vec{0}$ e $\vec{a}_{kR} = \vec{0}$. Além do mais, $d\vec{\Omega}_{GR}/dt = \vec{0}$. Desta forma para os corpos 1 e 2 esta equação se reduz a, respectivamente:

$$G\frac{m_{g1}m_{g2}}{(r_1 + r_2)^2} - \Phi_\infty m_{g1} \Omega_{GR}^2 r_1 = 0 \ , \tag{22.13}$$

e

$$G\frac{m_{g1}m_{g2}}{(r_1 + r_2)^2} - \Phi_\infty m_{g2} \Omega_{GR}^2 r_2 = 0 \ . \tag{22.14}$$

Isto é, a força gravitacional entre os corpos 1 e 2 é contrabalançada por uma força centrífuga gravitacional real exercida pelo conjunto girante de galáxias atuando em cada um dos corpos. Isto explica como eles podem manter uma distância constante entre si e ficar em repouso neste referencial R, apesar da atração gravitacional mútua entre ambos. Na mecânica newtoniana isto só podia ser explicado pela introdução de uma força centrífuga “fictícia” sem nenhuma origem física. Na mecânica relacional identificamos os corpos que estão causando esta força centrífuga, a saber, as galáxias distantes. Também descobrimos a origem desta força, ou seja, uma interação gravitacional que depende do movimento relativo.

Na figura 22.3 (b) apresentamos as forças atuando sobre cada corpo, sendo elas idênticas às forças que aparecem na figura 22.2 (b).

Se pudéssemos manter o sistema solar inalterado e ao mesmo tempo dobrar o número ou densidade de galáxias no universo, então a mecânica relacional prevê que os corpos iriam agir como se tivéssemos dobrado suas massas inerciais newtonianas atuais. Isto fica claro a partir das equações (16.35) a (16.75).

22.2 Rotação de Dois Globos em Relação às Galáxias

22.2.1 Dois Globos Girando Presos por uma Corda

Consideramos agora o problema discutido por Newton de dois globos girando em relação ao referencial universal U enquanto estão presos por uma corda, Seção 8.3. Os dois globos possuem massas gravitacionais iguais m_g e estão ligados por uma corda de comprimento $\ell = 2\rho$, onde ρ é a distância de cada globo até o centro entre eles. Vamos supor que os globos e o conjunto de galáxias estão girando ao redor do eixo z de um referencial R passando pelo centro O da corda. Este eixo é perpendicular à corda. Vamos considerar o caso geral no qual os globos giram no plano xy com uma velocidade angular constante $\vec{\omega}_{mR} = \omega_{mR}\hat{z}$ em relação ao referencial R, enquanto que o conjunto de galáxias gira com uma velocidade angular constante $\vec{\Omega}_{GR} = \Omega_{GR}\hat{z}$ em relação ao referencial R, figura 22.4. A velocidade angular ω_{mR} de cada corpo pode ser diferente da velocidade angular Ω_{GR} do conjunto de galáxias.

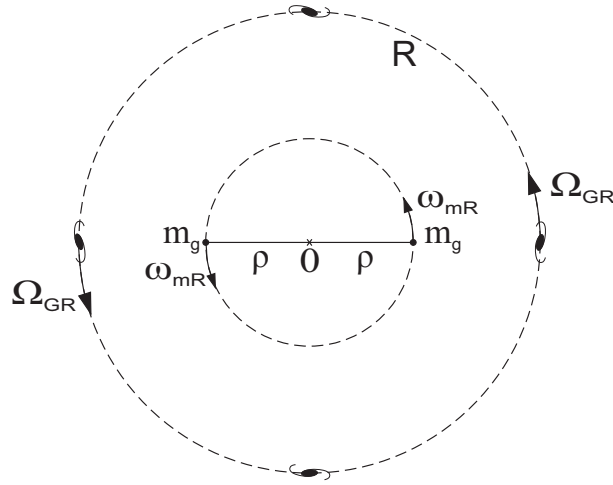



Figura 22.4: Dois globos presos a uma corda e girando com uma velocidade angular ω_{mR} em relação ao referencial R, enquanto que o conjunto de galáxias gira com uma velocidade angular Ω_{GR}. Estas velocidades angulares podem ser diferentes entre si.

Neste caso a velocidade de cada corpo em relação ao referencial R é dada por $\vec{v}_{mR} = \vec{\omega}_{mR} \times \vec{\rho} = (\omega_{mR})\rho\hat{\varphi}$, onde $\vec{\rho} = x\hat{x} + y\hat{y} = \rho\hat{\rho} = \sqrt{x^2+y^2}\hat{\rho}$ é o vetor posição de cada corpo em relação ao centro O e estamos usando coordenadas cilíndricas $(\rho,\ \varphi,\ z)$. Já a aceleração de cada corpo em relação ao referencial R é sua aceleração centrípeta dada por $\vec{a}_{mR} = -\left(\omega_{mR}^2\right)\vec{\rho} = -\left(\omega_{mR}^2\right)\rho\hat{\rho}$.

As forças que estão atuando em cada corpo são a tensão $\vec{T} = -T\hat{\rho}$ na corda esticada apontando em direção ao centro (sendo $T = |\vec{T}|$) e a força inercial $\vec{F}_i$ devida à interação gravitacional de cada corpo com as galáxias. De acordo com a equação (16.79), a equação de movimento para cada corpo nesta situação fica na seguinte forma:

$$-T\hat{\rho} + \Phi_\infty m_g \left(\omega_{mR} - \Omega_{GR}\right)^2 \rho\hat{\rho} = \vec{0}\ . \tag{22.15}$$

Ou seja:

$$T = \Phi_\infty m_g \left(\omega_{mR} - \Omega_{GR}\right)^2 \rho\ . \tag{22.16}$$

Esta relação é interessante sobre diversos aspectos. Vamos compará-la com a equação (8.27) da mecânica newtoniana, a saber:

$$T = m_i a_c = m_i \frac{v_t^2}{\rho} = m_i w^2 \rho\ . \tag{22.17}$$

Observa-se que na mecânica relacional aparece a massa gravitacional em vez da massa inercial do corpo. O mais importante é que na mecânica relacional a tensão T na corda vai existir apenas quando houver uma rotação *relativa* entre a corda e o conjunto de galáxias. Por exemplo, caso os dois globos girem juntos com as galáxias em relação ao referencial R, a tensão na corda se anulará, já que $\omega_{mR} = \Omega_{GR}$. Já na mecânica newtoniana a tensão na corda aparecia quando havia uma rotação dos globos em relação ao espaço absoluto ou em relação a um referencial inercial que não tinha qualquer relação física com as estrelas e galáxias.

Podemos ilustrar esta diferença de interpretação entre a mecânica newtoniana e a mecânica relacional considerando dois referenciais A e B. Em um certo referencial A a corda está dando uma volta por segundo no sentido anti-horário ao redor do eixo z, $\omega_{mA} = 2\pi\ rad/s$, enquanto que o conjunto de galáxias está parado, $\Omega_{GA} = 0$, figura 22.5 (a). A corda está com uma tensão T_A atuando em suas extremidades, figura 22.5 (b).

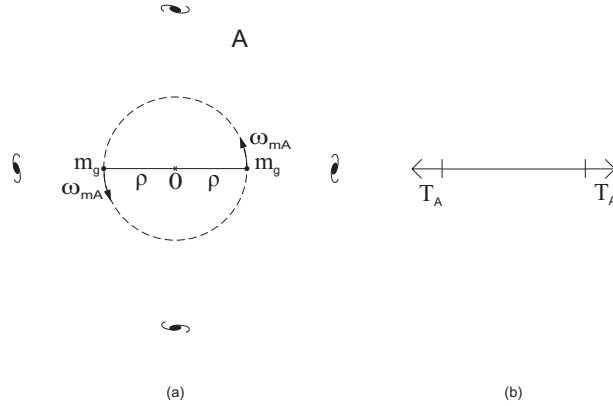



Figura 22.5: (a) Dois globos presos a uma corda e girando com uma velocidade angular ω_{mA} em relação ao referencial A, enquanto que o conjunto de galáxias está parado neste referencial. (b) Tensões T_A nas extremidades da corda de acordo com a mecânica relacional.

Em um referencial B a corda está parada, $\omega_{mB} = 0$, enquanto o conjunto de galáxias está dando uma volta por segundo no sentido horário ao redor do eixo z, $\Omega_{GB} = -2\pi\ rad/s$, figura 22.6 (a). A corda está com uma tensão T_B.

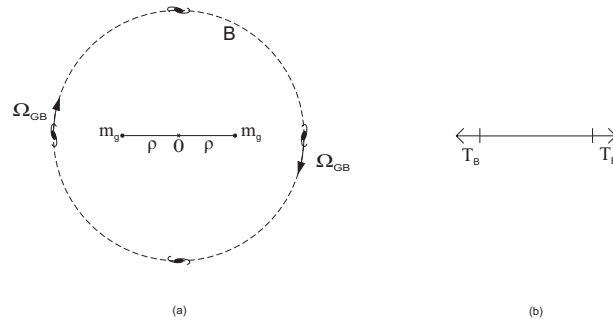



Figura 22.6: (a) Dois globos presos a uma corda. Estes globos e a corda estão parados neste referencial B, enquanto que as galáxias giram ao redor do centro da corda com uma velocidade angular Ω_{GB}. (b) Tensões T_B nas extremidades da corda de acordo com a mecânica relacional.

Como $\omega_{mA} - \Omega_{GA} = \omega_{mB} - \Omega_{GB} = 2\pi\ rad/s$, a mecânica relacional prevê que $T_A = T_B$. Newton, ao contrário, acreditava que $T_A \neq T_B$, já que T_A seria diferente de zero enquanto que T_B seria nulo, como visto na Subseção 8.3.3.

Para Mach a tensão existiria nestas duas situações, tendo o mesmo valor, $T_A = T_B$. Mas ele não chegou a mostrar matematicamente esta igualdade de tensões. A mecânica relacional implementa quantitativamente estas ideias de Mach mostrando com uma lei de Weber que também no referencial B vai aparecer uma força centrífuga real gerando a tensão na corda. Ou seja, desde que a rotação cinemática seja a mesma (globos girando com velocidade angular $(\omega_{mA})\hat{z}$ enquanto as galáxias e estrelas estão em repouso, ou globos em repouso enquanto as galáxias e estrelas giram com velocidade angular $\Omega_{GB} = -(\omega_{mA})\hat{z}$), as consequências

dinâmicas também serão as mesmas (a mesma tensão na corda nos dois casos). Esta equivalência já não acontece na relatividade geral de Einstein.[2] Na mecânica relacional não podemos saber quem está de fato girando, se são os globos ou as galáxias. Mas a partir da tensão na corda, podemos concluir que há uma rotação *relativa* entre os globos e o conjunto de galáxias ao seu redor.

Voltamos agora a considerar a situação ilustrada na figura 22.4. Na figura 22.7 (a) apresentamos as acelerações centrípetas dos dois globos e das galáxias no referencial R. Estas acelerações centrípetas surgem das velocidades angulares mostradas na figura 22.4. Na figura 22.7 (b) apresentamos as duas forças atuando em cada corpo, a saber, a tensão T exercida pela corda esticada puxando-o para dentro e a força inercial F_i exercida gravitacionalmente pelas galáxias e apontando para fora. Também é apresentada a força F_{mi} exercida por cada corpo sobre o conjunto de galáxias. Embora esta força esteja representada como atuando em apenas uma galáxia, deve ser entendido que ela está distribuída sobre todas as galáxias. Na figura 22.7 (c) apresentamos as forças atuando sobre as extremidades da corda. É a força inercial atuando em cada corpo que é transmitida à corda, fazendo com que a corda estique. Ao ser esticada, a corda exerce uma força oposta sobre cada corpo, a saber, a tensão da corda puxando os corpos para dentro. Ou seja, é a força inercial exercida gravitacionalmente pelas galáxias sobre cada corpo que é transmitida à corda, fazendo com que ela estique.

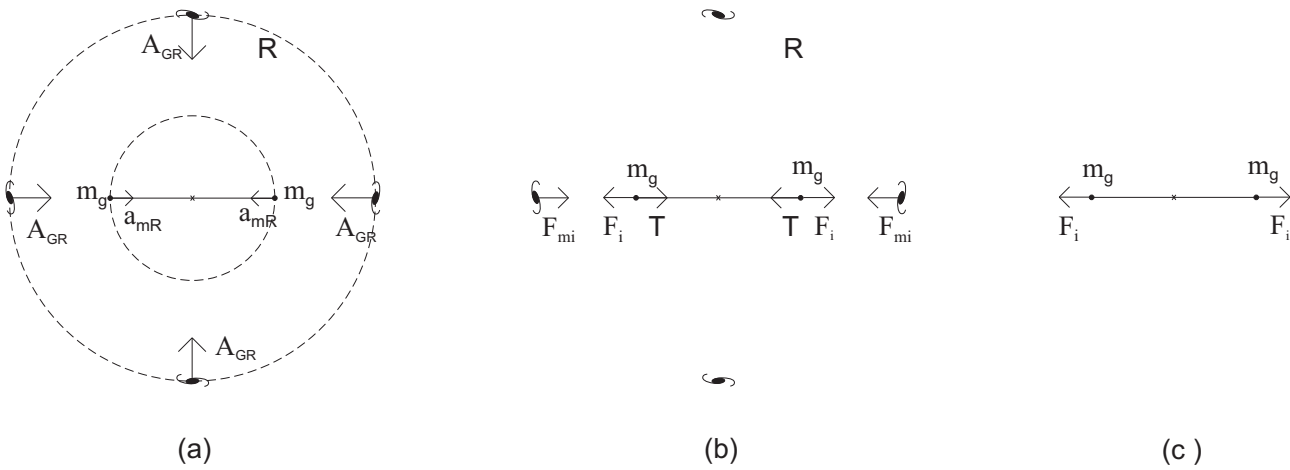



Figura 22.7: (a) Acelerações centrípetas no referencial R dos dois globos, $\vec{a}_{mR}$, e das galáxias, $\vec{A}_{GR}$. Estas acelerações centrípetas estão relacionadas aos movimentos circulares descritos pelos globos e pelas galáxias, como indicado na figura 22.4. (b) Forças atuando sobre cada globo, F_i e T, além da força exercida por cada corpo sobre o conjunto de galáxias, F_{mi}. (c) Forças F_i atuando sobre as extremidades da corda.

Como a constante Φ_∞ é proporcional à densidade média de massa gravitacional do universo, equação (17.29), observa-se pela equação (22.16) que a tensão também pode ir a zero quando fazemos $\rho_{go} \to 0$. Nada disto ocorria na mecânica clássica. Mas esta é uma consequência necessária de toda teoria que implemente o princípio de Mach.

22.2.2 Dois Globos Girando Presos por uma Mola

A mesma situação discutida na Subseção 22.2.1 pode ser analisada substituindo a corda de comprimento constante $\ell = 2\rho$, por uma mola de constante elástica k e comprimento relaxado $\ell_o = 2\rho_o$. Novamente desprezamos a massa gravitacional da mola comparada com a massa gravitacional m_g de cada corpo preso a ela. As contas vão ser as mesmas, apenas substituindo a tensão T na corda pela tensão T na mola dada por $k(\ell - \ell_o)$, onde $\ell = 2\rho$ é o comprimento da mola tensionada. Esta tensão na mola é dada por:

$$T = k(\ell - \ell_o) = \Phi_\infty m_g \left(\omega_{mR} - \Omega_{GR}\right)^2 \rho \ . \tag{22.18}$$

A diferença em relação ao caso da corda é que agora a tensão pode ser facilmente visualizada ou medida a partir da variação de comprimento da mola. Só vai haver uma variação de comprimento quando houver uma rotação *relativa* entre a mola e o conjunto de galáxias. Além disso, esta variação de comprimento passa

[2][Ghi91] e [Ghi92].

a ser diretamente proporcional à densidade média de massa gravitacional do universo, ρ_{go}. Ou seja, $\ell \to \ell_o$ quando $\rho_{go} \to 0$.

22.3 A Experiência do Balde de Newton

22.3.1 Balde Parado ou Girando Junto com a Água em Relação ao Solo

Neste caso, a condição (17.67) é válida de tal forma que a equação de movimento da mecânica relacional fica na forma simplificada da equação (20.2):

$$\sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^{N} \vec{F}_{pk} - \Phi_\infty m_{gk} \vec{a}_{kT} = \vec{0} \ . \tag{22.19}$$

Esta equação é similar à segunda lei do movimento de Newton, substituindo m_{ik} por $\Phi_\infty m_{gk}$, além de substituir a aceleração em relação a um referencial inercial pela aceleração em relação à Terra. No caso da água girando em relação ao solo, as forças devidas às distribuições anisotrópicas de matéria são a força peso apontando para baixo (desprezando as pequenas componentes horizontais devidas ao movimento da água em relação ao solo) e a força de empuxo devida ao gradiente de pressão, como discutido na Seção 8.4. Novamente é interessante utilizar coordenadas cilíndricas $(u,\ \varphi,\ z) = (\sqrt{x^2+y^2},\ \arctan(y/x),\ z)$. O eixo z coincide com o eixo do balde, com sua origem no ponto mais baixo da água, apontando para cima, figura 22.8.

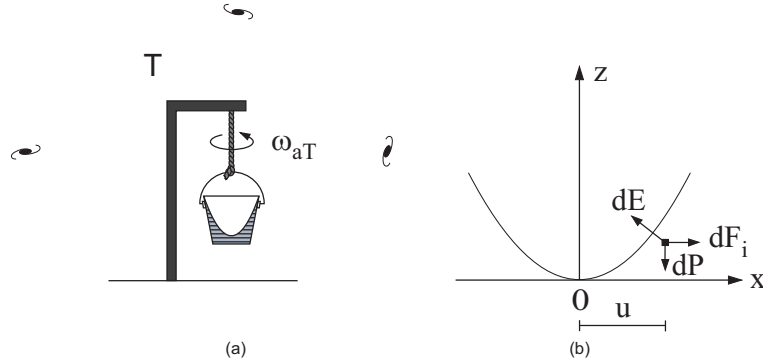



Figura 22.8: (a) Balde e água girando juntos ao redor do eixo do balde, em relação à Terra, com velocidade angular $\vec{\omega}_{aT} = \omega_{aT}\hat{z}$. (b) Forças atuando sobre um elemento de massa gravitacional dm_g do fluido a uma distância u do eixo de rotação: Peso dP exercido pela Terra, empuxo dE exercido pelo restante do fluido, além da força inercial dF_i exercida gravitacionalmente pelas galáxias distantes.

A equação de movimento para um elemento do fluido de massa gravitacional dm_g e volume dV fica então dada por:

$$d\vec{P} + d\vec{E} - \Phi_\infty dm_g \vec{a}_{aT} = \vec{0} \ , \tag{22.20}$$

onde $\vec{a}_{aT}$ é a aceleração deste elemento da água em relação ao solo. No caso em que o fluido descreve uma trajetória circular horizontal ao redor do eixo do balde teremos apenas uma aceleração centrípeta dada por

$$\vec{a}_{aT} = -\frac{v_{aT}^2}{u}\hat{u} = -\left(\omega_{aT}\right)^2 u\hat{u} \ , \tag{22.21}$$

onde ω_{aT} é a velocidade angular da água em relação ao solo e $u = \sqrt{x^2+y^2}$ é a distância de um elemento de água em relação ao eixo z de rotação.

A equação de movimento fica então dada por:

$$-dm_g g\hat{z} + (\nabla p)\, dV + \Phi_\infty dm_g \left(\omega_{aT}\right)^2 u\hat{u} = \vec{0} \ . \tag{22.22}$$

As três forças atuando sobre o elemento de massa gravitacional dm_g do fluido estão representadas na figura 22.8 (b).

A solução deste problema tem então a mesma forma que a solução obtida na Seção 8.4, ou seja, uma superfície da água côncava na forma de um paraboloide de revolução. A solução na mecânica relacional é do tipo da solução dada pela equação (8.32), a saber:

$$z = \frac{\Phi_\infty \rho_g}{\rho_g} \frac{\omega_{aT}^2}{2g} u^2 = \Phi_\infty \frac{\omega_{aT}^2}{2g} u^2 \ . \tag{22.23}$$

Já a pressão p no interior do fluido é dada por uma fórmula similar à equação (8.43):

$$p(u,\ \varphi,\ z) = \frac{\Phi_\infty \rho_g \omega_{aT}^2}{2} u^2 - \rho_g g z + p_o \ . \tag{22.24}$$

22.3.2 Análise deste Problema no Referencial que Gira Junto com a Água

No referencial R que gira com o balde, a água está em repouso. Neste referencial R a Terra, as estrelas fixas e as galáxias distantes estão todos girando juntos com uma velocidade angular Ω_{GT} em relação ao solo. A equação de movimento da mecânica relacional fica na forma da equação (18.8). Como neste referencial a água está em repouso, $\vec{v}_{aR} = \vec{0}$ e $\vec{a}_{aR} = \vec{0}$. Além do mais, a velocidade angular do universo é essencialmente constante, de tal forma que $d\vec{\Omega}_{GR}/dt = \vec{0}$. Assim esta equação se reduz a:

$$\sum_{\substack{p=1 \\ p\neq k}}^{N} \vec{F}_{pk} - \Phi_\infty m_{gk} \vec{\Omega}_{GR} \times (\vec{\Omega}_{GR} \times \vec{r}_{kR}) = \vec{0} \ . \tag{22.25}$$

E esta equação é similar à segunda lei do movimento de Newton com a força centrífuga quando o corpo de prova não se move. Isto significa que a mecânica relacional prevê neste referencial o aparecimento de uma força centrífuga gravitacional real exercida pelas galáxias girando ao redor do balde e atuando sobre as moléculas da água. Podemos então dizer que esta força centrífuga pressiona a água contra os lados do balde fazendo com que a água suba pelas paredes do balde. No equilíbrio, o peso e esta força centrífuga são contrabalançados pelo gradiente de pressão. Embora a água esteja parada neste referencial R, ela assume um formato parabólico.

22.3.3 Qual Seria o Formato da Água se Todos os Outros Corpos Astronômicos Desaparecessem?

A equação (22.23) indica que a concavidade se anula quando $\rho_{go} \to 0$, já que Φ_∞ é proporcional à densidade média de massa gravitacional no universo pela equação (17.29). Ou seja, a superfície da água ficaria plana ao aniquilar o conjunto de galáxias. Haveria ainda uma certa concavidade devida à rotação da água em relação ao solo, mas este efeito está sendo desprezado aqui pois não estamos considerando as forças horizontais que surgem sobre um elemento da água devidas à sua rotação em relação ao solo. Ou seja, na aproximação sendo considerada nesta Seção, estamos supondo que a força exercida pela Terra sobre um elemento de massa dm_g da água seja apenas seu peso $d\vec{P} = -dm_g \hat{z}$ apontando para baixo. Nesta aproximação obtém-se que toda a concavidade da água desapareceria ao aniquilar as galáxias e estrelas ao redor da Terra.

Já na mecânica newtoniana a concavidade da água não depende de ρ_{go}. Isto significa que a concavidade da água permaneceria inalterada mesmo nesta situação hipotética na qual desaparecessem todos os outros corpos astronômicos ao redor da Terra.

22.3.4 Qual Seria o Formato da Água se Fosse Possível Girar o Conjunto de Galáxias ao Redor do Eixo do Balde?

O mais interessante é calcular com a mecânica relacional a concavidade da água em uma situação hipotética na qual tanto a água quanto o conjunto de galáxias estejam girando em relação ao solo ao redor do eixo z do balde com velocidades angulares constantes, a saber, $\vec{\omega}_{aT} = (\omega_{aT})\hat{z}$ e $\vec{\Omega}_{GT} = (\Omega_{GT})\hat{z}$, respectivamente. Estas velocidades angulares ω_{aT} e Ω_{GT} podem ser diferentes entre si. Esta situação está representada na figura 22.9.

O movimento da água é regido pela equação (16.79). As forças que atuam sobre um elemento de água de volume dV e massa gravitacional dm_g são a força peso $d\vec{P} = dm_g \vec{g} = -dm_g g \hat{z}$ apontando para baixo (desprezando as pequenas componentes horizontais devidas ao movimento da água em relação ao solo), a

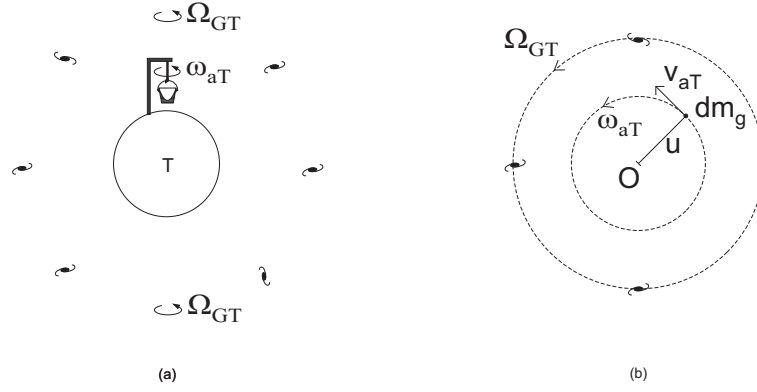



Figura 22.9: (a) Água e galáxias girando em relação ao solo, ao redor do eixo do balde, com velocidades angulares constantes ω_{aT} e Ω_{GT}, respectivamente. Estas velocidades angulares podem ser diferentes entre si. (b) Mesma situação vista de cima para baixo, mostrando um elemento da água com massa dm_g deslocando-se em uma órbita circular horizontal a uma distância u do eixo do balde.

força de empuxo devida ao gradiente de pressão, $d\vec{E} = -(\nabla p)dV$, além da força inercial exercida pelas galáxias distantes. Ficamos então com a seguinte equação de movimento:

$$d\vec{P} + d\vec{E} + \Phi_\infty dm_g(\omega_{aT} - \Omega_{GT})^2 u\hat{u} = \vec{0} \ . \tag{22.26}$$

Ou seja:

$$-dm_g g\hat{z} - \left(\frac{\partial p}{\partial u}\hat{u} + \frac{1}{u}\frac{\partial p}{\partial \varphi}\hat{\varphi} + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{z}\right) dV + \Phi_\infty dm_g(\omega_{aT} - \Omega_{GT})^2 u\hat{u} = \vec{0} \ . \tag{22.27}$$

Esta equação tem a mesma forma que a equação (8.35) substituindo dm_i por $\Phi_\infty dm_g$ e substituindo ω por $(\omega_{aT} - \Omega_{GT})$. A solução para a pressão em um ponto qualquer do fluido é então similar à equação (8.43), a saber:

$$p(u, \ \varphi, \ z) = \frac{\Phi_\infty \rho_g(\omega_{aT} - \Omega_{GT})^2}{2} u^2 - \rho_g g z + p_o \ . \tag{22.28}$$

Já a equação da superfície livre do líquido é similar à equação (8.32), a saber:

$$z = \frac{\Phi_\infty \rho_g}{\rho_g}\frac{(\omega_{aT} - \Omega_{GT})^2}{2g} u^2 = \Phi_\infty \frac{(\omega_{aT} - \Omega_{GT})^2}{2g} u^2 = \frac{(\omega_{aT} - \Omega_{GT})^2}{2g} u^2 \ . \tag{22.29}$$

O importante a observar nesta última equação é que a concavidade parabólica só vai existir quando houver uma rotação *relativa* entre a água e o conjunto de galáxias. Esta concavidade da superfície indica apenas que $\omega_{aT} - \Omega_{GT} \neq 0$, mas não se pode concluir se é a água ou o conjunto de galáxias que está girando em relação ao solo. A concavidade vai ser a mesma sempre que o valor de $\omega_{aT} - \Omega_{GT}$ for o mesmo, não importando se é a água ou se são as galáxias que estão girando em relação ao solo.

Esta discussão ajuda a ilustrar a diferença marcante da mecânica relacional quando comparada com as mecânicas de Newton e de Einstein, onde nada disto ocorreria.

Quando Mach estava criticando negativamente o espaço absoluto de Newton, ele disse:[3] "*Tente fixar o balde de Newton e girar o céu das estrelas fixas e então prove a ausência de forças centrífugas.*" Implementamos quantitativamente o princípio de Mach com uma lei de Weber para a gravitação. A única diferença em relação a esta afirmação de Mach é que as forças centrífugas usuais surgem na mecânica relacional quando há uma rotação relativa entre o corpo de prova e as galáxias distantes. Como visto na Subseção 16.6.3, equação (16.50), a rotação relativa entre o corpo de prova e o céu de estrelas fixas pertencentes à nossa galáxia gera apenas uma pequena força centrífuga que pode ser desprezada, no caso da experiência do balde, quando comparada com a força centrífuga atuando sobre a água e sendo devida à rotação das galáxias distantes ao redor do eixo do balde.

Ou seja, com a mecânica relacional deduzimos matematicamente o seguinte resultado:

[3][Mac60, pág. 279].

Fixamos o balde de Newton, giramos o conjunto de galáxias e provamos a presença de forças centrífugas gravitacionais reais.

Na prática não podemos controlar a velocidade angular de rotação do conjunto de galáxias ao redor do eixo do balde. Logo não podemos testar esta previsão teórica. Mas veremos na Subseção 23.5.7 que é possível propor uma experiência real análoga ao que está sendo discutido aqui. Esta experiência poderia testar esta previsão da mecânica relacional, desde que houvesse uma precisão suficiente para medir o pequeno efeito que surgiria na superfície livre da água ao girar uma casca esférica ao redor do eixo do balde.

22.4 Achatamento da Terra

22.4.1 Cálculo do Achatamento no Referencial Universal

Consideramos agora a rotação diária da Terra em relação às galáxias com uma velocidade angular $\vec{\omega}_{TU}$ ao redor de seu eixo Norte-Sul, figura 22.10 (a). A Terra tem uma massa gravitacional M_{gT} e um raio médio R, sendo $2R_>$ seu diâmetro de Leste a Oeste, enquanto que $2R_<$ é seu diâmetro do polo Norte ao polo Sul.

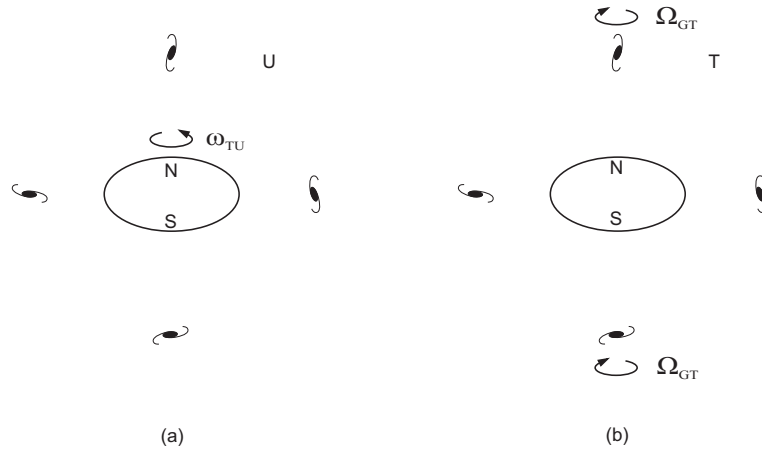



Figura 22.10: (a) Achatamento da Terra devido à sua rotação diária em relação às galáxias. (b) Achatamento da Terra no referencial terrestre T.

Nesta situação vale a equação (17.73). No referencial universal U no qual as galáxias estão em repouso, a equação de movimento da mecânica relacional, equação (22.1), tem a mesma forma que a segunda lei de Newton, equação (1.5). As mudanças que aparecem são $\Phi_\infty m_{gk}$ ao invés de m_{ik}, além de termos $\vec{a}_{kU} = \vec{a}_{kF}$ em vez de $\vec{a}_k$, sendo $\vec{a}_{kU}$ a aceleração da massa m_{gk} em relação ao conjunto de galáxias, $\vec{a}_{kF}$ é a aceleração da massa m_{gk} em relação ao referencial F das estrelas fixas, enquanto que a aceleração $\vec{a}_k$ da mecânica clássica era a aceleração do corpo de prova k em relação ao espaço absoluto ou em relação a referenciais inerciais. As contas vão ser então como aquelas apresentadas na Subseção 9.2.2. Considera-se a Terra como composta por um fluido incompressível. As forças atuando sobre um elemento de massa gravitacional da Terra são a força gravitacional $d\vec{P}$ exercida pelo restante da Terra, a força de empuxo $d\vec{E} = -(\nabla p)dV$ devida ao gradiente de pressão, além da força inercial $d\vec{F}_i$ exercida gravitacionalmente pelas galáxias quando há uma aceleração relativa entre elas e o elemento de massa. A equação de movimento na mecânica relacional fica dada por:

$$d\vec{P} + d\vec{E} - \Phi_\infty dm_g \vec{a}_{mF} = \vec{0} \ . \tag{22.30}$$

A força gravitacional $d\vec{P}$ é dada por $dm_g\vec{g}$, na qual $\vec{g}$ é a força gravitacional por unidade de massa. No caso de uma distribuição elipsoidal de matéria temos que $\vec{g}$ é dado pela equação (9.32). O gradiente de pressão em coordenadas esféricas é dado pela equação (9.4). O vetor posição de um elemento de massa gravitacional em coordenadas retangulares, esféricas e cilíndricas é dado pela equação (9.7). Seja $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ a distância de dm_g até a origem do sistema de coordenadas, ou seja, até o centro da Terra. Seja $u = \sqrt{x^2 + y^2} = r \operatorname{sen}\theta$ a distância de dm_g ao eixo z. Além disso, $\hat{u} = \hat{r}\operatorname{sen}\theta + \hat{\theta}\cos\theta$ é o vetor unitário das coordenadas cilíndricas, sendo $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$ os vetores unitários das coordenadas esféricas.

A aceleração centrípeta $\vec{a}_{mF}$ do elemento de massa gravitacional dm_g em relação ao referencial F das estrelas fixas é dada pela equação (9.8). No referencial universal U esta aceleração fica escrita como:

$$\vec{a}_{mU} = \vec{a}_{mF} = \vec{\omega}_{TU} \times (\vec{\omega}_{TU} \times \vec{r}) = -\omega_{TU}^2 u\hat{u} = -\omega_{TU}^2 r \operatorname{sen}\theta(\hat{r} \operatorname{sen}\theta + \hat{\theta}\cos\theta) \ . \tag{22.31}$$

Aplicando estes resultados na equação (22.30) e seguindo os cálculos da Subseção 9.2.2 obtém-se que o formato da Terra é então dado por uma expressão análoga à equação (9.42), a saber:

$$\frac{R_>}{R_<} \approx 1 + \frac{5\Phi_\infty \omega_{TU}^2 R^3}{4GM_{gT}} \ . \tag{22.32}$$

Utilizando os valores medidos de ω_{TU}, R, G e M_{gT} obtém-se uma equação análoga à equação (9.44), a saber:

$$\frac{R_>}{R_<} \approx 1 + \frac{5\Phi_\infty \omega_{TU}^2 R^3}{4GM_{gT}} \approx 1,0043 \ . \tag{22.33}$$

22.4.2 Cálculo do Achatamento no Referencial Terrestre

Já no referencial T da Terra e desprezando a translação anual da Terra ao redor do Sol, a equação de movimento para uma partícula de massa gravitacional m_g na mecânica relacional fica na forma da equação (18.8). Neste caso o conjunto de galáxias gira diariamente ao redor do eixo Norte-Sul da Terra com uma velocidade angular $\vec{\Omega}_{GT} = -\vec{\omega}_{TU}$, figura 22.10 (b). A equação de movimento fica na forma:

$$\sum_{p=1}^{N} \vec{F}_{pm} - \Phi_\infty m_g \left[\vec{a}_{mT} + \vec{\Omega}_{GT} \times (\vec{\Omega}_{GT} \times \vec{r}_{mT}) + 2\vec{v}_{mT} \times \vec{\Omega}_{GT} + \vec{r}_{mT} \times \frac{d\vec{\Omega}_{GT}}{dt} \right] = \vec{0} \ . \tag{22.34}$$

Como a Terra está em repouso neste referencial, $\vec{v}_{mT} = \vec{0}$ e $\vec{a}_{mT} = \vec{0}$. Considerando também que $d\vec{\Omega}_{GT}/dt = \vec{0}$ chegamos a:

$$\sum_{p=1}^{N} \vec{F}_{pm} - \Phi_\infty m_g \vec{\Omega}_{GT} \times (\vec{\Omega}_{GT} \times \vec{r}_{mT}) = \vec{0} \ . \tag{22.35}$$

Isto é, neste referencial vai aparecer uma força centrífuga real de origem gravitacional devida à rotação diária das galáxias distantes ao redor do eixo Norte-Sul da Terra. Esta força centrífuga achata a Terra nos polos, figura 22.10 (b). Realizando as contas para este caso a partir da equação (22.35) obtém-se uma equação análoga à equação (22.32), mas com Ω_{GT} no lugar de ω_{TU}, a saber:

$$\frac{R_>}{R_<} \approx 1 + \frac{5\Phi_\infty \Omega_{GT}^2 R^3}{4GM_{gT}} \approx 1,0043 \ . \tag{22.36}$$

22.4.3 Qual Seria o Formato da Terra se Todos os Outros Corpos Astronômicos Desaparecessem?

Pela equação (22.32) observa-se que o achatamento da Terra é proporcional à constante Φ_∞, sendo Φ_∞ dado pela equação (17.29). Utilizando que a densidade de massa gravitacional da Terra é dada por $\rho_{gT} = 3M_{gT}/(4\pi R^3)$ obtém-se que $R_>/R_<$ depende linearmente da densidade média de massa gravitacional no universo, ρ_{go}:

$$\frac{R_>}{R_<} \approx 1 + \frac{5\xi}{4} \frac{\rho_{go}}{\rho_{gT}} \frac{\omega_{TU}^2}{c^2\alpha^2} \ . \tag{22.37}$$

Em particular, quando $\rho_{go} \to 0$, obtém-se que $R_>/R_< \to 1$. Ou seja, de acordo com a mecânica relacional a Terra voltaria a ter um formato esférico caso pudéssemos aniquilar todos os outros corpos astronômicos ao seu redor, figura 22.11. Isto está compatível com as ideias de Mach. Afinal de contas, se a Terra estivesse sozinha no universo, não faria sentido afirmar que ela gira em relação a qualquer coisa. Logo, todos os efeitos surgindo da rotação da Terra, tal como seu achatamento, têm de desaparecer quando aniquilamos todos os outros corpos do universo.

Como discutido na Subseção 12.1.2, Clarke e Carl Neumann concluíram que uma teoria que implementasse as ideias relacionais de Leibniz deveria levar à consequência de que as forças centrífugas atuando sobre um

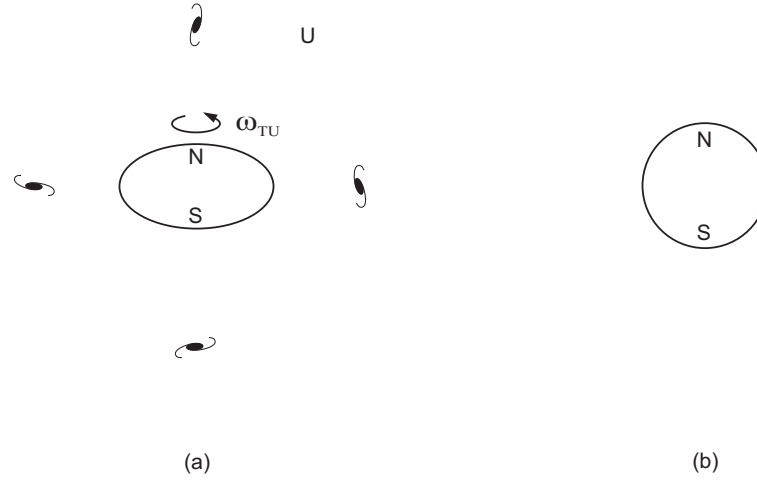



Figura 22.11: (a) Achatamento da Terra devido à sua rotação diária em relação às galáxias. (b) A Terra voltaria a ser esférica ao desaparecer com todos os outros corpos astronômicos.

corpo que gira deveriam desaparecer ao aniquilar todos os outros corpos ao redor deste corpo, tal que ele ficasse sozinho no universo. Eles achavam esta consequência absurda e insuportável. Mach também chegou à mesma conclusão e defendeu que esta consequência era fisicamente intuitiva e razoável, em vez de considerá-la absurda ou insuportável. A mecânica relacional implementou matematicamente o princípio de Mach. Em particular, mostramos que a força inercial atuando sobre qualquer corpo depende de sua interação com os outros corpos do universo distribuídos isotropicamente ao redor do corpo de prova. Ao aniquilar estes corpos a força inercial vai a zero. Consequentemente, todos os efeitos surgindo da força centrífuga desaparecem na mecânica relacional ao aniquilar com todos os corpos que estão ao redor do corpo de prova.

Mach não chegou a implementar matematicamente suas ideias. Esta implementação é obtida com a mecânica relacional. A equação (22.37), em particular, ilustra de forma precisa o conteúdo teórico do princípio de Mach.

22.4.4 Qual Seria o Formato da Terra se Fosse Possível Girar o Conjunto de Galáxias ao Redor do Eixo Terrestre Norte-Sul?

Uma outra conta interessante que pode ser feita é sobre o achatamento da Terra em uma situação hipotética na qual ela estivesse girando com uma velocidade angular constante $\vec{\omega}_{TR} = \omega_{TR}\hat{z}$ ao redor do eixo z de um referencial R centrado no centro da Terra, enquanto que o conjunto de galáxias estivesse girando com uma velocidade angular constante $\vec{\Omega}_{GR} = \vec{\Omega}_{GR}\hat{z}$ neste referencial, figura 22.12. Estas duas velocidades angulares ω_{TR} e Ω_{GR} podem ser diferentes entre si.

A equação de movimento neste caso é dada pela equação (16.79). Além da força inercial centrífuga $d\vec{F}_i = \Phi_\infty dm_{gk}(\omega_{kR} - \Omega_{GR})^2 u_k \hat{u}_k$, vão atuar em qualquer elemento de massa gravitacional dm_{gk} e volume dV a força peso $d\vec{P} = dm_{gk}\vec{g}$ devida ao restante da matéria terrestre e a força de empuxo devida ao gradiente de pressão, $d\vec{E} = -(\nabla p)dV$. A força gravitacional por unidade de massa, $\vec{g}$, é dada pela equação (9.32) no caso de uma distribuição elipsoidal de matéria. O gradiente de pressão é dado pela equação (9.4) em coordenadas esféricas.

A equação de movimento da mecânica relacional, equação (16.79), vai ser análoga à segunda lei de Newton, equação (9.2). Porém, na mecânica relacional aparece $\Phi_\infty dm_{gk}$ no lugar de dm_{ik}, além de aparecer $\omega_{kR} - \Omega_{GR}$ no lugar da velocidade angular de rotação dinâmica da Terra em relação ao espaço absoluto dada por ω_d. Logo a solução terá a mesma forma da equação (9.42) com as substituições apropriadas, a saber:

$$\frac{R_>}{R_<} \approx 1 + \frac{5\Phi_\infty(\omega_{TR} - \Omega_{GR})^2 R^3}{4GM_{gT}} . \qquad (22.38)$$

Utilizando que a densidade de massa gravitacional da Terra é dada por $\rho_{gT} = 3M_{gT}/(4\pi R^3)$ e a equação (17.29), obtém-se que o achatamento da Terra é dado por:

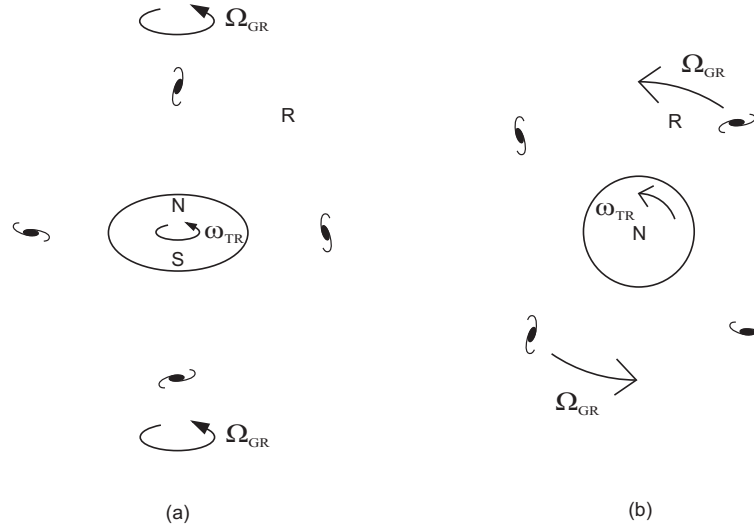



Figura 22.12: (a) Achatamento da Terra quando ela e o conjunto de galáxias giram ao redor do eixo Norte-Sul em relação a um referencial R com velocidades angulares ω_{TR} e Ω_{GR}, respectivamente. Estas duas velocidades angulares podem ser diferentes entre si. (b) Mesma situação vista do polo Norte para o polo Sul.

$$\frac{R_>}{R_<} \approx 1 + \frac{5\xi}{4}\frac{\rho_{go}}{\rho_{gT}}\frac{(\omega_{TR} - \Omega_{GR})^2}{c^2\alpha^2} \ . \tag{22.39}$$

Esta relação é muito interessante sob diversos aspectos. Vamos compará-la com a equação (9.42) obtida com a mecânica newtoniana e colocada em uma forma similar:

$$\frac{R_>}{R_<} \approx 1 + \frac{15}{16\pi G}\frac{\omega_d^2}{\rho_T} \ . \tag{22.40}$$

Enquanto que na mecânica relacional o achatamento depende da razão entre a densidade média de massa gravitacional do universo e a densidade da Terra, ρ_{go}/ρ_{gT}, na mecânica clássica ele só depende da densidade da Terra. Enquanto que na mecânica relacional o achatamento depende do quadrado da rotação relativa entre a Terra e o conjunto de galáxias, $(\omega_{TR} - \Omega_{GR})^2$, na mecânica clássica ele só depende do quadrado da velocidade angular da Terra em relação ao espaço absoluto, ω_d^2, sendo que ω_d não tem relação causal com o conjunto de galáxias.

A equação (22.39) indica que a Terra volta ao formato esférico quando $\omega_{TR} = \Omega_{GR}$, isto é, quando não há rotação *relativa* entre a Terra e o conjunto de galáxias. Ela também volta ao formato esférico se aniquilarmos com os corpos astronômicos ao redor da Terra, isto é, quando $\rho_{go} \to 0$. Esta equação é também interessante por mostrar que o achatamento $R_>/R_<$ não depende de uma densidade absoluta de massa gravitacional, mas sim de uma razão entre duas densidades de massa gravitacional, ρ_{go}/ρ_{gT}. Isto está compatível com o princípio das proporções físicas.[4]

Como visto na Subseção 9.2.3, Newton supôs esta condição hipotética na qual a Terra estaria parada enquanto que o conjunto de todos os outros corpos astronômicos ao seu redor girariam uma vez por dia ao redor do eixo Norte-Sul terrestre. Ele concluiu que a Terra não se achataria neste caso. Isto fica evidente pela citação apresentada naquela Subseção, quando Newton afirmou:[5]

> Todavia, quem imaginará que as partes da Terra tendem a afastar-se do seu centro em virtude de uma força aplicada exclusivamente ao céu?

Mach também pensou nesta possibilidade, como discutido nas Seções 13.6 e 13.7. Mach concluiu que o achatamento da Terra deveria ocorrer neste caso, tendo o mesmo valor que aquele medido na situação real. Esta conclusão de Mach é contrária ao ponto de vista defendido por Newton. Isto fica evidente pela afirmação de Mach segundo a qual[6] "os princípios da mecânica podem, de fato, ser concebidos tal que mesmo

[4] [Ass01], [Ass03a] e [Ass04].
[5] [HH62, págs. 127-128], [New83, págs. 66-67] e [Ear89, pág. 63].
[6] [Mac60, págs. 283-284].

para rotações relativas surgem as forças centrífugas." A mecânica relacional implementou matematicamente esta hipótese de Mach, como indicado pela equação (22.39). Ou seja, o achatamento será de $0,4\%$ não apenas quando $\Omega_{GR} = 0$ e $\omega_{TR} = 2\pi/T_{dia} = 7,29 \times 10^{-5}\ rad/s$, mas também quando $\Omega_{GR} = -2\pi/T_{dia} = -7,29 \times 10^{-5}\ rad/s$ e $\omega_{TR} = 0$.

Além do mais, este achatamento aumentaria de valor se fosse possível aumentar o valor da rotação relativa entre a Terra e as galáxias, aumentando o valor de $\omega_{TR} - \Omega_{GR}$. Por exemplo, se fosse possível fazer com que o conjunto de galáxias girasse ao redor do eixo terrestre 5 vezes por dia, o achatamento terrestre seria de $5 \times 0,4\% = 2\%$. Embora não seja possível controlar a rotação das galáxias ao redor da Terra, apresentamos na Subseção 23.5.6 um possível teste experimental desta ideia.

A forma achatada da Terra não pode mais ser utilizada como prova da rotação absoluta e real da Terra. Na mecânica relacional este achatamento pode ser explicado com o conjunto das galáxias distantes em repouso exercendo uma força gravitacional $-\Phi_\infty m_g \vec{a}_{mU}$ sobre os elementos de massa da Terra, enquanto a Terra gira diariamente em relação a este referencial. Este achatamento também pode ser explicado com a Terra em repouso, enquanto as galáxias distantes giram diariamente ao redor dela exercendo uma força gravitacional centrífuga $-\Phi_\infty m_g \vec{\Omega}_{GT} \times (\vec{\Omega}_{GT} \times \vec{r}_{mT})$ sobre os elementos de massa da Terra. Ambas explicações são igualmente corretas e levam ao mesmo achatamento da Terra. Passa a ser então uma questão de conveniência ou de convenção escolher a Terra, ou as galáxias distantes, ou qualquer outro corpo ou sistema de referência como estando em repouso. Este é um resultado muito elegante e profundo da mecânica relacional, que não tinha sido implementado quantitativamente por qualquer outra formulação da mecânica até o momento.

Capítulo 23

Além de Newton

Nos Capítulos anteriores vimos como obter a partir da mecânica relacional o movimento dos corpos em diversas situações, obtendo resultados análogos ao estudo destes movimentos na mecânica newtoniana. Vimos também como resolver muitos enigmas da física clássica, tais como a proporcionalidade entre a massa inercial e a massa gravitacional, a origem da força centrífuga e da força de Coriolis, etc.

Neste Capítulo discutimos alguns fenômenos que estão além da teoria newtoniana. Eles surgem teoricamente dos termos adicionais que aparecem na força de Weber gravitacional quando comparada com a lei da gravitação universal de Newton.

23.1 Precessão do Periélio dos Planetas no Referencial das Estrelas Fixas

Existem muitos trabalhos discutindo matematicamente a precessão do periélio utilizando a lei de Weber aplicada ao eletromagnetismo e à gravitação.[1]

Começamos discutindo o problema de dois corpos movendo-se sob a interação gravitacional mútua, na presença das galáxias distantes. No caso do sistema solar valem as condições (17.71) e (17.73), de tal forma que a equação de movimento para o corpo 1 no referencial F das estrelas fixas fica na forma da equação (17.72), a saber:

$$\vec{F}_{21} - \Phi_\infty m_{g1}\vec{a}_{1U} = \vec{F}_{21} - \Phi_\infty m_{g1}\vec{a}_{1F} = \vec{0} \ . \tag{23.1}$$

Aqui $\vec{F}_{21}$ é a força exercida por 2 sobre 1 e $\vec{a}_{1F}$ é a aceleração do corpo 1 em relação às estrelas fixas. Esta aceleração é essencialmente a mesma que a aceleração $\vec{a}_{1U}$ do corpo 1 em relação às galáxias distantes, $\vec{a}_{1F} = \vec{a}_{1U}$. E analogamente para o corpo 2:

$$\vec{F}_{12} - \Phi_\infty m_{g2}\vec{a}_{2U} = \vec{F}_{12} - \Phi_\infty m_{g2}\vec{a}_{2F} = \vec{0} \ . \tag{23.2}$$

Consideramos aqui o Sol interagindo com um planeta. Podemos considerar os planetas como pontos materiais já que seus diâmetros são muito menores do que suas distâncias ao Sol. Neste problema o Sol também pode ser considerado como um ponto material: A força exercida pelo Sol de raio R_S sobre um ponto material externo 1 é obtida integrando a equação (16.31). Porém, como já mostramos antes,[2] os termos multiplicando o segundo ξ nesta equação são ao menos 6×10^{-4} menores do que os termos multiplicando o primeiro ξ no caso do sistema planetário. Isto significa que podemos considerar o Sol como um ponto material neste problema.

A força exercida pelo Sol (representado pelo índice 2) sobre um planeta (índice 1) de acordo com a expressão de Weber fica então dada pela equação (17.37):

$$\vec{F}_{21} = -Gm_{g1}m_{g2}\frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2}\left[1 - \frac{\xi}{c^2}\left(\frac{\dot{r}_{12}^2}{2} - r_{12}\ddot{r}_{12}\right)\right] = -\vec{F}_{12} \ . \tag{23.3}$$

[1] [See] com tradução para a língua alemã em [See24], [Tis72], [Zol76, págs. xi-xii], [Zol83, págs. 126-128], [Ser], [Tis95], [Ger98], [Ger17], [Sch25] (com tradução para a língua portuguesa em [XA94] e para a língua inglesa em [Sch95]), [Nor65, pág. 46], [Whi73, págs. 207-208], [Eby77], [Ass89a], [CA91], [Ass94, Seções 7.1 e 7.5], [Ass98], [Ass99a] etc.

[2] [Ass89a].

A partir das equações (23.1) até (23.3), as equações de movimento ficam então na forma:

$$\Phi_\infty m_{g1}\vec{a}_{1F} = -\, G m_{g1} m_{g2} \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \left[1 - \frac{\xi}{c^2} \left(\frac{\dot{r}_{12}^2}{2} - r_{12}\ddot{r}_{12} \right) \right] \ , \tag{23.4}$$

e

$$\Phi_\infty m_{g1}\vec{a}_{2F} = +\, G m_{g1} m_{g2} \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \left[1 - \frac{\xi}{c^2} \left(\frac{\dot{r}_{12}^2}{2} - r_{12}\ddot{r}_{12} \right) \right] \ . \tag{23.5}$$

Adicionando estas duas equações obtemos a conservação do momento linear total do sistema Sol-planeta em relação às estrelas fixas:

$$m_{g1}\vec{a}_{1F} + m_{g2}\vec{a}_{2F} = \frac{d}{dt}(m_{g1}\vec{v}_{1F} + m_{g2}\vec{v}_{2F}) = \vec{0} \ . \tag{23.6}$$

Ou seja,

$$\vec{v}^{\,g}_{cmF} \equiv m_{g1}\vec{v}_{1F} + m_{g2}\vec{v}_{2F} = \text{constante no tempo} \ . \tag{23.7}$$

O centro de massa gravitacional do sistema Sol-planeta, $\vec{r}^{\,g}_{cmF} \equiv (m_{g1}\vec{r}_{1F} + m_{g2}\vec{r}_{2F})/(m_{g1}+m_{g2})$, desloca-se então com uma velocidade constante em relação às estrelas fixas. Vamos escolher aqui um sistema de referência com origem O coincidindo com o vetor posição do centro de massa gravitacional, tal que $\vec{r}^{\,g}_{cmF} = \vec{0}$ e $\vec{v}^{\,g}_{cmF} = \vec{0}$, figura 23.1.

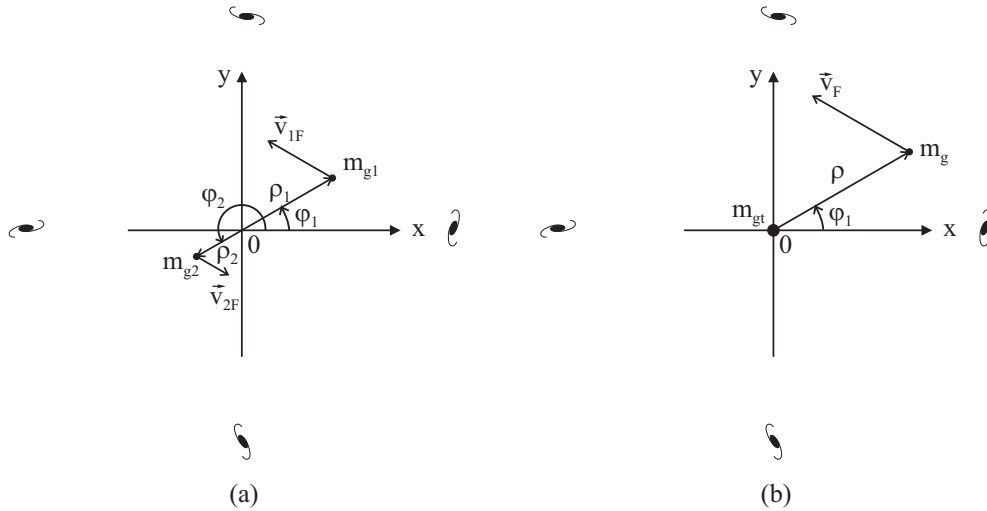



Figura 23.1: (a) Corpos 1 e 2 deslocando-se no plano xy no referencial F. (b) Este sistema é equivalente a uma única partícula de massa reduzida deslocando-se em F.

Com isto obtém-se:

$$\vec{r}_{2F} = -\frac{m_{g1}}{m_{g2}}\vec{r}_{1F} \ , \quad \vec{v}_{2F} = -\frac{m_{g1}}{m_{g2}}\vec{v}_{1F} \ , \quad \vec{a}_{2F} = -\frac{m_{g1}}{m_{g2}}\vec{a}_{1F} \ . \tag{23.8}$$

Como visto na Seção 17.4, vai haver conservação temporal do momento angular total $\vec{L}_t$ do sistema Sol-planeta no referencial F das estrelas fixas, uma vez que a força de Weber entre o Sol e o planeta é central. Além do mais, $\vec{r}_{12} \equiv \vec{r}_{1F} - \vec{r}_{2F}$ e $\vec{v}_{12} \equiv \vec{v}_{1F} - \vec{v}_{2F}$ estão em um mesmo plano cuja normal é paralela ao vetor momento angular total $\vec{L}_t$. Escolhemos então um sistema de coordenadas centrado no centro de massa gravitacional do sistema, de tal forma que o eixo z seja paralelo a $\vec{L}_t$. Neste sistema de referência, o planeta e o Sol vão sempre se mover no plano xy. Vamos utilizar coordenadas polares planas $(\rho,\ \varphi)$ definindo ainda $\vec{\rho} \equiv \vec{\rho}_{1F} - \vec{\rho}_{2F}$, $\rho = |\vec{\rho}| = \rho_1 + \rho_2$, $\vec{v}_F \equiv \vec{v}_{1F} - \vec{v}_{2F}$ e $\vec{a}_F \equiv \vec{a}_{1F} - \vec{a}_{2F}$. Com estas definições e fazendo a equação (23.4) menos a equação (23.5) obtém-se:

$$\vec{a}_F = -\frac{G}{\Phi_\infty} m_{gt} \frac{\hat{\rho}_1}{\rho^2} \left[1 - \frac{\xi}{c^2} \left(\frac{\dot{\rho}^2}{2} - \rho\ddot{\rho} \right) \right] \ , \tag{23.9}$$

onde $m_{gt} \equiv m_{g1} + m_{g2}$ é a massa gravitacional total destes 2 corpos.

Esta fórmula é equivalente à equação de movimento de uma única partícula localizada em $\vec{\rho} = \rho\hat{\rho}_1$, com esta partícula sendo atraída por um corpo de massa gravitacional m_{gt} que fica parado na origem do sistema de coordenadas, figura 23.1 (b).

Em termos das coordenadas polares, a aceleração pode ser escrita como:

$$\vec{a}_F = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}_1^2)\hat{\rho}_1 + (\rho\ddot{\varphi}_1 + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}_1)\hat{\varphi}_1 \ . \tag{23.10}$$

Utilizando a equação (23.10), torna-se possível separar a equação (23.9) em duas equações, uma para a componente tangencial $\hat{\varphi}$ e uma outra para a componente radial $\hat{\rho}$, respectivamente:

$$\rho\ddot{\varphi}_1 + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}_1 = 0 \ , \tag{23.11}$$

e

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}_1^2 = -\frac{G}{\Phi_\infty} m_{gt} \left[\frac{1}{\rho^2} + \frac{\xi}{c^2} \left(\frac{\ddot{\rho}}{\rho} - \frac{\dot{\rho}^2}{2\rho^2} \right) \right] \ . \tag{23.12}$$

A primeira destas equações leva à conservação do momento angular. Isto significa que a grandeza $H \equiv \rho^2\dot{\varphi}_1$ é uma constante no tempo.

Definindo a grandeza u por $u \equiv 1/\rho$ e utilizando um procedimento padrão, a segunda equação pode ser colocada na seguinte forma:

$$\frac{d^2u}{d\varphi_1^2} + u = \frac{G}{\Phi_\infty} m_{gt} \left\{ \frac{1}{H^2} - \frac{\xi}{c^2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{du}{d\varphi_1} \right)^2 + u \frac{d^2u}{d\varphi_1^2} \right] \right\} \ . \tag{23.13}$$

Existe uma solução exata desta equação em termos de funções elípticas.[3] Resolvemos aqui esta equação por um outro processo, iterativamente.[4] Observando que o segundo e terceiro termos dentro das chaves desta equação são muito menores do que o primeiro termo, procuramos uma solução na forma $u(\varphi_1) = u_o(\varphi_1) + u_1(\varphi_1)$, com $|u_o| \gg |u_1|$, onde u_o e u_1 satisfazem às seguintes equações:

$$\frac{d^2u_o}{d\varphi_1^2} + u_o = \frac{G}{\Phi_\infty} \frac{m_{gt}}{H^2} \ , \tag{23.14}$$

e

$$\frac{d^2u_1}{d\varphi_1^2} + u_1 = -\frac{G}{\Phi_\infty} m_{gt} \frac{\xi}{c^2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{du_o}{d\varphi_1} \right)^2 + u_o \frac{d^2u_o}{d\varphi_1^2} \right] \ . \tag{23.15}$$

A solução da primeira equação é o resultado clássico dado por:

$$u_o(\varphi_1) = \frac{G}{\Phi_\infty} \frac{m_{gt}}{H^2} + A\cos(\varphi_1 - \varphi_o) \ , \tag{23.16}$$

onde A e φ_o vêm das condições iniciais. Utilizando esta solução para u_o na equação (23.15), obtém-se que a solução para u_1 resulta em:

$$u_1(\varphi_1) = \left(\frac{G}{\Phi_\infty} \right)^2 \frac{m_{gt}^2 A}{2H^2} \frac{\xi}{c^2} (\varphi_1 - \varphi_o) \operatorname{sen}(\varphi_1 - \varphi_o) + \frac{G}{\Phi_\infty} \frac{m_{gt} A^2}{2} \frac{\xi}{c^2} \operatorname{sen}^2(\varphi_1 - \varphi_o) \ . \tag{23.17}$$

Os pontos de retorno (nos quais a distância do planeta ao Sol são um máximo ou um mínimo) são dados por $du/d\varphi_1 = 0$. Podemos ver destas equações que $\varphi_1 = \varphi_o$ é uma solução. Após uma revolução, o ponto de retorno estará próximo de $\varphi_o + 2\pi$. Expandindo $du/d\varphi_1$ ao redor deste valor e igualando a zero resulta em

$$\varphi_1 \approx \varphi_o + 2\pi + \left(\frac{G}{\Phi_\infty} \right)^2 \frac{\pi m_{gt}^2}{H^2} \frac{\xi}{c^2} \ . \tag{23.18}$$

O avanço do periélio em uma revolução é então dado por:

$$\Delta\varphi_1 = \pi \frac{\xi}{c^2} \left(\frac{G}{\Phi_\infty} \right)^2 \frac{m_{gt}^2}{H^2} = \pi \frac{\xi}{c^2} \frac{G}{\Phi_\infty} \frac{m_{gt}}{a(1-\varepsilon^2)} \ , \tag{23.19}$$

[3] [CA91] e [Ass94].

[4] [Ass89a].

onde a é o semi-eixo maior e ε é a excentricidade da órbita.

Impõe-se agora que:

$$\xi = 6 \ . \tag{23.20}$$

Utilizando as equações (23.20) e (17.29), chegamos em um resultado que é bem observado no caso do sistema solar, a saber:

$$\Delta\varphi_1 = \frac{6\pi G m_{gt}}{c^2 a(1-\varepsilon^2)} \ . \tag{23.21}$$

A expressão algébrica para o avanço do periélio dada pela equação (23.21) concorda com a expressão algébrica obtida pela teoria da relatividade geral de Einstein.

Apesar desta coincidência, a equação de órbita obtida na relatividade geral é dada por:

$$\frac{d^2u}{d\varphi_1^2} + u = G\frac{M}{H^2} + G\frac{3m_{gt}}{c^2}u^2 \ . \tag{23.22}$$

Uma comparação desta equação com a equação (23.13) mostra que elas não são equivalentes no caso geral. Em ordem zero ambas resultam nas elipses, parábolas e hipérboles da teoria newtoniana. Em primeira ordem ambas resultam na mesma precessão do periélio dos planetas. Em segunda ordem elas já diferem uma da outra. Atualmente não podemos distinguir os termos de segunda ordem destas teorias utilizando os dados do sistema solar. Estes termos são muito pequenos e não existe um conhecimento preciso dos dados observacionais que permita uma distinção entre estas duas previsões até termos de segunda ordem.

De qualquer forma, antes de comparar estas duas equações em segunda ordem, seria mais importante revisar os cálculos da precessão do periélio dos planetas utilizando estas duas teorias, mas levando em conta as perturbações das órbitas elípticas que surgem devidas aos outros planetas. Como é bem conhecido, a teoria newtoniana explica a maior parte da precessão do periélio observada dos planetas levando em conta estas perturbações que têm origem devido às influências gravitacionais dos outros planetas. É apenas o valor residual que é explicado pela relatividade geral e pela mecânica relacional com a equação (23.21). Para sermos coerentes, seria mais correto calcular novamente a componente da precessão devida às perturbações dos outros planetas não com a lei da gravitação universal de Newton, mas sim com a relatividade geral e com uma força de Weber gravitacional. Após este cálculo, poderíamos então comparar os valores residuais que sobrarem em ambas as teorias (se é que ainda vão existir estes valores residuais e, mesmo se existirem, talvez não sejam mais os mesmos que os valores obtidos com a lei de Newton), com a equação (23.21).

23.2 Anisotropia da Massa Inercial Efetiva na Gravitação

Discutimos aqui uma consequência importante de qualquer modelo tentando implementar o princípio de Mach. Concentramos nossa análise na lei de Weber gravitacional. Quando comparamos a mecânica relacional com a mecânica newtoniana, fica possível entender diversos aspectos da física clássica que tradicionalmente não tinham explicação. Esta explicação também fornece uma nova interpretação a diversos conceitos introduzidos por Newton. Por exemplo, na mecânica relacional não aparece o conceito de massa inercial, mas apenas o conceito de massa gravitacional. Porém, ao compará-la com a mecânica newtoniana, é possível escrever a equação de movimento com uma forma similar à segunda lei de Newton. Como a segunda lei de Newton contém o conceito de massa inercial, ao comparar estas duas equações torna-se possível falar de uma massa inercial efetiva na mecânica relacional. Na comparação entre estas duas teorias conclui-se também que a força inercial vem de uma interação gravitacional do corpo de prova com as galáxias. Como uma consequência disto, se esta distribuição for anisotrópica, a massa inercial efetiva do corpo de prova também será anisotrópica.

Vamos ilustrar este efeito analisando o problema da órbita de dois corpos no referencial das estrelas fixas. Na mecânica clássica este era um problema de apenas dois corpos, a saber, o Sol e o planeta, já que podemos descrever o movimento deles no espaço absoluto de Newton, que não tem relação com nada material. Na mecânica relacional este é um problema de muitos corpos, a saber, o Sol, o planeta e o conjunto de galáxias distribuído isotropicamente ao redor deles.

Inicialmente apresentamos o problema do ponto de vista da mecânica clássica. Temos um planeta de massa inercial m_{i1} e massa gravitacional m_{g1} interagindo com o Sol de massa inercial m_{i2} e massa gravitacional m_{g2}. Como $m_{i2} \gg m_{i1}$ e $m_{g2} \gg m_{g1}$, podemos considerar o Sol parado em um referencial inercial

enquanto o planeta orbita ao seu redor. Vamos considerar o movimento no plano xy, utilizando coordenadas polares $(\rho,\ \varphi)$ centradas no Sol, tal que $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ e $\tan\varphi = y/x$. A aceleração do planeta neste referencial inercial é dada por:

$$\vec{a}_1 = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\hat{\rho} + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\hat{\varphi} \ . \tag{23.23}$$

A equação de movimento para o planeta neste referencial inercial é dada por:

$$-\frac{Gm_{g1}m_{g2}\hat{\rho}}{\rho^2} = m_{i1}\vec{a}_1 = m_{i1}\left[(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\hat{\rho} + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\hat{\varphi}\right] \ . \tag{23.24}$$

A componente tangencial desta equação na direção de $\hat{\varphi}$ pode ser escrita como:

$$\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi}) = 0 \ . \tag{23.25}$$

Ou seja, a grandeza $H \equiv \rho^2\dot{\varphi}$ é constante no tempo, o que significa que o momento angular do planeta ao redor do Sol é conservado. Esta é outra maneira de expressar a lei das áreas do Kepler.

A componente radial da equação (23.24) na direção de $\hat{\rho}$ pode ser escrita como:

$$-\frac{Gm_{g1}m_{g2}}{\rho^2} = m_{i1}\ddot{\rho} - m_{i1}\rho\dot{\varphi}^2 \ . \tag{23.26}$$

Apresentamos agora o mesmo problema do ponto de vista da mecânica relacional. Na Seção 23.1 obtivemos a equação de movimento para o planeta m_{g1} interagindo com o Sol m_{g2}, além de interagir com as galáxias distantes. O movimento do planeta é descrito pela equação (23.4). Na aproximação em que $m_{g2} \gg m_{g1}$, podemos desprezar o movimento do Sol comparado com o movimento do planeta no referencial das estrelas fixas. Com o movimento no plano xy centrado no Sol temos, em coordenadas cilíndricas: $r_{12} = \rho$, $\dot{r}_{12} = \dot{\rho}$, $\ddot{r}_{12} = \ddot{\rho}$, $\hat{r}_{12} = -\rho\hat{\rho}$, onde ρ é a distância do planeta ao Sol. A componente tangencial $\hat{\varphi}$ da equação (23.4) resulta na conservação do momento angular no referencial das estrelas fixas, equação (23.11) ou equação (23.25). A componente radial da equação (23.4) é dada pela equação (23.12). Multiplicando-a por m_{g1}, utilizando a aproximação $m_{g2} \gg m_{g1}$ e combinando os termos proporcionais a $\ddot{\rho}$, obtém-se:

$$-\frac{G}{\Phi_\infty}\frac{m_{g1}m_{g2}}{\rho^2}\left(1 - \frac{\xi}{2}\frac{\dot{\rho}^2}{c^2}\right) = m_{g1}\left(1 + \frac{Gm_{g2}\xi}{\Phi_\infty\rho c^2}\right)\ddot{\rho} - m_{g1}\rho\dot{\varphi}^2 \ , \tag{23.27}$$

Para comparar as equações (23.26) e (23.27) vamos usar que $\Phi_\infty = 1$, equação (17.29). Além disso, definimos o conceito de uma "massa inercial efetiva tangencial" pela seguinte expressão:

$$m_{i1}^{tan} \equiv m_{g1} \ . \tag{23.28}$$

Definimos ainda o conceito de uma "massa inercial efetiva radial" pela seguinte expressão:

$$m_{i1}^{rad} \equiv m_{g1}\left(1 + \frac{Gm_{g2}\xi}{\rho c^2}\right) \ . \tag{23.29}$$

Com estas definições, a equação (23.27) pode ser escrita da seguinte maneira.

$$-\frac{Gm_{g1}m_{g2}}{\rho^2}\left(1 - \frac{\xi}{2}\frac{\dot{\rho}^2}{c^2}\right) = m_{i1}^{rad}\ddot{\rho} - m_{i1}^{tan}\rho\dot{\varphi}^2 \ . \tag{23.30}$$

Com exceção do termo entre parêntesis do lado esquerdo da equação (23.30), observa-se que ela é análoga à equação (23.26). Mas há uma diferença importante entre estas duas equações. Na mecânica clássica tanto a massa inercial que aparece multiplicando $\ddot{\rho}$ quanto a massa inercial que aparece multiplicando $\rho\dot{\varphi}^2$ são iguais entre si, além de serem iguais à massa gravitacional do planeta, $m_{i1} = m_{g1}$. Por outro lado, na mecânica relacional a massa inercial efetiva na direção tangencial é igual à massa gravitacional do planeta, $m_{i1}^{tan} \equiv m_{g1}$. Já a massa inercial efetiva na direção radial é maior do que este valor, sendo dada por $m_{i1}^{rad} \equiv m_{g1}(1 + Gm_{g2}\xi/\rho c^2)$. Esta diferença ocorre na mecânica relacional, mas não na mecânica clássica. A origem desta diferença está relacionada à força de Weber gravitacional, que tem componentes que dependem da aceleração do corpo de prova. Em particular, devido à interação radial entre o Sol e o planeta, o planeta comporta-se como tendo uma massa inercial efetiva na direção radial que é maior do que sua massa inercial efetiva na direção tangencial. Como visto na Seção 23.1, a precessão do periélio de um planeta surge exatamente desta anisotropia de sua massa inercial efetiva.

Podemos então considerar a precessão do periélio dos planetas como um outro fato importante apoiando (embora não provando) o princípio de Mach. Este efeito também apoia o conceito de uma anisotropia da massa inercial dos corpos. O primeiro a observar isto claramente parece ter sido Erwin Schrödinger.[5] Ele calculou a precessão do periélio dos planetas utilizando uma energia potencial análoga à energia gravitacional de Weber, ao invés de trabalhar com forças. Foi mostrado na Subseção 16.6.2, equação (16.40), que a energia de interação gravitacional entre um planeta e as galáxias distantes é dada, a menos de um termo constante, por $\Phi_\infty m_{g1} v_{1U}^2/2$, onde m_{g1} é a massa gravitacional do planeta e v_{1U} sua velocidade em relação ao referencial universal U. Utilizando coordenadas polares no plano do movimento, usando a aproximação de que a massa do Sol é muito maior do que a massa do planeta ($m_{g2} \gg m_{g1}$) e considerando apenas a componente da velocidade do planeta no referencial F das estrelas fixas, esta expressão pode ser escrita como: $v_{1F}^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2$. De acordo com a lei de Weber, a energia de interação gravitacional entre o planeta e o Sol é dada pela equação (17.36). A lei de conservação da energia na mecânica relacional é dada pela equação (16.61). Com as considerações feitas aqui, a energia total constante para um planeta pode ser escrita como, com $\Phi_\infty = 1$:

$$-G\frac{m_{g1}m_{g2}}{\rho}\left(1 - \frac{\xi}{2}\frac{\dot{\rho}^2}{c^2}\right) + m_{g1}\frac{\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2}{2} = \text{constante no tempo} . \quad (23.31)$$

Utilizando as equações (23.28) e (23.29), a equação (23.31) pode ser escrita como:

$$-G\frac{m_{g1}m_{g2}}{\rho} + \frac{m_{i1}^{rad}}{2}\dot{\rho}^2 + \frac{m_{i1}^{tan}}{2}\rho^2\dot{\varphi}^2 = \text{constante no tempo} . \quad (23.32)$$

Esta é a lei para a conservação de energia da mecânica relacional. Já a lei de conservação de energia da mecânica clássica é dada por:

$$-G\frac{m_{g1}m_{g2}}{\rho} + \frac{m_{i1}}{2}\dot{\rho}^2 + \frac{m_{i1}}{2}\rho^2\dot{\varphi}^2 = \text{constante no tempo} . \quad (23.33)$$

As equações (23.32) e (23.33) são análogas. Mas há uma diferença importante entre elas. De acordo com a equação (23.33), a massa que multiplica $\dot{\rho}^2$ é idêntica à massa que multiplica $\rho^2\dot{\varphi}^2$. Já pela equação (23.32), a massa inercial efetiva radial m_{i1}^{rad} que multiplica $\dot{\rho}^2$ é maior do que a massa inercial efetiva tangencial m_{i1}^{tan} que multiplica $\rho^2\dot{\varphi}^2$, com estas massas definidas pelas equações (23.28) e (23.29). Esta foi a conclusão de Schrödinger ao afirmar:[6]

> A presença do Sol produz, além da atração gravitacional, também o efeito de que a massa inercial "radial" do planeta seja um pouco maior do que a massa inercial "tangencial."

São estas massas inerciais efetivas diferentes nas direções radial e tangencial que geram a precessão do periélio dos planetas na mecânica relacional. A observação da precessão do periélio dos planetas pode então ser considerada como um forte argumento a favor da anisotropia da massa inercial efetiva. Schrödinger continua seu artigo concluindo que a inércia de um corpo deve ser maior no plano galáctico do que perpendicular a ele:[7] "Uma distribuição de massa como a gerada pelas estrelas conhecidas deve fazer com que um corpo tenha uma interação da inércia maior no plano galáctico do que perpendicular a este."

23.3 Massa Inercial Efetiva no Eletromagnetismo

A mecânica relacional é baseada em uma força de Weber aplicada à gravitação. A principal diferença da mecânica relacional em relação à mecânica newtoniana e à teoria da relatividade geral de Einstein está relacionada à força exercida por uma casca esférica parada de raio R e massa gravitacional M_g ao atuar sobre um corpo de massa gravitacional m_g que está no interior da casca. Tanto na teoria de Newton quanto na teoria de Einstein obtém-se que esta força é nula, não importando a posição, velocidade ou aceleração da partícula teste em relação à casca, equações (1.11) e (15.4). Já com uma lei de Weber para a gravitação a força exercida pela casca na partícula deixa de ser nula sempre que a partícula estiver acelerada em relação à casca, equação (16.22).

Também ocorre esta diferença no eletromagnetismo. Vamos supor que temos uma carga teste q interagindo com outros corpos próximos a ela, a saber: com as cargas q_1, ..., q_n, com um ímã e com um circuito C

[5] [Sch25], [XA94] e [Sch95].
[6] [XA94].
[7] [XA94].

no qual flui uma corrente I. Seja $\vec{a}$ a aceleração da carga teste em relação ao referencial universal U, figura 23.2 (a), com esta aceleração sendo devida às interações da carga teste. A carga teste pode ser acelerada por um capacitor, pode descrever uma trajetória curva ao ser defletida por um ímã, pode oscilar ao redor de uma posição de equilíbrio quando as forças sobre ela variam ao longo do tempo, etc.

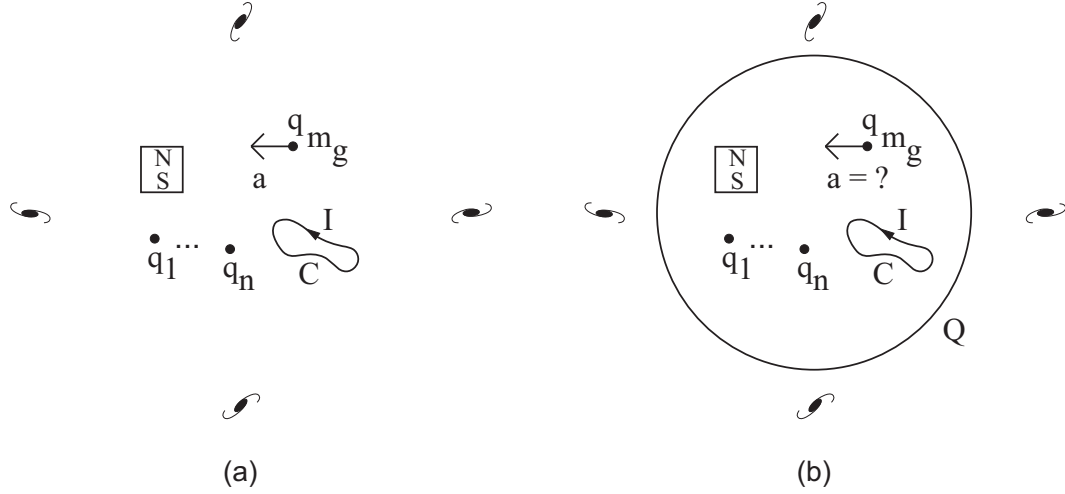



Figura 23.2: (a) Carga teste q deslocando-se com uma aceleração $\vec{a}$ ao interagir com outros corpos. (b) Qual será a nova aceleração da carga teste ao envolver todo o sistema por uma casca esférica uniformemente eletrizada?

Suponha que agora envolvemos todo o sistema por uma casca esférica de raio R uniformemente eletrizada com uma carga Q, figura 23.2 (b). Vamos supor que esta casca esférica seja feita de um material isolante, de tal forma que as cargas sobre ela não sejam afetadas pela posição nem pelo movimento da carga teste no interior da casca. Vamos supor ainda que esta casca esférica permaneça sempre parada em relação a um referencial inercial, tal como o referencial das galáxias distantes. Vai haver alguma alteração na trajetória da carga teste quando ela é envolvida por esta casca esférica? Qual vai ser sua nova aceleração neste caso?

O campo elétrico e o campo magnético são nulos no interior de uma casca esférica de raio R uniformemente eletrizada com uma carga Q. Logo, de acordo com a equação (2.43), também é nula a força sobre uma carga elétrica deslocando-se no interior desta casca, de acordo com o eletromagnetismo clássico. Nenhuma alteração deve ocorrer na trajetória da carga teste, não importando o raio da casca esférica nem o valor da carga Q que está distribuída uniformemente sobre ela. Se ela tinha uma aceleração $\vec{a}$ no caso da figura 23.2 (a), vai continuar com a mesma aceleração no caso da figura 23.2 (b). Se ela tiver uma frequência de vibração ω no caso da figura 23.2 (a), vai continuar com a mesma frequência de oscilação no caso da figura 23.2 (b).

Já a eletrodinâmica de Weber prevê uma situação diferente para este caso.[8] Seja $\vec{a}_{kU}$ a aceleração da carga teste em relação ao referencial universal U devida à sua interação com os corpos locais. Ao envolver o sistema pela casca esférica eletrizada, esta casca passa a exercer uma força sobre a carga teste dada pela equação (7.56). Como a casca está parada, esta força $\vec{F}_{Qq}$ reduz-se à seguinte expressão:

$$\vec{F}_{Qq} = \frac{\mu_o qQ}{12\pi R}\vec{a}_{kU} \ . \tag{23.34}$$

Seja $\sum_{\substack{p=1 \\ p\neq k}}^{N} \vec{F}_{pk}$ a somatória das forças sobre a carga teste q devida aos corpos locais. No cálculo a seguir vamos desprezar a força gravitacional exercida pela massa gravitacional M_g da casca ao atuar sobre a massa gravitacional m_g da partícula em comparação com a força elétrica dada pela equação (23.34). Quando acrescentamos a casca esférica ao redor do sistema, também passa a atuar sobre a carga teste a força dada pela equação (23.34). O princípio de equilíbrio dinâmico dado pela equação (16.64) fica então na forma:

$$\sum_{\substack{p=1 \\ p\neq k}}^{N} \vec{F}_{pk} + \frac{\mu_o qQ}{12\pi R}\vec{a}_{kU} - \Phi_\infty m_{gk}\vec{a}_{kU} = \vec{0} \ . \tag{23.35}$$

Vamos definir uma massa inercial efetiva m_{ik} pela seguinte expressão:

[8][Ass89a], [Ass92a], [Ass93a] e [Ass94, Seção 7.3].

$$m_{ik} \equiv \Phi_\infty m_g - \frac{\mu_o q Q}{12\pi R} . \tag{23.36}$$

Com esta definição obtém-se que a equação (23.35) obtida com a força de Weber entre cargas, juntamente com a mecânica relacional, pode ser colocada na forma da segunda lei de Newton, equação (1.5), a saber:

$$\sum_{\substack{p=1 \\ p\neq k}}^{N} \vec{F}_{pk} = m_{ik}\vec{a}_{kU} . \tag{23.37}$$

Na situação da figura 23.2 (a) a carga teste comporta-se com uma massa inercial efetiva dada por $m_{ik} = \Phi_\infty m_g$. Já na situação da figura 23.2 (b) a carga teste comporta-se com uma massa inercial efetiva dada pela equação (23.36). Quando q e Q tiverem o mesmo sinal, $Qq > 0$, a massa inercial efetiva no caso da figura 23.2 (b) será menor do que a massa inercial efetiva no caso da figura 23.2 (a). Isto vai indicar uma maior aceleração e uma maior frequência de oscilação. Quando q e Q tiverem sinais opostos, $qQ < 0$, a massa inercial efetiva no caso da figura 23.2 (b) será maior do que a massa inercial efetiva no caso da figura 23.2 (a). Isto vai indicar uma menor aceleração e uma menor frequência de oscilação. Estes efeitos não são previstos com a eletrodinâmica de Maxwell-Lorentz.

Algumas experiências começaram a ser realizadas para testar este efeito, mas os resultados ainda são conflituosos.[9]

Como já vimos na Seção 23.2, a massa inercial efetiva de um corpo tem valores diferentes dependendo da direção espacial que se considera, quando existe uma anisotropia na distribuição de massa gravitacional ao redor dele. Isto é observado em interações puramente gravitacionais, como nos movimentos do sistema solar (precessão do periélio dos planetas). Em interações eletromagnéticas este efeito também deve aparecer. A auto-indutância L de um circuito elétrico pode ser interpretada de acordo com a eletrodinâmica de Weber como sendo proporcional à massa inercial efetiva dos elétrons de condução.[10] A anisotropia da massa inercial efetiva explica a anisotropia observada na auto-indutância do circuito quando alteramos o sentido da corrente. Seja por exemplo uma casca esférica de raio r e comprimento ℓ. A auto-indutância para correntes axiais ao longo do eixo do cilindro é diferente da auto-indutância para correntes azimutais que fluem circularmente ao redor do eixo do cilindro.

Além disso, se uma carga teste estiver interagindo com distribuições de carga anisotrópicas fixas ao redor dela, então de acordo com a eletrodinâmica de Weber ela deverá se comportar como se tivesse uma massa inercial efetiva dependendo da geometria do problema, da direção do movimento e da energia potencial eletrostática onde ela está.[11] Acreditamos que a eletrodinâmica de Weber vai ser comprovada por estas experiências. Para realizar a experiência é importante manter as cargas que compõem a distribuição anisotrópica de carga (que está agindo sobre a carga teste) fixas entre si, além de permanecerem fixas em relação ao laboratório, enquanto que a carga teste é acelerada em relação a elas e ao laboratório. Isto é, a experiência não pode ser realizada carregando uma gaiola de Faraday e acelerando cargas em seu interior. O motivo é que nesta última situação há cargas livres na gaiola metálica de Faraday que vão se mover quando a carga teste é acelerada em seu interior, respondendo ao movimento da carga teste. E isto pode mascarar o efeito a ser observado (a possível mudança na massa inercial efetiva da carga teste). Para realizar a experiência é importante carregar um isolante que vá manter as cargas fixas sobre ele, não interessando o movimento da carga teste em seu interior.

Também seria importante testar a existência de uma força elétrica centrífuga que é prevista pela eletrodinâmica de Weber mas não pela eletrodinâmica de Maxwell-Lorentz.[12]

23.4 Partículas com Altas Velocidades no Referencial Universal

Existem algumas indicações experimentais sugerindo que a expressão correta para a energia cinética dos corpos seja dada por $mc^2(1/\sqrt{1-v^2/c^2}-1)$ ao invés de $mv^2/2$. Estas indicações vêm de experiências com elétrons movendo-se a altas velocidades em aceleradores, assim como em colisões de altas energias de partículas carregadas. Seguindo esta sugestão, Schrödinger propôs em seu artigo importante de 1925 (e independentemente dele Wesley em 1990) uma modificação da energia potencial gravitacional de Weber.[13]

---

[9] [Mik99], [Mik01], [Mik03] e [JP04].
[10] [Ass97] e [AH06].
[11] [Ass89b], [AC91], [Ass92b, Seção 5.6], [CA95b], [CA95a], [Ass94, Seção 7.2] e [Ass95b, Seção 5.5].
[12] [Ass92a], [FA03], [Ass94, Seção 7.4: Centrifugal Electrical Force] e [AFC00].
[13] [Sch25], [XA94] e [Sch95], [Wes90] e [Ass94, Seção 7.7].

O que eles propuseram foi uma energia potencial de interação gravitacional entre duas massas gravitacionais m_{g1} e m_{g2} dada por:

$$U_{12} = \beta \frac{m_{g1} m_{g2}}{r_{12}} + \gamma \frac{m_{g1} m_{g2}}{r_{12}} \frac{1}{(1 - \dot{r}_{12}^2/c^2)^{3/2}} \ . \tag{23.38}$$

Schrödinger propôs $\beta = -3G$ e $\gamma = 2G$, enquanto Wesley propôs $\beta = -4G/3$ e $\gamma = G/3$. Quando $\dot{r}_{12} = 0$ obtemos a energia potencial newtoniana. Expandindo esta expressão até segunda ordem em $\dot{r}_{12}/c$ resulta em uma energia potencial para a gravitação análoga à energia de Weber.

A força exercida por 2 em 1 é obtida por $\vec{F}_{21} = -\hat{r}_{12} dU_{12}/dr_{12}$ ou por $dU_{12}/dt = -\vec{v}_{12} \cdot \vec{F}_{21}$. Disto resulta:

$$\vec{F}_{21} = m_{g1} m_{g2} \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \left[\beta + \gamma \left(1 - \frac{\dot{r}_{12}^2}{c^2} - 3 \frac{r_{12} \ddot{r}_{12}}{c^2} \right) \left(1 - \frac{\dot{r}_{12}^2}{c^2} \right)^{-5/2} \right] \ . \tag{23.39}$$

Integramos ambas expressões para um corpo de prova de massa gravitacional m_{g1} interagindo com a distribuição isotrópica de matéria ao redor dele, isto é, com a distribuição isotrópica de galáxias distantes tendo uma densidade de massa gravitacional média ρ_{go}. Fazemos a integração no referencial universal U, isto é, no referencial onde o conjunto das galáxias distantes está essencialmente sem rotação e em repouso, sem aceleração e sem uma velocidade linear de translação para todo o conjunto. A velocidade e aceleração de m_{g1} em relação a este referencial são dadas por, respectivamente: $\vec{v}_{1U}$ e $\vec{a}_{1U}$. O resultado da integração das equações (23.38) e (23.39) com r_{12} indo de 0 até o comprimento de Hubble $R_o \equiv c/H_o$ resulta em:

$$U_i = 2\pi \frac{m_{g1} \rho_{go} c^2}{H_o^2} \left(\beta + \frac{\gamma}{\sqrt{1 - v_{1U}^2/c^2}} \right) \ , \tag{23.40}$$

e

$$\vec{F}_i = -2\pi\gamma \frac{\rho_{go}}{H_o^2} \left[\frac{m_{g1} \vec{a}_{1U}}{\sqrt{1 - v_{1U}^2/c^2}} + \frac{m_{g1} \vec{v}_{1U} (\vec{v}_{1U} \cdot \vec{a}_{1U})}{c^2 (1 - v_{1U}^2/c^2)^{3/2}} \right] = -2\pi\gamma \frac{\rho_{go}}{H_o^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{m_{g1} \vec{v}_{1U}}{\sqrt{1 - v_{1U}^2/c^2}} \right) \ . \tag{23.41}$$

Se quisermos integrar até o infinito sem obter divergências, seria necessário incluir um decaimento exponencial do tipo $e^{-\alpha r_{12}}$ em ambos os termos no lado direito da equação (23.38), assim como foi feito na equação (16.17).

Ao utilizar o princípio de equilíbrio dinâmico, equações (16.3) e (16.4), deduz-se então uma expressão análoga à energia cinética relativística de Einstein, equação (23.40), e uma expressão análoga a sua equação de movimento, equação (23.41). Apesar desta similaridade de forma, há muitas diferenças entre ambas as teorias. A primeira diferença é que os resultados (23.40) e (23.41) foram obtidos após uma interação gravitacional do corpo de prova com as galáxias distantes na mecânica relacional, enquanto que este já não é o caso na teoria da relatividade de Einstein. Como uma consequência disto, as massas que aparecem nas equações (23.40) e (23.41) são massas gravitacionais, enquanto que nas equações de Einstein elas são as massas inerciais no sentido newtoniano, com a inércia relacionada com o espaço e não com a matéria distante. Além disto, as velocidades e acelerações do corpo de prova que aparecem nestas equações obtidas com a mecânica relacional são relativas às galáxias distantes no referencial universal U, enquanto que na teoria de Einstein elas são relativas a um sistema de referência inercial arbitrário.

Vamos considerar dois corpos 1 e 2 interagindo entre si, além de interagirem com as galáxias distantes. O princípio de equilíbrio dinâmico aplicado às equações (23.39) e (23.41) resulta na seguinte equação de movimento para o corpo 1 no referencial universal:

$$m_{g1} m_{g2} \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \left[\beta + \gamma \left(1 - \frac{\dot{r}_{12}^2}{c^2} - 3 \frac{r_{12} \ddot{r}_{12}}{c^2} \right) \left(1 - \frac{\dot{r}_{12}^2}{c^2} \right)^{-5/2} \right] - 2\pi\gamma \frac{\rho_{go}}{H_o^2} \left[\frac{m_{g1} \vec{a}_{1U}}{\sqrt{1 - v_{1U}^2/c^2}} + \frac{m_{g1} \vec{v}_{1U} (\vec{v}_{1U} \cdot \vec{a}_{1U})}{c^2 (1 - v_{1U}^2/c^2)^{3/2}} \right] = \vec{0} \ . \tag{23.42}$$

Vamos que os corpos 1 e 2 estão orbitando ao redor um do outro neste referencial com as seguintes condições: $\dot{r}_{12} = 0$, $\ddot{r}_{12} = 0$ e $v_{1U}^2 \ll c^2$. Neste caso esta equação se reduz a:

$$\frac{(\beta + \gamma) H_o^2}{2\pi\gamma\rho_{go}} m_{g1} m_{g2} \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} = m_{g1} \vec{a}_{1U} \ . \tag{23.43}$$

Isto mostra que podemos obter os resultados da mecânica newtoniana apenas se for exatamente válida a seguinte relação:

$$\frac{(\beta+\gamma)H_o^2}{2\pi\gamma\rho_{go}} = -G \; . \tag{23.44}$$

Utilizando os valores de β e γ dados por Schrödinger e por Wesley, assim como os valores observacionais de H_o, ρ_{go} e G, obtemos que esta relação é aproximadamente válida. Não podemos dizer que ela seja válida exatamente devido a incertezas nos valores observacionais de H_o e ρ_{go}. De qualquer forma vemos mais uma vez que com $\beta/\gamma \approx -1$ obtemos como uma consequência da mecânica relacional que $H_o^2/\rho_{go} \approx G$. Este resultado de que H_o^2/ρ_{go} é dado aproximadamente por G é confirmado pelos valores observacionais destas três grandezas, H_o, ρ_{go} e G. Deve ser enfatizado que estas três grandezas são conceitualmente independentes entre si na física clássica.

23.5 Testes Experimentais da Mecânica Relacional

23.5.1 Variação na Aceleração de Queda Livre ao Cercar o Corpo por uma Casca Esférica

Um primeiro teste experimental que pode ser feito da mecânica relacional foi apontado na Subseção 17.7.1. O teste está ilustrado na figura 23.3.

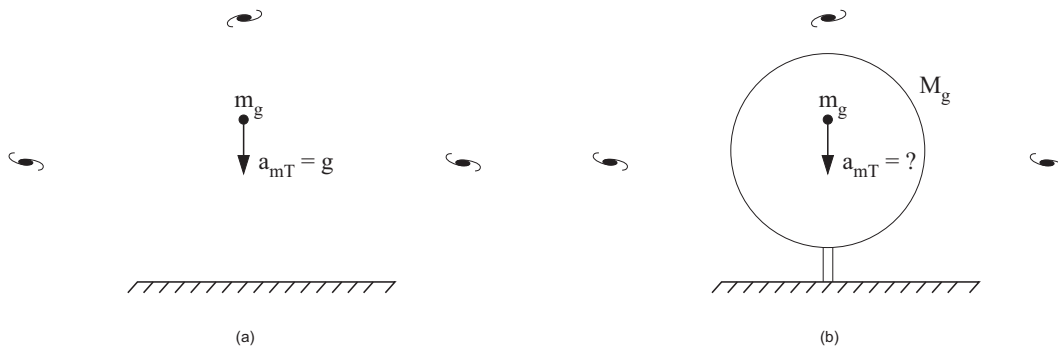



Figura 23.3: (a) Aceleração de queda livre na superfície da Terra. (b) Qual é a aceleração ao cercar o corpo de prova por uma casca esférica parada em relação ao solo?

Vamos supor um corpo de massa gravitacional m_g em queda livre na superfície da Terra (massa gravitacional M_{gT} e raio R_T). Ele desloca-se com uma aceleração $a_{mT} = g = GM_{gT}/R_T^2 = 9,8\ m/s^2$ em relação ao solo, figura 23.3 (a). Suponha que agora cercamos o corpo de prova por uma casca esférica de massa gravitacional M_g e raio R parada em relação ao solo, figura 23.3 (b). Qual será a aceleração de queda livre do corpo m_g neste caso?

Como visto nas Subseções 1.4.1 e 15.3.2, tanto na mecânica newtoniana (N) quanto na teoria da relatividade geral de Einstein (E), a casca esférica parada não exerce força sobre qualquer partícula deslocando-se em seu interior. Logo a aceleração de queda livre na situação da figura 23.3 (b) não muda de acordo com estas duas teorias:

$$a_{mT}^N = a_{mT}^E = \frac{P}{m_i} = \frac{m_g}{m_i}g = g = \frac{GM_{gT}}{R_T^2} = 9,8\frac{m}{s^2} \; . \tag{23.45}$$

Já na mecânica relacional (MR) a aceleração de queda livre na situação da figura 23.3 (b) deve ser menor do que na situação da figura 23.3 (a). A equação de movimento do corpo de prova é dada pelas equações (17.57) e (17.58), nas quais podemos considerar $\vec{a}_{mU} = \vec{a}_{mT}$ já que são válidas as aproximações (17.67) e (20.1). A única força devida a distribuições anisotrópicas de matéria ao redor do corpo de prova é dada pela força gravitacional exercida pela Terra. Na aproximação sendo considerada aqui na qual $\dot{r}^2/c^2 \ll 1$ e $|r\ddot{r}|/c^2 \ll 1$, a força de Weber reduz-se à força gravitacional newtoniana. A equação (17.58) pode então ser escrita da seguinte forma, com $\hat{r}$ sendo o vetor unitário que aponta do centro da Terra para o corpo em queda livre:

$$-\frac{GM_{gT}m_g}{R_T^2}\hat{r} - \Phi_\infty m_g \left(1 + G\frac{\xi}{3c^2}\frac{M_g}{R}\right)\vec{a}_{mT} = \vec{0} \ . \tag{23.46}$$

Isto significa que a aceleração de queda livre de acordo com a mecânica relacional fica dada por, utilizando a equação (17.29):

$$a_{mT}^{MR} = \frac{g}{1 + G\xi M_g/3c^2R} \approx g\left(1 - \frac{G\xi M_g}{3c^2R}\right) \ . \tag{23.47}$$

Ou seja, na linguagem da mecânica clássica é como se a massa inercial efetiva do corpo de prova dada por m_{ik} tivesse aumentado ao envolvê-lo pela casca esférica de massa gravitacional M_g. Quando o corpo de massa gravitacional m_g não está envolvido pela casca esférica, sua massa inercial efetiva seria dada por $m_{ik} = \Phi_\infty m_g$. Após envolvê-lo pela casca esférica, ele passa a se comportar como se tivesse uma massa inercial efetiva dada por:

$$m_{ik} \equiv \Phi_\infty m_{gk}\left(1 + \frac{G\xi M_g}{3c^2R}\right) \ . \tag{23.48}$$

Com uma casca de raio $R = 1\ m$ tendo uma massa gravitacional $M_g = 100\ kg$ vem da equação (23.47) com $\xi = 6$ que a aceleração de queda livre mudaria apenas de uma parte em 10^{25}, o que certamente não é detectável no laboratório. Contudo, esta experiência é conceitualmente importante pois nada disto aconteceria com a mecânica newtoniana nem com as teorias da relatividade de Einstein, já que nenhuma delas prevê qualquer influência exercida por uma casca esférica parada em corpos que estão em seu interior.

Este efeito também poderia ser detectado acelerando o corpo de prova por forças de outra natureza. Poderíamos, por exemplo, medir a aceleração de um elétron em um acelerador de partículas. Em seguida todo o aparato experimental seria envolvido por esta casca esférica neutra de raio R e massa gravitacional M_g. O elétron seria novamente colocado no acelerador de partículas e sua aceleração seria medida. Esta aceleração não deve ser alterada de acordo com as teorias de Newton ou de Einstein. Mas de acordo com a mecânica relacional sua aceleração deve diminuir neste caso, já que sua massa inercial efetiva teria aumentado de acordo com a equação (23.48). Este efeito poderia ser detectado tanto em uma aceleração translacional linear, quanto em uma aceleração centrípeta no caso de órbitas circulares.

23.5.2 Variações das Frequências de Oscilação de Corpos Colocados no Interior de uma Casca Esférica

Na Subseção 23.5.1 consideramos a aceleração de queda livre de um corpo na superfície da Terra em duas situações: (a) Corpo ao ar livre; e (b) corpo cercado por uma casca esférica. Em vez de considerar a aceleração de queda livre, podemos analisar a oscilação de um corpo nesta duas situações.

Vamos considerar aqui a oscilação de um corpo de massa gravitacional m_g preso a uma mola de constante elástica k oscilando horizontalmente ao longo do eixo x, como indicado na figura 23.4 (a). A força vertical exercida pela Terra é contrabalançada pela força normal exercida pela mesa sem atrito.

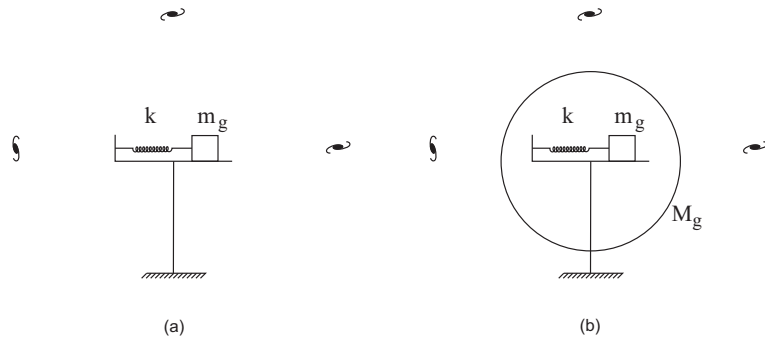



Figura 23.4: (a) Corpo preso a uma mola oscilando horizontalmente. (b) Mesma situação com o corpo e a mola envolvidos por uma casca esférica.

Como visto na Seção 7.1, a frequência de oscilação da mola de acordo com a mecânica newtoniana é dada pela equação (7.4). O mesmo resultado é previsto na teoria da relatividade de Einstein e com a mecânica

relacional. Vamos agora supor que envolvemos o corpo e a mola por uma casca esférica de massa gravitacional M_g parada em relação ao solo, figura 23.4 (b). Qual será a nova frequência de oscilação da mola?

Como visto nas Subseções 1.4.1 e 15.3.2, tanto na mecânica newtoniana (N) quanto na teoria da relatividade geral de Einstein (E), a casca esférica parada não exerce força sobre qualquer partícula deslocando-se em seu interior. Logo a frequência de oscilação da mola na situação da figura 23.4 (b) não muda de acordo com estas duas teorias, sendo igual à frequência de oscilação da situação da figura 23.4 (a), a saber, a equação (7.4) dada por:

$$\omega^N = \omega^E = \sqrt{\frac{k}{m_i}} \ . \tag{23.49}$$

Já a mecânica relacional prevê uma variação da frequência neste caso. A frequência de oscilação no caso da figura 23.4 (a) foi calculada na Seção 21.1, sendo dada pela equação (21.3). Já no caso da figura 23.4 (b), as forças atuando sobre o corpo quando ele está oscilando na horizontal são aquelas exercidas pela mola, $\vec{F}_e = -kx\hat{x}$, pelas galáxias distantes, $\vec{F}_i = -\Phi_\infty m_g \vec{a}_{mU} = -\Phi_\infty m_g \vec{a}_{mT}$, e pela casca esférica. Esta última força é dada pelas equações (16.22) e (17.28), $\vec{F}_{Mm} = -G\xi m_g M_g \vec{a}_{mU}/(3Rc^2) = -G\xi m_g M_g \vec{a}_{mT}/(3Rc^2)$. Colocando $\vec{a}_{mT} = \ddot{x}\hat{x}$ obtém-se a partir do princípio de equilíbrio dinâmico dado pela equação (17.69) que a equação de movimento para este caso fica na seguinte forma:

$$-kx - \frac{G\xi m_g M_g \ddot{x}}{3Rc^2} - \Phi_\infty m_g \ddot{x} = 0 \ . \tag{23.50}$$

Esta equação é análoga à segunda lei de Newton para este problema, equação (7.2), mas com uma massa inercial efetiva m_{ik} dada pela equação (23.48). A frequência de oscilação de acordo com a mecânica relacional (MR), em vez de ser dada pela equação (7.4), passa a ser dada por:

$$\omega^{MR} = \sqrt{\frac{k}{m_{ik}}} = \sqrt{\frac{k}{\Phi_\infty m_g[1 + G\xi M_g/(3c^2R)]}} \ . \tag{23.51}$$

Utilizando a equação (17.29) e que $G\xi M_g/(3c^2R) \ll 1$, obtemos:

$$\omega^{MR} \approx \sqrt{\frac{k}{m_g}} \left(1 - \frac{G\xi M_g}{6c^2R}\right) \ . \tag{23.52}$$

De acordo com a mecânica relacional, a diferença entre as frequências de oscilação dos casos (a) e (b) da figura 23.4 é então dada por:

$$\frac{|\omega_a^{MR} - \omega_b^{MR}|}{\omega_a^{MR}} = \frac{G\xi M_g}{6c^2R} \ . \tag{23.53}$$

Com uma casca de raio $R = 1\ m$ com massa gravitacional $M_g = 100\ kg$ e $\xi = 6$ obtém-se que esta variação é de apenas uma parte em 10^{25}. Embora isto seja desprezível, esta é uma diferença conceitual importante em relação à mecânica newtoniana e também em relação à teoria da relatividade geral de Einstein, já que nestas duas últimas teorias teríamos a mesma frequência de oscilação nos casos (a) e (b) da figura 23.4, ou seja: $\omega_a^N = \omega_b^N = \omega_a^E = \omega_b^E$.

A mesma variação de frequência ocorreria com a mecânica relacional, mas não com as teorias de Newton e Einstein, no caso de um pêndulo oscilando na superfície terrestre ao envolvê-lo por uma casca esférica, figura 23.5.

Várias outras situações de oscilações mecânicas poderiam ser utilizadas para testar estas previsões.

23.5.3 Testando a Anisotropia da Massa Inercial Efetiva

Na Subseção 23.5.1 consideramos a mudança na massa inercial efetiva de uma partícula ao colocar uma casca esférica ao seu redor. Se tivéssemos envolvido o corpo de prova por uma distribuição anisotrópica de matéria (como um cubo ou cilindro ocos), a massa inercial efetiva seria diferente em diferentes direções. O próximo passo após testar a previsão anterior da Subseção 23.5.1 seria então testar esta anisotropia.

Também poderia ser possível testar esta anisotropia na massa inercial efetiva dos corpos de prova levando em conta as anisotropias já existentes na distribuição de matéria no universo. Como visto na Seção 23.1, a precessão do periélio dos planetas pode ser vista deste ponto de vista. Ou seja, a massa inercial efetiva do planeta na direção radial que o liga ao Sol seria diferente da massa inercial efetiva do planeta na direção

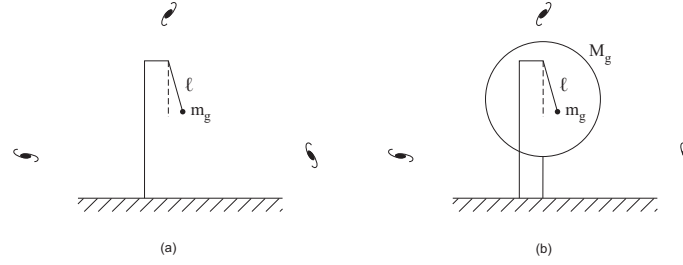



Figura 23.5: (a) Pêndulo oscilando na Terra. (b) Mesma situação com o pêndulo envolvido por uma casca esférica.

tangencial da órbita. Se o corpo de prova está próximo da superfície terrestre, existe a anisotropia devida à localização da Terra. A massa inercial efetiva de um corpo de prova movendo-se verticalmente deve ser diferente da massa inercial efetiva do mesmo corpo de prova movendo-se horizontalmente em relação à superfície terrestre. Pelo mesmo motivo, a massa inercial efetiva de um corpo sendo acelerado na direção da Lua, do Sol, ou do centro de nossa galáxia deve ser diferente do que a massa inercial efetiva do mesmo corpo sendo acelerado em um plano ortogonal a estas acelerações. Este efeito pode ser estimado observando uma força de Weber gravitacional, equação (16.16):

$$\vec{F}_{21} = -Gm_{g1}m_{g2}\frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2}\left[1 - \frac{\xi}{c^2}\left(\frac{\dot{r}_{12}^2}{2} - r_{12}\ddot{r}_{12}\right)\right] . \tag{23.54}$$

Se a massa inercial efetiva do corpo 1 quando está movendo-se em um plano ortogonal à linha reta conectando-o ao corpo 2 é $m_{it} = m_{g1}$, esta equação mostra que sua massa inercial efetiva quando acelerado na direção do corpo 2 será dada pela seguinte ordem de grandeza: $m_{ir} = m_{g1}[1 + \xi Gm_{g2}/r_{12}c^2]$. A mudança percentual é então dada por:

$$\frac{m_{ir} - m_{it}}{m_{it}} \approx \frac{\xi Gm_{g2}}{r_{12}c^2} . \tag{23.55}$$

Vamos supor $\xi = 1$ aqui pois só nos interessam as ordens de grandeza. Com $m_{g2} = 3 \times 10^{41}$ kg = massa de nossa galáxia e $r_{12} = 2,5 \times 10^{20}$ m = distância do sistema solar ao centro de nossa galáxia, obtemos: 9×10^{-7}. Isto é, deve haver uma diferença de uma parte em 10^6 comparando a massa inercial efetiva de um planeta ou de qualquer outro corpo sendo acelerado na direção do centro de nossa galáxia e sendo acelerado normalmente a esta direção. Com $m_{g2} = 2 \times 10^{30}$ kg = massa do Sol e $r_{12} = 1,5 \times 10^{11}$ m = nossa distância ao Sol, obtemos: 3×10^{-8}. E com $m_{g2} = 6,0 \times 10^{24}$ kg = massa da Terra e $r_{12} = 6,4 \times 10^6$ m = raio terrestre, obtemos: 7×10^{-10}. Isto mostra que podemos observar o efeito realizando experiências nas quais o corpo de prova move-se verticalmente ou horizontalmente em relação à superfície da Terra. A precisão da experiência tem de ser da ordem de 10^{-9} para que possam ser detectados efeitos tão pequenos.

Para estimar estes efeitos estamos supondo uma experiência só envolvendo interações gravitacionais. Além disto, estamos desprezando a influência do termo com $\dot{r}_{12}^2/c^2$ que pode mascarar o efeito que está sendo procurado. Análises e cálculos cuidadosos têm de ser feitos em cada caso específico antes de chegar a conclusões gerais.

Em um artigo interessante publicado em 1958, Cocconi e Salpeter previram estas ideias considerando uma implementação geral do princípio de Mach, não necessariamente ligada com a força de Weber.[14] Eles não mencionam a força de Weber nem o trabalho de Schrödinger, mas apenas as ideias de Mach. De qualquer forma a força de Weber se encaixa muito bem no enfoque geral que eles utilizaram. Afinal de contas, eles consideraram a possibilidade de que a contribuição para a inércia de um corpo de prova de massa m resultando de sua interação com uma massa M separada de m por uma distância r tivesse as seguintes propriedades: Ser proporcional a M, cair como r^ν e depender do ângulo θ entre a aceleração do corpo de prova e a linha reta conectando-o a M. A componente da força de Weber que gera a inércia de um corpo tem estas propriedades com $\nu = 1$ já que ela é da forma $-Gm_{g1}M_{g2}\hat{r}_{12}\ddot{r}_{12}/r_{12}c^2$. Motivado por este artigo, muitas experiências foram realizadas ou reanalisadas tentando encontrar esta anisotropia na massa inercial dos corpos.[15] Eles procuraram por anisotropias utilizando o efeito Zeeman em um átomo, o efeito Mössbauer, ressonância magnética nuclear, ... Todas estas experiências deram um resultado nulo.

[14] [CS58].
[15] [CS60], [She60], [Hug60], [Dre61], etc.

Como podemos explicar estes resultados negativos no contexto da mecânica relacional? A primeira resposta foi dada por Dicke ao observar que, de acordo com o princípio de Mach, este efeito tem de existir. Porém, deve também ser observado que esta anisotropia na massa inercial é universal, sendo a mesma para todas as partículas (incluindo os fótons e os píons).[16] Devido a esta universalidade da anisotropia, ela não poderia ser observada localmente. A segunda resposta foi dada por Edwards, que observou que o efeito de tal anisotropia sobre os instrumentos de medida locais têm de ser cuidadosamente considerados antes de concluir que a anisotropia da massa inercial foi descartada por estas experiências.[17] Concordamos com Dicke e com Edwards que temos de ser muito cuidadosos ao analisar os resultados negativos destas experiências sob o prisma do princípio de Mach, antes de chegar a conclusões apressadas. Afinal de contas, como já vimos anteriormente, Schrödinger apontou corretamente que a precessão do periélio dos planetas pode ser considerada como sendo devida à anisotropia da massa inercial efetiva dos planetas. Isto ocorreu em uma situação puramente gravitacional. A conexão da gravitação com o eletromagnetismo é razoável e plausível. É possível que a gravitação e a inércia surjam de termos de quarta e sexta ordem em $\dot{r}/c$ na energia potencial eletromagnética.[18] Se este for o caso, então a anisotropia na massa inercial pode ser a mesma que a anisotropia nas forças eletromagnéticas, de tal forma a eliminar a observação do efeito em experiências complexas como estas. O mesmo pode ser dito das forças nucleares, embora a conexão destas forças nucleares com as forças eletromagnéticas e gravitacionais ainda não seja completamente clara. Deve ser lembrado que de acordo com o modelo planetário de Weber para o átomo, as forças nucleares seriam de origem eletromagnética, como discutido na Subseção 2.8.1. O que deve ser mantido em mente é que ao menos em situações puramente gravitacionais o efeito da anisotropia da massa inercial efetiva foi encontrado, levando à precessão do periélio dos planetas.

Vamos ilustrar esta discussão com um exemplo simples. Supomos uma situação na qual a equação (17.67) é satisfeita, de tal forma que a força exercida pelas galáxias distantes sobre um corpo de prova pode ser escrita como $\vec{F}_i = -\Phi_\infty m_g \vec{a}_{mU} = -\Phi_\infty m_g \vec{a}_{mT}$. Suponhamos agora que sobre uma mesa sem atrito temos um corpo de massa gravitacional m_g oscilando horizontalmente ligado a uma mola de constante elástica k, figura 23.6.

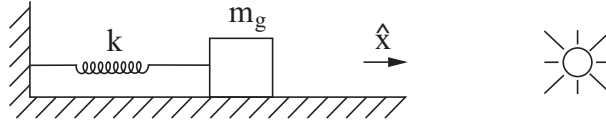



Figura 23.6: Oscilação alinhada com o Sol.

A força exercida pela mola sobre m_g é representada por $-k\vec{r} = -kx\hat{x} = (\ell - \ell_o)\hat{x}$, onde $\vec{r} = x\hat{x}$ é o vetor posição de m_g a partir do ponto de equilíbrio da mola. A força gravitacional exercida pela Terra é contrabalançada pela força normal exercida pela mesa, de tal forma que podemos esquecer estas duas forças. Analisamos aqui a influência do Sol na anisotropia da massa inercial efetiva de m_g. Na situação da figura 23.6 temos o Sol alinhado com a oscilação do corpo de prova ao longo do eixo x. De acordo com a lei de Weber, a força exercida pelo Sol de massa gravitacional M_g sobre m_g é dada pela equação (16.16). Utilizando os valores de $\dot{r}$ e $\ddot{r}$ em termos de $\vec{r}_{12}$, $\vec{v}_{12}$ e $\vec{a}_{12}$, esta força pode ser escrita como:

$$\vec{F}_{Mm} = -GM_g m_g \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \left\{ 1 + \frac{\xi}{c^2} \left[\vec{v}_{12} \cdot \vec{v}_{12} - \frac{3}{2} (\hat{r}_{12} \cdot \vec{v}_{12})^2 + \vec{r}_{12} \cdot \vec{a}_{12} \right] \right\} . \tag{23.56}$$

Para qualquer oscilação da mola ao redor do ponto de equilíbrio podemos considerar $r_{12} \approx R =$ constante, onde R é a distância Terra-Sol. Como a massa gravitacional do Sol é muito maior do que a massa gravitacional m_g do corpo de prova, podemos desprezar o movimento do Sol em relação ao referencial das estrelas fixas, em comparação com o movimento de m_g neste referencial das estrelas fixas. Com estas aproximações pode-se então colocar $\vec{r}_2 = R\hat{x}$, $\vec{v}_2 = \vec{0}$ e $\vec{a}_2 = \vec{0}$. Como o corpo de prova está oscilando ao longo do eixo x podemos escrever: $\vec{r}_1 = x\hat{x}$, $\vec{v}_1 = \dot{x}\hat{x}$, $\vec{a}_1 = \ddot{x}\hat{x}$ e $\vec{r}_{12} \approx -R\hat{x}$. Considerando os termos de velocidade como pequenos, isto é, $(\dot{x}/c)^2 \ll 1$, a equação de movimento para m_g fica na forma:

$$GM_g m_g \frac{\hat{x}}{R^2} \left(1 - \frac{\xi R \ddot{x}}{c^2} \right) - kx\hat{x} - \Phi_\infty m_g \ddot{x}\hat{x} = \vec{0} . \tag{23.57}$$

[16] [Dic61].
[17] [Edw74].
[18] [Ass92c] e [Ass95d].

A força constante $GM_g m_g/R^2$ não muda a frequência angular de oscilação mas apenas altera a posição de equilíbrio da mola, de tal forma que não vamos considerá-la aqui. A equação (23.57) com estas aproximações e com $\Phi_\infty = 1$ fica similar à equação de movimento newtoniana para um oscilador harmônico dada por $kx + m_i\ddot{x} = 0$, desde que se defina uma massa inercial efetiva do corpo de prova na mecânica relacional pela seguinte expressão: $m_i \equiv m_g(1 + \xi GM_g/Rc^2)$. A solução da equação de movimento (23.57) da mecânica relacional é uma oscilação senoidal com uma frequência angular ω_a dada por:

$$\omega_a = \sqrt{\frac{k}{m_g(1 + \xi GM_g/Rc^2)}} \ . \tag{23.58}$$

Vamos considerar agora uma oscilação do corpo de prova ainda ao longo do eixo x, mas com o Sol localizado ao longo do eixo y, ver a figura 23.7.

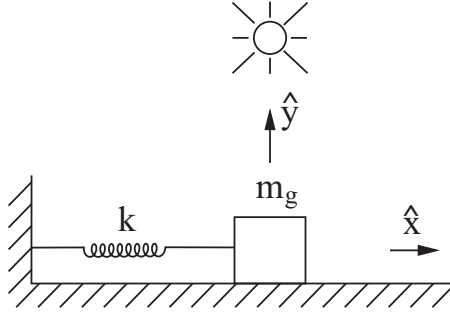



Figura 23.7: Oscilação ortogonal ao Sol.

A diferença da situação anterior é que agora devemos aproximar $\vec{r}_2 = R\hat{y}$, $\vec{r}_{12} = x\hat{x} - R\hat{y} \approx -R\hat{y}$, $\hat{r}_{12} = -\hat{y}$, onde estamos desprezando termos da ordem de x/R comparados com a unidade, ou seja, $x/R \ll 1$. A equação de movimento na direção x com as aproximações anteriores fica sendo $kx + m_g\ddot{x} = 0$. A solução é novamente senoidal com uma frequência angular ω_o dada por:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m_g}} \ . \tag{23.59}$$

Este exemplo mostra que a frequência angular de oscilação quando o corpo de prova está alinhado com o Sol deve ser diferente do caso em que esta oscilação é ortogonal ao Sol.

Alguns comentários críticos devem ser feitos aqui. Este exemplo simples ilustra muito claramente o efeito da componente da força que depende da aceleração do corpo de prova. A consequência é uma anisotropia na massa inercial efetiva, que neste caso seria vista por uma frequência angular de oscilação dependendo da direção de vibração. Mas para chegar a este resultado várias coisas foram simultaneamente consideradas. Em primeiro lugar, a análise deveria ser realizada incluindo os termos de velocidade em $\dot{r}/c$. Neste caso, eles podem ser desprezados observando que na equação (23.56) estamos comparando termos da ordem de $\dot{x}^2$ com outros termos da ordem de $R\ddot{x}$. A solução da equação de movimento é essencialmente $x = A \operatorname{sen} \omega t$, de tal forma que $\dot{x} = A\omega \cos \omega t$ e $\ddot{x} = -A\omega^2 \operatorname{sen} \omega t$. Assim, $\dot{x}^2 \approx A^2\omega^2 \ll R\ddot{x} \approx RA\omega^2$, já que a distância Terra-Sol é muito maior do que a amplitude de oscilação. Apesar deste fato deve sempre ser lembrado que a força de Weber depende não apenas da aceleração entre os corpos mas também de suas velocidades e estes termos podem ser relevantes em algumas experiências. Uma outra hipótese foi feita nesta análise, a saber, a suposição de que a constante elástica k tem sempre o mesmo valor, independente da direção do Sol. A unidade de k é dada por kg/s^2, de tal forma que pode acontecer de seu valor também ser anisotrópico. Isto é, se a massa inercial do corpo de prova for anisotrópica, o mesmo pode acontecer com a constante elástica da mola, já que embutido nesta constante existe algo com a dimensão de massa. O mesmo pode acontecer com as forças eletromagnéticas e nucleares. Se estas anisotropias se equiparam àquelas da massa inercial, o efeito seria mascarado. Apenas experiências podem decidir a questão aqui, mostrando se vão ou não existir anisotropias na frequência angular de oscilação. Mas estas possibilidades devem ser lembradas.

23.5.4 Acelerando uma Casca Esférica ao Redor de um Corpo Preso a uma Mola, de um Corpo Preso a um Fio, ou de um Recipiente com Fluido

Na Seção 20.7, figura 20.21, apresentamos situações hipotéticas ilustrando algumas diferenças entre a mecânica newtoniana e a mecânica relacional caso pudéssemos acelerar rapidamente o conjunto de galáxias em relação ao solo. Nada aconteceria nos corpos sobre a Terra de acordo com a mecânica clássica. Já com a mecânica relacional vários efeitos poderiam ser detectados: compressão ou esticamento de molas, inclinação de pêndulos em relação à vertical, inclinação da superfície livre de fluidos em relação à horizontal etc. Estas são experiências de pensamento, pois não temos controle sobre o movimento das galáxias ao redor da Terra. Mas estas situações sugerem algumas experiências que poderiam ser feitas no laboratório para tentar distinguir estas duas teorias. Estas experiências estão ilustradas na figura 23.8.

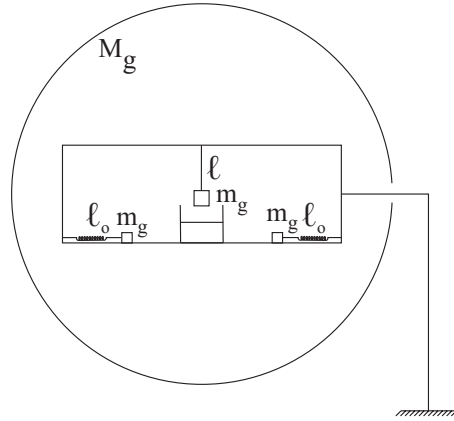



Figura 23.8: Corpos parados em relação ao solo: Molas, corpo dependurado em um fio e um recipiente com fluido. Ao redor destes corpos há uma casca esférica também parada no solo.

Temos vários corpos parados em relação ao solo dentro de um vagão. Existem duas molas horizontais com seus comprimentos relaxados ℓ_o. Uma das extremidades de cada mola está presa ao vagão, enquanto que na outra extremidade há corpos de massa gravitacional m_g. Tem um corpo de massa gravitacional m_g dependurado em um fio ideal inextensível de comprimento ℓ, com o fio ao longo da vertical. Há também um recipiente com fluido, sendo que a superfície livre do fluido está na horizontal. Ao redor do vagão há uma casca esférica de massa gravitacional M_g também parada em relação ao solo.

O que acontece com estes corpos se acelerarmos apenas a casca esférica horizontalmente em relação ao solo? Vamos representar esta aceleração constante por $\vec{A}_{MT} = -A_{MT}\hat{x}$, onde $A_{MT} = |\vec{A}_{MT}|$, sendo $\hat{x}$ o versor apontando horizontalmente da esquerda para a direita.

Na mecânica newtoniana a casca continua fazendo força nula sobre os corpos internos a ela, equação (1.20). Logo nenhuma alteração deve ser observada nos corpos internos ao vagão.

Já a mecânica relacional prevê que a casca de massa M_g vai exercer uma força gravitacional sobre os corpos internos dada pelas equações (16.26) e (17.28). Como inicialmente os corpos estão parados em relação ao solo, $\vec{a}_{mT} = \vec{0}$, a força exercida pela casca sobre uma massa m_g vai apontar no mesmo sentido da aceleração da casca, ou seja, para a esquerda:

$$\vec{F}_{Mm} = \frac{G\xi m_g M_g}{3Rc^2}\vec{A}_{MT} = -\frac{G\xi m_g M_g}{3Rc^2}A_{MT}\hat{x} \ . \tag{23.60}$$

A força para a esquerda exercida pela casca vai comprimir a mola da esquerda, vai esticar a mola da direita, vai desviar para a esquerda o corpo dependurado no fio fazendo com que ele se incline em relação à vertical, além de forçar o fluido no recipiente para a esquerda fazendo com que a superfície livre do fluido se incline em relação à horizontal. Vamos analisar aqui apenas a nova situação de equilíbrio depois que os corpos voltam a ficar em repouso em relação ao solo, $\vec{v}_{mT} = \vec{0}$ e $\vec{a}_{mT} = \vec{0}$, mas na qual a casca esférica ainda mantém sua aceleração constante $\vec{A}_{MT}$ em relação ao solo. Neste caso a mola da esquerda fica comprimida com um comprimento $\ell_<$, a mola da direita fica esticada com um comprimento $\ell_>$, o fio fica inclinado de um ângulo θ em relação à vertical, enquanto que a superfície do fluido fica inclinada de um ângulo θ em relação à horizontal, figura 23.9.

A equação de movimento da mecânica relacional é dada pela equação (17.69) com $\vec{a}_{kT} = \vec{0}$. Além disso, nas forças locais $\sum_{\substack{p=1 \\ p\neq k}}^{N} \vec{F}_{pk}$ deve ser incluída a força exercida pela casca sobre m_g, equação (23.60). No

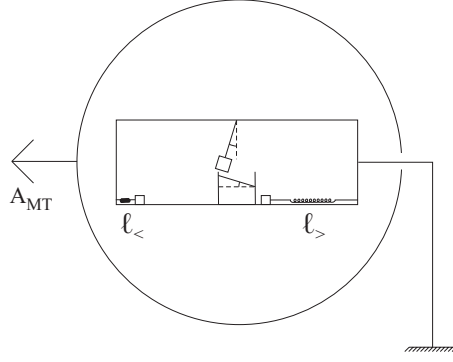



Figura 23.9: Apenas a casca esférica é acelerada para a esquerda em relação ao solo. Efeitos sobre os corpos de acordo com a mecânica relacional.

caso da mola da esquerda de constante elástica k teremos que nesta nova situação de equilíbrio a força exercida pela casca será contrabalançada pela força elástica exercida pela mola comprimida com um novo comprimento $\ell_<$:

$$-k(\ell_< - \ell_o)\hat{x} - \frac{G\xi m_g M_g}{3Rc^2} A_{MT}\hat{x} = \vec{0} \ . \tag{23.61}$$

Uma equação análoga vai valer para a mola da direita que no equilíbrio vai ficar esticada com um comprimento final $\ell_>$. A variação de comprimento para as duas molas será dada por:

$$\frac{\ell_o - \ell_<}{\ell_o} = \frac{\ell_> - \ell_o}{\ell_o} = \frac{G\xi m_g M_g}{3k\ell_o Rc^2} A_{MT} \ . \tag{23.62}$$

Para ter uma ideia da ordem de grandeza deste efeito, supomos $G = 6,67 \times 10^{-11}\ m^3/(kgs^2)$, $\xi = 6$, $m_g = 0,1\ kg$, $M_g = 1\ kg$, $k = 10\ N/m$, $\ell_o = 0,1\ m$, $R = 1\ m$, $c = 3 \times 10^8\ m/s$ e $A_{MT} = 1\ m/s^2$. Com isto obtemos:

$$\frac{\ell_o - \ell_<}{\ell_o} = \frac{\ell_> - \ell_o}{\ell_o} \approx 10^{-28} \ . \tag{23.63}$$

Certamente este efeito é muito pequeno e não pode ser detectado na prática. De qualquer forma, esta previsão é diferente do caso newtoniano, segundo o qual $\ell_> = \ell_< = \ell_o$, já que as molas não devem ficar comprimidas nem esticadas nesta situação.

Vamos agora analisar a situação do corpo de massa gravitacional m_g dependurado no fio inextensível, figura 23.10 (a). As forças atuando sobre ele quando está parado em relação ao solo são a força peso $\vec{P}$, a tensão $\vec{T}$ na corda esticada apontando ao longo de seu comprimento, além da força $\vec{F}_{Mm}$ exercida pela casca acelerada sobre ele, figura 23.10 (b).

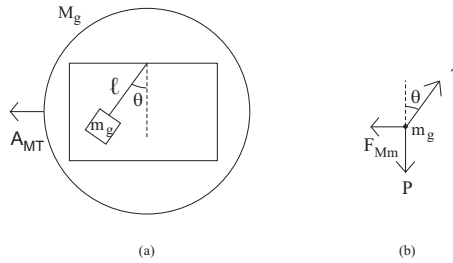



Figura 23.10: (a) Fio inclinado de um ângulo θ em relação à vertical quando uma casca esférica de massa M_g está acelerada ao seu redor. (b) Forças atuando sobre a massa m_g dependurada no fio.

No equilíbrio a soma destas forças é nula:

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_{Mm} = -m_g g\hat{z} + (T \operatorname{sen}\theta\hat{x} + T\cos\theta\hat{z}) - \frac{G\xi m_g M_g}{3Rc^2} A_{MT}\hat{x} = \vec{0} \ . \tag{23.64}$$

Resolvendo separadamente as componentes desta equação obtém-se que a tensão no fio é dada por:

$$T = |\vec{T}| = m_g \sqrt{\left(\frac{G\xi M_g}{3Rc^2}\right)^2 A_{MT}^2 + g^2} \ . \tag{23.65}$$

Já a tangente do ângulo de inclinação do fio é dada por:

$$\tan\theta = \frac{G\xi M_g}{3Rc^2}\frac{A_{MT}}{g} \ . \tag{23.66}$$

Com os valores anteriores para M_g, R e A_{MT} é possível estimar o valor desta tangente, a saber, $\tan\theta \approx 10^{-28}$. Novamente temos um efeito muito pequeno.

Fazendo as contas assim como foi feito na Subseção 6.7.1 obtém-se que a tangente do ângulo de inclinação da superfície livre do fluido em relação à horizontal também é dada pela equação (23.66), com uma ordem de grandeza típica da ordem de $\tan\theta \approx 10^{-28}$.

Como estes efeitos tão pequenos não podem ser detectados na prática, não será possível decidir com eles se é a mecânica newtoniana ou a mecânica relacional que estará em desacordo com os dados experimentais. De qualquer forma, estas são experiências possíveis de serem realizadas no laboratório, ao contrário do que ocorria com as situações hipotéticas nas quais teríamos controle sobre a aceleração do conjunto de galáxias em relação ao solo.

23.5.5 Decaimento Exponencial na Gravitação

Uma outra coisa extremamente importante a ser testada diretamente é a existência ou não de um decaimento exponencial na gravitação. Este decaimento exponencial não está ligado diretamente com a mecânica relacional ou com o princípio de Mach, já que é possível trabalhar com a mecânica relacional sem este decaimento exponencial e ainda assim implementar matematicamente o princípio de Mach. Porém, como visto no Capítulo 11, se tivermos um decaimento exponencial na energia potencial newtoniana, é razoável suspeitar que um termo análogo deve existir multiplicando ambos os termos da energia potencial de Weber, como na equação (16.17). Experiências para testar o decaimento exponencial do potencial de Neumann, equação (11.6), foram realizadas desde o século passado, com algumas delas dando resultados positivos.[19] Sugerimos especialmente a repetição das várias experiências de Q. Majorana sobre este assunto.[20]

23.5.6 Achatamento de um Corpo Elástico Parado no Interior de uma Casca Esférica Girando ao Seu Redor

Um outro teste experimental que pode ser feito está ilustrado na figura 23.11.

Temos dois globos iguais de massas gravitacionais m_g ligados por uma mola de constante elástica k e comprimento relaxado ℓ_o. Os corpos estão parados sobre uma mesa sem atrito, que está parada em relação ao solo, figura 23.11 (a). Coloca-se uma casca esférica de raio R e massa gravitacional M_g ao redor da mesa. Gira-se apenas a casca esférica ao redor de um eixo z vertical passando pelo ponto central da mola, com uma velocidade angular constante $\vec{\Omega}_{MT} = \Omega\hat{z}$, tal que $\Omega = |\vec{\Omega}_{MT}|$, figura 23.11 (b). Esta velocidade angular é considerada em relação ao solo. Vamos desprezar aqui os efeitos das possíveis correntes de ar produzidas por esta rotação. Espera-se que os globos fiquem em uma situação de equilíbrio, continuando em repouso em relação ao solo. Qual será a distância ℓ entre os globos na situação da figura 23.11 (b)?

De acordo com a mecânica newtoniana a casca girando não exercerá forças em seu interior, equação (1.21). Logo a distância entre os globos na situação da figura 23.11 (b) deve continuar sendo ℓ_o de acordo com a mecânica clássica:

$$\ell = \ell_o \ . \tag{23.67}$$

Já a mecânica relacional prevê que a força exercida pela casca sobre qualquer um dos globos neste caso será dada pelas equações (16.30) e (17.28). A força elástica atuando sobre o globo da direita, no caso em que a mola tem um comprimento esticado ℓ, é dada por $\vec{F}_e = -k(\ell - \ell_o)\hat{x}$, onde $\hat{x}$ aponta do globo esquerdo para o globo direito. A equação de movimento da mecânica relacional é dada pela equação (17.69). No caso do corpo da direita ficamos então com:

---

[19] [Mar86] e [Ass92f].

[20] [Maj20], [Maj30], [Maj88a] e [Maj88b].

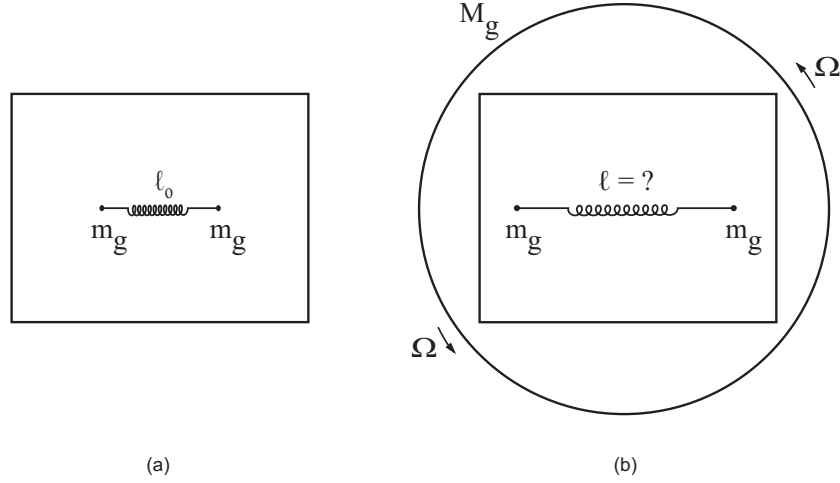



Figura 23.11: (a) Dois globos parados sobre a mesa sem atrito, ligados por uma mola de comprimento ℓ_o quando relaxada. O quadrado representa a mesa, que está parada em relação ao solo. (b) Qual será a distância ℓ entre os globos ao colocar uma casca esférica girando ao redor deles?

$$\sum_{\substack{p=1 \\ p\neq k}}^{N} \vec{F}_{pk} - \Phi_\infty m_{gk}\vec{a}_{kT}$$

$$= -k(\ell-\ell_o)\hat{x} - \frac{\xi}{3c^2}\frac{Gm_{gk}M_g}{R}\left[\vec{a}_{kT} + \vec{\Omega}_{MT}\times(\vec{\Omega}_{MT}\times\vec{r}_{kT}) + 2\vec{v}_{kT}\times\vec{\Omega}_{MT} + \vec{r}_{kT}\times\frac{d\vec{\Omega}_{MT}}{dt}\right] - \Phi_\infty m_{gk}\vec{a}_{kT} = \vec{0}\ . \tag{23.68}$$

A casca girando exerce uma força centrífuga $\vec{F}_c$ sobre o globo da direita preso à mola dada pelo segundo termo dentro dos colchetes desta equação, a saber:

$$\vec{F}_c \equiv -\frac{\xi}{3c^2}\frac{Gm_{gk}M_g}{R}\vec{\Omega}_{MT}\times(\vec{\Omega}_{MT}\times\vec{r}_{kT}) = -\frac{\xi}{3c^2}\frac{Gm_{gk}M_g}{R}\Omega\hat{z}\times(\Omega_{MT}\hat{z}\times r_{kT}\hat{x}) = \frac{\xi}{3c^2}\frac{Gm_{gk}M_g}{R}\Omega^2 r_{kT}\hat{x}\ , \tag{23.69}$$

onde $r_{kT} = \ell/2$ é a distância deste globo até o ponto central da mola.

Esta força centrífuga atuando sobre os dois globos faz com que eles se afastem, aumentando a distância entre eles. A mola começa a esticar e a exercer uma força elástica sobre os corpos que se contrapõe a esta força centrífuga. Vamos considerar aqui apenas a nova situação de equilíbrio na qual eles ficam novamente em repouso em relação ao solo, com esta força centrífuga sendo contrabalançada pela força elástica exercida pela mola esticada, figura 23.12 (a). A força centrífuga atuando em cada corpo é transmitida à mola, fazendo com que ela fique esticada, figura 23.12 (b).

Nesta nova situação de equilíbrio temos $\vec{v}_{kT} = \vec{0}$, $\vec{a}_{kT} = \vec{0}$ e $d\vec{\Omega}_{MT}/dt = \vec{0}$.

A equação (23.68) fica então na seguinte forma:

$$-k(\ell-\ell_o) + \frac{\xi}{3c^2}\frac{Gm_{gk}M_g}{R}\Omega^2\frac{\ell}{2} = 0\ . \tag{23.70}$$

Utilizando a equação (23.20) obtém-se a variação percentual do comprimento da mola de acordo com a mecânica relacional como sendo dada por:

$$\frac{\ell-\ell_o}{\ell} = \frac{Gm_{gk}M_g\Omega^2}{Rc^2k}\ . \tag{23.71}$$

Para ter uma ideia da ordem de grandeza deste efeito, vamos supor uma casca esférica de raio $R = 1\ m$, massa $M_g = 1\ kg$, girando com uma velocidade angular $\Omega = 1\ rad/s$, com o corpo de massa $m_{gk} = 0,1\ kg$ preso a uma mola de constante elástica $k = 10\ N/m$. Neste caso a equação (23.71) fornece, com $G = 6,67\times10^{-11}\ m^3/(kgs^2)$:

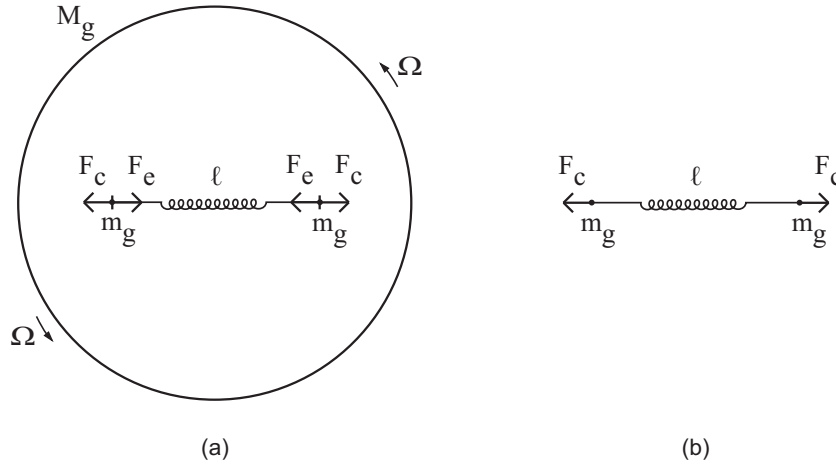



Figura 23.12: (a) Forças atuando sobre cada corpo m_g parado em relação ao solo, a saber, a força centrífuga F_c exercida pela casca com massa M_g girando ao redor dos corpos e a força elástica F_e exercida pela mola esticada com um comprimento ℓ. (b) Forças atuando sobre as extremidades da mola esticada exercidas pelos corpos m_g.

$$\frac{\ell - \ell_o}{\ell} \approx 10^{-29} \ . \tag{23.72}$$

Obviamente um efeito tão pequeno não pode ser detectado na prática. Mas este efeito é conceitualmente importante, já que nada disto ocorreria com a mecânica clássica, como indicado pela equação (23.67).

Uma outra situação na qual a mecânica relacional prevê um resultado diferente da mecânica clássica que poderia ser testado experimentalmente está relacionada ao achatamento da Terra. Como visto na Subseção 22.4.4, se fosse possível girar rapidamente o conjunto de galáxias ao redor do eixo terrestre, poderíamos controlar o achatamento da Terra. Embora não seja possível controlar a velocidade angular de rotação das galáxias ao redor da Terra, é possível manter uma esfera elástica parada no interior de uma casca esférica rígida. Ao girar em relação ao solo apenas a casca rígida ao redor de um eixo que passa pelo centro da esfera elástica, torna-se possível observar então se ocorre ou não algum achatamento na esfera elástica.

Esta situação está ilustrada na figura 23.13 (a). Temos uma gota de um fluido parada em relação ao referencial universal U das galáxias distantes. A gota tem um raio r, sendo seu formato esférico devido à tensão superficial. Em vez da gota poderíamos ter também uma esfera ou bexiga elástica. A gota está cercada por uma casca esférica metálica rígida, de raio $R > r$, concêntrica à gota e também parada no referencial U.

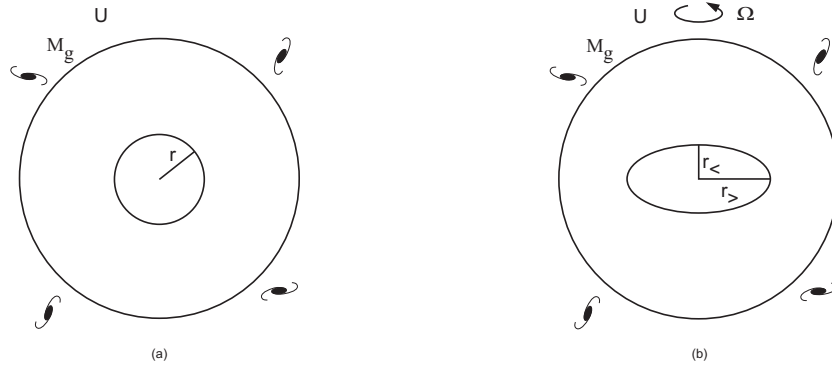



Figura 23.13: (a) Gota de fluido com raio r cercada por uma casca rígida, com ambas paradas no referencial U. (b) Novo formato da gota de acordo com a mecânica relacional quando apenas a casca gira em relação ao referencial U com uma velocidade angular constante.

Gira-se apenas a casca metálica em relação às galáxias com uma velocidade angular constante $\vec{\Omega}_{MU} = \Omega\hat{z}$, sendo que o eixo z é um eixo qualquer passando pelo centro da gota. Vamos supor que a casca metálica seja

rígida o suficiente para manter seu formato esférico apesar de sua rotação em relação às galáxias. Qual será o novo formato da gota, depois que ela atingir uma nova configuração de equilíbrio, permanecendo parada em relação ao referencial U?

Na mecânica clássica a casca girando não exerce forças sobre a gota interna à casca, pela equação (1.21). Logo a gota deve continuar com seu formato esférico: $R_> = R_< = R$.

Já a mecânica relacional prevê que a casca girando vai exercer uma força sobre qualquer elemento de massa gravitacional da gota dada pelas equações (16.30) e (17.28). Na nova configuração de equilíbrio na qual a gota continua parada no referencial U, a casca girando ao redor da gota ainda vai exercer uma força centrífuga sobre cada elemento de massa m_{gk} da gota localizado em um vetor posição $\vec{r}_{kU}$ que não está ao longo do eixo de rotação. Esta força centrífuga $\vec{F}_c$ é dada por

$$\vec{F}_c \equiv -\frac{\xi}{3c^2}\frac{Gm_{gk}M_g}{R}\vec{\Omega}_{MU} \times (\vec{\Omega}_{MU} \times \vec{r}_{kU}) = \frac{\xi}{3c^2}\frac{Gm_{gk}M_g}{R}\Omega_{MU}^2 \rho_k \hat{\rho}_k \ , \tag{23.73}$$

onde $\vec{r}_{kU} = x_k\hat{x} + y_k\hat{y} + z_k\hat{z} = \vec{\rho}_k + z_k\hat{z} = \rho_k\hat{\rho}_k + z_k\hat{z}$, sendo $\rho_k = \sqrt{x_k^2 + y_k^2}$ a distância de m_{gk} ao eixo de rotação, enquanto que $\hat{\rho}_k$ é o vetor unitário paralelo ao eixo xy e apontando do eixo z até m_{gk}.

Esta força vai deformar a gota, deixando-a com um formato elipsoidal de raio maior $R_>$ no plano perpendicular ao eixo de rotação e de raio menor $R_<$ ao longo do eixo de rotação, como indicado na figura 23.13 (b). No equilíbrio a força centrífuga exercida pela casca é contrabalançada pelas forças elásticas internas à gota ou à bexiga elástica.

Embora haja esta diferença nas previsões, a dificuldade em testar este efeito está nas ordens de grandeza. No caso da mecânica relacional o achatamento da gota pode ser estimado pela grandeza $(R_> - R_<)/R_>$, que seria dado por uma expressão análoga à equação (23.71). Ao colocar valores macroscópicos para o raio e massa gravitacional da casca esférica chegaríamos em um achatamento ínfimo, como aquele indicado na equação (23.72). Isto indica que não seria viável realizar uma experiência como esta, já que não seria possível medir algo tão pequeno. A importância desta situação é conceitual.

23.5.7 Balde e Água Parados no Solo, enquanto uma Casca Esférica Gira ao Redor do Eixo do Balde

Na experiência do balde de Newton a superfície da água fica plana quando a água e o balde estão parados em relação ao solo. Quando a água e o balde estão girando juntos ao redor do eixo do balde, em relação ao solo, a superfície da água assume um formato parabólico. Vamos supor que quando a água estiver dando uma volta por segundo em relação ao solo, a parte mais alta da água chega até a borda do balde, quase entornando.

Nas Subseções 8.4.5 e 22.3.4 analisamos uma situação hipotética que ilustra uma distinção conceitual entre a mecânica newtoniana e a mecânica relacional. Novamente temos o balde e a água parados em relação ao solo. Se fosse possível girar rapidamente apenas o conjunto de galáxias em relação ao solo, ao redor do eixo do balde, tal que dessem uma volta por segundo, qual seria o formato da água? De acordo com a mecânica newtoniana a água continuaria plana. Já de acordo com a mecânica relacional ela ficaria parabólica. Além disso, como a rotação relativa entre a água e as galáxias é a mesma nesta situação hipotética do que a rotação relativa entre elas na experiência original de Newton, o efeito teria de ser o mesmo. Ou seja, a água deveria subir até a borda do balde, quase entornando.

Esta é uma experiência de pensamento que não pode ser realizada na prática, já que não temos controle sobre a rotação das galáxias ao redor da Terra. Mas a partir desta situação hipotética podemos bolar uma experiência possível de ser realizada no laboratório. Ela está ilustrada na figura 23.14. Um balde com água está parado em relação ao solo. Ao redor do balde tem uma casca esférica de massa gravitacional M_g também parada em relação ao solo. A superfície da água é plana, figura 23.14 (a).

Gira-se apenas a casca esférica em relação ao solo, ao redor do eixo z do balde, com uma velocidade angular constante $\vec{\Omega}_{MT} = \Omega_{MT}\hat{z}$. Desprezam-se os efeitos das possíveis correntes de ar que possam existir dentro da casca (se quiser, pode-se tampar o balde com um vidro para evitar estes efeitos). Qual será o formato da superfície da água?

De acordo com a mecânica clássica, a casca esférica girando não exerce força sobre as moléculas da água, equação (1.21), tal que a superfície da água deve continuar plana.

Já na mecânica relacional obtém-se que a casca girando vai exercer uma força centrífuga $d\vec{F}_c$ ao atuar sobre um elemento de massa gravitacional dm_g da água dada pela equação (23.73). Além desta força, atuam sobre cada elemento da água de massa dm_g a força peso $d\vec{P}$ exercida pela Terra e a força de empuxo $d\vec{E}$ devida ao gradiente de pressão p exercida pelo restante do fluido sobre a água de volume dV, figura 23.15

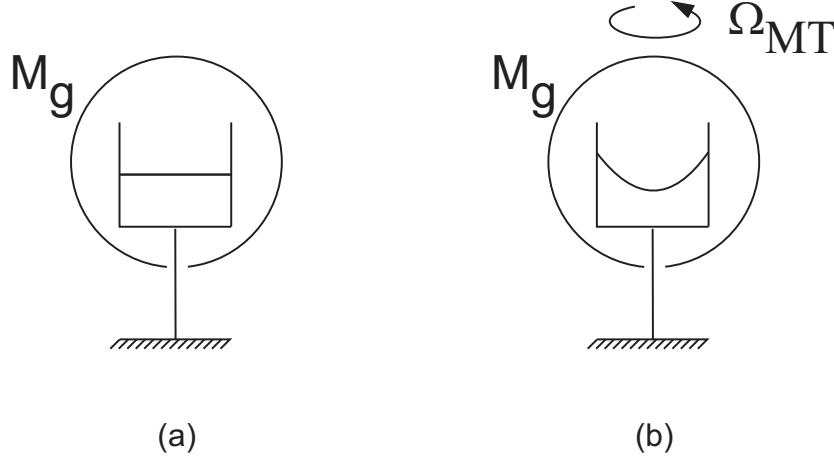



Figura 23.14: (a) Balde, água e casca esférica de massa gravitacional M_g parados em relação ao solo, com a superfície plana da água. (b) Gira-se apenas a casca esférica ao redor do eixo do balde com uma velocidade angular constante $\vec{\Omega}_{MT}$ em relação ao solo.

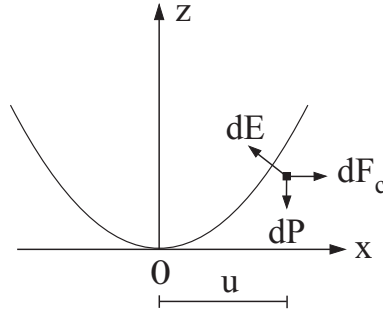



Figura 23.15: Forças atuando sobre um elemento dm_g do fluido: Força peso dP exercida pela Terra, força de empuxo dE exercida pelo restante do fluido, além da força centrífuga dF_c exercida pela casca esférica de massa gravitacional M_g girando ao redor do eixo do balde.

Vamos considerar a nova situação de equilíbrio representada pela figura 23.14 (b) na qual a água está em repouso em relação ao solo, $\vec{v}_{kT} = \vec{0}$ e $\vec{a}_{kT} = \vec{0}$, enquanto que a casca esférica está girando ao seu redor. A equação de equilíbrio dinâmico é dada pelas equações (16.3) ou (17.69) com $\vec{a}_{kU} = \vec{a}_{kT} = \vec{0}$:

$$\sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^{N} \vec{F}_{pk} - \Phi_\infty m_{gk} \vec{a}_{kT} = d\vec{P} + d\vec{E} + d\vec{F}_c - \Phi_\infty m_{gk} \vec{0} = d\vec{P} + d\vec{E} + d\vec{F}_c = \vec{0} \ . \tag{23.74}$$

Utilizando na equação (23.74) que $d\vec{P} = dm_g \vec{g} = -dm_g g \hat{z}$, $d\vec{E} = -(\nabla p) dV$ e a força centrífuga $d\vec{F}_c$ dada pela equação (23.73), obtém-se:

$$-dm_g g \hat{z} - \left(\frac{\partial p}{\partial u} \hat{u} + \frac{1}{u} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \hat{\varphi} + \frac{\partial p}{\partial z} \hat{z} \right) dV + \frac{\xi}{3c^2} \frac{G dm_g M_g}{R} \Omega_{MT}^2 u \hat{u} = \vec{0} \ . \tag{23.75}$$

Para chegar neste resultado utilizamos coordenadas cilíndricas $(u, \ \varphi, \ z) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \ \arctan(y/x), \ z)$, com u sendo a distância do elemento de massa gravitacional dm_g até o eixo de rotação da casca esférica. Após resolver esta equação como foi feito na Subseção 8.4.1 obtém-se que a pressão no interior do fluido fica dada por:

$$p(u, \ \varphi, \ z) = \frac{\xi}{3c^2} \frac{G M_g}{R} \frac{\rho_g \Omega_{MT}^2}{2} u^2 - \rho_g g z + p_o \ , \tag{23.76}$$

onde p_o é a pressão atmosférica e $\rho_g = dm_g / dV$ é a densidade de massa gravitacional do fluido. Colocando nesta equação que a pressão na superfície do fluido é a pressão atmosférica, $p = p_o$, obtém-se a equação $z(u)$ descrita pela superfície livre, a saber:

$$z = \frac{\xi}{3c^2}\frac{GM_g}{R}\frac{\Omega_{MT}^2}{2g}u^2 \ . \tag{23.77}$$

Ou seja, temos mais uma vez uma superfície parabólica na qual o ponto mais baixo é dado por $(u,\ z) = (0,\ 0)$. Se o balde tem um raio $u = r$, a razão z/r da altura da água em seu ponto mais alto para o raio do balde é dada por:

$$\frac{z}{r} = \frac{\xi}{6}\frac{GM_g}{c^2}\frac{\Omega_{MT}^2}{g}\frac{r}{R} \ . \tag{23.78}$$

Para ter uma ideia de quanto a água subiria em uma experiência real, colocamos $\xi = 6$, $c = 3 \times 10^8\ m/s$, $G = 6,67 \times 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$, $M_g = 1\ kg$, $R = 1\ m$, $\Omega_{MT} = 1\ rad/s$, $g = 9,8\ m/s^2$ e $r = 0,1\ m$. Com isto obtém-se:

$$\frac{z}{r} \approx 10^{-29} \ . \tag{23.79}$$

Ou seja, temos um resultado tão pequeno quanto aquele dado pela equação (23.72). Embora não se possa medir algo tão pequeno em nenhuma experiência realizada hoje em dia, este exemplo é muito importante conceitualmente. Ele mostra não apenas uma grande diferença conceitual entre a mecânica newtoniana e a mecânica relacional, mas também indica o caminho para experiências futuras que algum dia possam distinguir estes modelos no laboratório.

Muitos outros testes vão aparecer ao longo do tempo à medida em que mais pessoas comecem a trabalhar com estas linhas de pesquisa.

Capítulo 24

História da Mecânica Relacional

Agora que já apresentamos a mecânica relacional e os principais resultados obtidos com ela, mostramos em perspectiva os principais passos levando à sua descoberta.

Como discutido nos Capítulos 12 e 13, Leibniz, Berkeley e Mach visualizaram claramente os principais aspectos qualitativos de uma mecânica relacional. Mas nenhum deles a implementou quantitativamente. Apresentamos aqui uma breve história da implementação matemática da mecânica relacional.[1]

24.1 Gravitação

Embora Newton tenha tido as primeiras percepções sobre a gravitação em seus *Anni Mirabilis* de 1666-1667, a formulação clara e completa da gravitação universal parece só ter surgido em 1685, após uma correspondência com Hooke em 1679-1680.[2] Sua força da gravitação apareceu publicada pela primeira vez apenas em seu livro *Principia* de 1687. Hoje em dia a escrevemos na forma

$$\vec{F}_{21} = -Gm_{g1}m_{g2}\frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \ . \tag{24.1}$$

Hooke e outros tinham a ideia de uma força gravitacional variando com o inverso do quadrado da distância entre o Sol e os planetas. Mas é incrível como Newton chegou na universalidade desta força e que ela deve ser proporcional ao produto das massas. Para chegar a este último resultado foi essencial sua terceira lei do movimento, a lei da ação e reação. Vimos isto nas Seções 1.2 e 1.3 ao apresentar algumas citações de Newton.

Newton defendia as ideias de espaço e tempo absolutos. Apesar deste fato, sua força gravitacional é a primeira expressão relacional que surgiu na ciência descrevendo as interações entre corpos materiais. Ela depende apenas da distância entre os corpos interagentes e está direcionada ao longo da reta que os une.

A introdução da função potencial escalar na gravitação é devida a Lagrange (1736-1813) em 1777 e a Laplace (1749-1827) em 1782. A energia potencial gravitacional pode ser expressa como:

$$U_{12} = -G\frac{m_{g1}m_{g2}}{r_{12}} \ . \tag{24.2}$$

Mais uma vez esta expressão é completamente relacional. Para obter a força exercida por 2 sobre 1 utilizamos o procedimento: $\vec{F}_{21} = -\nabla_1 U_{12}$. O paradoxo gravitacional que aparece com a lei de Newton em um universo infinito foi descoberta por H. Seeliger e C. Neumann em 1895-1896. A solução que eles apresentaram foi introduzir um decaimento exponencial na força gravitacional e/ou no potencial gravitacional devido a cada ponto material.

24.2 Eletromagnetismo

Coulomb apresentou a força entre duas cargas pontuais em 1785.[3] A força eletrostática pode ser expressa como:

[1] [Ass94, Seções 7.5 a 7.7].

[2] [Coh80, Capítulo 5] e [Coh81].

[3] Há uma tradução parcial para a língua inglesa de seus trabalhos em [Cou35a] e [Cou35b].

$$\vec{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_o} \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \ . \tag{24.3}$$

Ele também chegou em uma expressão relacionando a força entre dois polos magnéticos q_1^m e q_2^m dada por:

$$\vec{F}_{21} = \frac{\mu_o}{4\pi} q_1^m q_2^m \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \ . \tag{24.4}$$

Estas duas expressões são completamente relacionais, já que têm a mesma estrutura que a força de Newton gravitacional. Ou seja, elas dependem da distância r_{12} entre os corpos e apontam ao longo da reta que os une, $\hat{r}_{12}$.

Parece que Coulomb chegou na força entre as cargas pontuais mais por analogia com a lei da gravitação de Newton do que por suas medidas duvidosas com a balança de torsão.[4] Ele realizou apenas três medidas de atração e três de repulsão, mas seus resultados não puderam ser reproduzidos quando suas experiências foram repetidas recentemente. Além disto, ele nunca testou a proporcionalidade da força em $q_1 q_2$. Em suas experiências ele alterava a distância entre os corpos, mas não a quantidade de carga em cada um. Aparentemente ele nunca se preocupou em testar se a força era de fato proporcional a $q_1 q_2$. Em princípio as forças elétricas poderiam se comportar como $q_1 + q_2$, ou como $(q_1 q_2)^n$ com um expoente n diferente de 1. Apenas experiências podiam decidir este aspecto, mas ele não as realizou. Contudo, a lei de força que ele propôs provou ser extremamente boa para explicar muitos fenômenos.

Em analogia com o potencial gravitacional proposto por Lagrange e Laplace, Poisson introduziu o potencial escalar no eletromagnetismo em 1811-1813. As energias de interação entre duas cargas pontuais ou entre dois polos magnéticos são então dadas por, respectivamente:

$$U_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_o} \frac{1}{r_{12}} \ , \tag{24.5}$$

e

$$U_{12} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{q_1^m q_2^m}{r_{12}} \ . \tag{24.6}$$

Em 1820 Oersted descobriu experimentalmente o desvio de uma agulha magnetizada interagindo com um fio com corrente elétrica. Fascinado por este fato, Ampère (1775-1836) realizou uma série de experiências clássicas e chegou no período entre 1820 a 1826 na seguinte expressão descrevendo a força exercida por um elemento de corrente $I_2 d\vec{\ell}_2$ localizado em $\vec{r}_2$ sobre um outro elemento de corrente $I_1 d\vec{\ell}_1$ localizado em $\vec{r}_1$:

$$d^2\vec{F}_{21} = -\frac{\mu_o}{4\pi} I_1 I_2 \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \left[2(d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2) - 3(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{\ell}_1)(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{\ell}_2) \right] \ . \tag{24.7}$$

Mais uma vez esta força é completamente relacional. E mesmo aqui a influência de Newton foi muito grande, embora esta força seja muito mais complexa do que a newtoniana, já que a força de Ampère depende também dos ângulos entre os elementos de corrente, assim como depende do ângulo entre cada elemento de corrente e a reta os unindo.

O primeiro a testar diretamente o fato de que a força era proporcional a $I_1 I_2$ foi W. Weber em 1846-1848.[5] Com este fim ele mediu diretamente as forças entre circuitos com corrente utilizando o eletrodinamômetro que ele próprio inventou. Ampère nunca mediu as forças diretamente e utilizava apenas métodos de equilíbrio nulos que não geravam forças.

Já foram propostas muitas energias de interação entre dois elementos de corrente. Elas podem ser resumidas, seguindo Helmholtz, pela seguinte expressão:[6]

$$d^2 U_{12} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I_1 I_2}{r_{12}} \left[\frac{1+k}{2} (d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2) + \frac{1-k}{2} (\hat{r} \cdot d\vec{\ell}_1)(\hat{r} \cdot d\vec{\ell}_2) \right] \ . \tag{24.8}$$

Aqui k é uma constante adimensional. Embora Franz Ernst Neumann (1798-1895), o pai de Carl Neumann, tenha trabalhado apenas com circuitos fechados, podemos dizer que sua energia de interação entre elementos de corrente seria dada por esta equação com $k = 1$. A eletrodinâmica de Weber[7] fornece esta

[4] [Hee92].

[5] [Web46] com tradução para a língua inglesa em [Web07], e [Web48] com tradução para a língua inglesa em [Web66].

[6] [Woo68], [Wis81], [Arc89], [Gra85] e [BA95].

[7] [Ass94, Seção 4.6].

energia com $k = -1$. A eletrodinâmica de Maxwell fornece esta energia com $k = 0$. E mais recentemente Graneau[8] propôs uma expressão como esta com $k = 5$. Independente do valor de k, todas estas energias são relacionais.

Embora a maior parte dos livros didáticos apresente a expressão de Neumann como representando a energia de interação entre dois elementos de corrente na teoria de Maxwell, este não é o caso. A energia de interação de acordo com Maxwell é realmente[9] dada por $k = 0$ e não é dada por $k = 1$. Isto pode ser visto utilizando a energia lagrangiana de Darwin de 1920 que descreve a interação entre duas cargas pontuais q_1 e q_2 localizadas em $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$, movendo-se com velocidades $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ em relação a um referencial inercial, respectivamente. Ela é a lagrangiana do eletromagnetismo clássico (teoria de Maxwell-Lorentz) incluindo as correções relativísticas, o tempo retardado e os efeitos de radiação, correta até segunda ordem em v/c, inclusive. Ela é dada por:[10]

$$U_{12}^D = U_{21}^D = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{r_{12}}\left[1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + (\vec{v}_1 \cdot \hat{r}_{12})(\vec{v}_2 \cdot \hat{r}_{12})}{2c^2}\right] . \tag{24.9}$$

Suponhamos os elementos de corrente neutros compostos de cargas positivas e negativas: $dq_{1-} = -dq_{1+}$ e $dq_{2-} = -dq_{2+}$. A energia para trazer os elementos de uma distância infinita um do outro até a separação final r_{12} é dada por:

$$d^2U_{12} = d^2U_{2+,1+} + d^2U_{2+,1-} + d^2U_{2-,1+} + d^2U_{2-,1-} . \tag{24.10}$$

Utilizando que $I_1 d\vec{\ell}_1 \equiv dq_{1+}\vec{v}_{1+} + dq_{1-}\vec{v}_{1-}$, $I_2 d\vec{\ell}_2 \equiv dq_{2+}\vec{v}_{2+} + dq_{2-}\vec{v}_{2-}$, a neutralidade elétrica dos elementos e a lagrangiana de Darwin obtemos a equação (24.8) com $k = 0$.

Ao tentar unificar a eletrostática com a eletrodinâmica, de forma a poder deduzir a força eletrostática entre duas cargas e a força de Ampère entre dois elementos de corrente a partir de uma única expressão, W. Weber propôs em 1846 que a força exercida pela carga pontual q_2 sobre a carga pontual q_1 fosse dada por:[11]

$$\vec{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2}\left(1 - \frac{\dot{r}_{12}^2}{2c^2} + \frac{r_{12}\ddot{r}_{12}}{c^2}\right) . \tag{24.11}$$

Em 1848 ele propôs uma energia de interação U_{12} a partir da qual esta força poderia ser obtida, a saber:[12]

$$U_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{r_{12}}\left(1 - \frac{\dot{r}_{12}^2}{2c^2}\right) . \tag{24.12}$$

Discussões detalhadas recentes sobre a eletrodinâmica de Weber podem ser encontradas em diversos trabalhos.[13]

É importante observar que Weber partiu diretamente da eletrostática (força entre cargas em repouso) e da força de Ampère entre elementos de corrente para chegar na equação (24.11). Com isto indiretamente ele estava sendo influenciado pela lei de Newton da gravitação, já que tanto Coulomb quanto Ampère foram diretamente influenciados por ela.

As expressões (24.11) e (24.12) são mais uma vez completamente relacionais. Ou seja, elas dependem apenas da distância r_{12} entre as cargas, assim como da velocidade radial relativa $\dot{r}_{12}$ entre elas e da aceleração radial relativa $\ddot{r}_{12}$ entre elas, apontando ao longo da reta que as une, $\hat{r}_{12}$.

Apesar deste fato elas apresentam grandes diferenças quando comparadas com a lei de Newton da gravitação devido à dependência na velocidade radial entre as cargas e na aceleração radial entre elas. Esta foi a primeira vez na física que se propôs uma força que dependia da velocidade e da aceleração entre os corpos interagentes. Mais tarde surgiram muitas outras propostas no eletromagnetismo descrevendo a força entre cargas pontuais, a saber: a força de Gauss (desenvolvida em 1835 mas publicada apenas em 1877), a força de Riemann (desenvolvida em 1858 mas publicada apenas em 1867), a força de Clausius em 1876 e a força de Ritz em 1908.[14] Além das diferenças nas formas, há uma grande distinção entre a expressão de Weber e todas estas outras, a saber: Apenas a força de Weber é completamente relacional, dependendo somente da distância, velocidade radial relativa e aceleração radial relativa entre as cargas pontuais e tendo assim o

[8] [Gra85].

[9] [Woo68], [Wis81] e [Arc89].

[10] [Dar20], [Jac75, Seção 12.7, págs. 593-595], [Ass94, Seção 6.8] e [Ass95b, Seção 1.6].

[11] [Web46], com tradução para a língua inglesa em [Web07].

[12] [Web48], com tradução para a língua inglesa em [Web66].

[13] [Ass90a], [Ass90b], [Ass91b], [Ass91a], [Ass92b], [Ass92g], [Ass92d], [AC93], [Ass94], [GA94], [Ass95b], [Ass95a], [Ass95e], [Ass95c], [AB95], [AB96], [Fuk03] e [AW11].

[14] [Ass94, Apêndice B, Alternative Formulations of Electrodynamics] e [Ass95b, Apêndice C, Formulações Alternativas].

mesmo valor para todos os observadores e sistemas de referência. Por outro lado, as outras expressões de força entre carga dependem da velocidade e da aceleração da carga teste em relação a um meio privilegiado como o éter, ou em relação ao observador, ou ainda em relação a um sistema de referência abstrato. Também a força de Maxwell-Lorentz, equação (14.12), desenvolvida por Maxwell entre 1861 e 1873, além de ter sido apresentada por Lorentz em 1895, pôde ser escrita na forma de uma interação entre cargas pontuais a partir dos trabalhos de Lienard, Wiechert, Schwarzschild e Darwin. Quando isto é feito, também aparecem velocidades e acelerações das cargas em relação ao éter (como pensava Lorentz) ou em relação aos observadores ou sistemas de referência inerciais (interpretação introduzida por Einstein). Ou seja, mais uma vez não é a velocidade e aceleração entre as cargas que interessa, mas sim o movimento delas em relação a algo externo, seja este algo externo um meio material, um observador, ou um sistema de referência. Apenas a eletrodinâmica de Weber é completamente relacional. Por este motivo ela é a única formulação compatível com a mecânica relacional apresentada neste livro, enquanto que as outras formulações do eletromagnetismo não são compatíveis com a mecânica relacional.

Em 1868 Carl Neumann chegou na energia lagrangiana que descreve a eletrodinâmica de Weber, a saber:

$$S_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{r_{12}}\left(1 + \frac{\dot{r}_{12}^2}{2c^2}\right) . \qquad (24.13)$$

A lagrangiana de um sistema de dois corpos podia então ser escrita como $L \equiv T - S_{12}$, onde $T = m_1 v_1^2/2 + m_2 v_2^2/2$ é a energia cinética do sistema com as velocidades determinadas em relação a um referencial inercial ou em relação ao referencial universal U. Deve ser observado a mudança de sinal em frente de $\dot{r}_{12}$ quando comparamos U_{12} e S_{12} das equações (24.12) e (24.13). A energia lagrangiana S_{12} também é completamente relacional.

Em 1872 Helmholtz (1821-1894) obteve que, de acordo com a eletrodinâmica de Weber, a energia de uma carga teste q interagindo com uma casca esférica dielétrica de raio R carregada uniformemente com uma carga Q é dada por:[15]

$$U_{qQ} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{R}\left(1 - \frac{v^2}{6c^2}\right) . \qquad (24.14)$$

Para chegar nesta expressão Helmholtz supôs a casca esférica parada e a carga q movendo-se com velocidade $\vec{v}$ em relação à casca esférica. A carga q poderia estar localizada em um ponto qualquer do interior da casca esférica.

Uma expressão análoga obtida com uma lei de Weber aplicada à gravitação é a chave para a implementação do princípio de Mach, como está sendo visto neste livro. Deve se lembrar que as ideias de Mach sobre a mecânica tinham sido publicadas desde 1868. Ao fazer uma analogia com o cálculo de Helmholtz e o aplicar para uma energia potencial gravitacional weberiana, considerando as estrelas fixas e galáxias distantes como um conjunto de cascas esféricas ao redor do sistema solar, esta energia de interação fica sendo exatamente a energia cinética da mecânica newtoniana. Mas Helmholtz sempre teve um ponto de vista negativo em relação à eletrodinâmica de Weber. Ao invés de considerar este resultado que ele mesmo obteve como uma sugestão para a origem da energia cinética mecânica, Helmholtz apresentou este resultado como uma falha da eletrodinâmica de Weber. Maxwell apresentou as críticas de Helmholtz à eletrodinâmica de Weber em seu *Treatise* de 1873.[16] Este último capítulo do livro de Maxwell já se encontra totalmente traduzido para a língua portuguesa, com discussões.[17] Maxwell também não percebeu que o resultado de Helmholtz era a chave para desvendar o enigma da inércia. O mesmo pode ser dito de todos os leitores de Maxwell no final do século XIX e durante todo o século XX, pois tinham disponíveis não apenas este resultado de Helmholtz mas também os livros de Mach. Discutimos isto em detalhes em 1994[18] e não entraremos em maiores detalhes aqui. Diremos apenas que Helmholtz e Maxwell perderam uma chance de ouro para criar a mecânica relacional utilizando um resultado análogo à equação (24.14) na gravitação. Felizmente Schrödinger e outros obtiveram resultados similares e estavam preparados para retirar todas as consequências importantes destes fatos.

[15] [Hel72].
[16] [Max54, Volume 2, Capítulo 23].
[17] [Ass92h].
[18] [Ass94, Seção 7.3: Casca Esférica Carregada].

24.3 Lei de Weber Aplicada para a Gravitação

A eletrodinâmica de Weber foi muito bem sucedida ao explicar os fenômenos da eletrostática e da eletrodinâmica (força de Ampère, lei de indução de Faraday etc.). Este sucesso fez com que algumas pessoas tentassem aplicar uma expressão análoga à lei de Weber para a gravitação. Era o pêndulo oscilando de volta. Após a grande influência da lei da gravitação universal de Newton sobre Coulomb e Ampère, chegou o momento no qual a teoria gravitacional passou a ser influenciada pelo eletromagnetismo.

A ideia é que a força exercida pela massa gravitacional m_{g2} sobre m_{g1} deve ser dada por:

$$\vec{F}_{21} = -G m_{g1} m_{g2} \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \left(1 - \frac{\xi \dot{r}_{12}^2}{2c^2} + \frac{\xi r_{12} \ddot{r}_{12}}{c^2} \right) . \tag{24.15}$$

A energia de interação seria então dada por:

$$U_{12} = -G \frac{m_{g1} m_{g2}}{r_{12}} \left(1 - \frac{\xi \dot{r}_{12}^2}{2c^2} \right) . \tag{24.16}$$

Analogamente, a energia lagrangiana seria dada por:

$$S_{12} = -G \frac{m_{g1} m_{g2}}{r_{12}} \left(1 + \frac{\xi \dot{r}_{12}^2}{2c^2} \right) . \tag{24.17}$$

O primeiro a propor que a força gravitacional também pudesse depender da velocidade e da aceleração entre as massas foi o próprio Weber em seu artigo original de 1846 no qual propôs sua lei de força para o eletromagnetismo:[19]

> Assumindo que os resultados que alcançamos estejam corretos, surgiria aqui um caso no qual a força com a qual duas massas agem entre si dependeria não apenas *da grandeza das massas e das distâncias* entre elas, mas também da *velocidade relativa e da aceleração relativa* entre elas. [...]

Ele mencionou esta sugestão em diversos outros trabalhos.[20]

Além de Weber, o primeiro a propor uma lei de Weber para a gravitação parece ter sido G. Holzmüller em 1870.[21] Em 1872 Tisserand estudou uma força de Weber aplicada para a gravitação e sua aplicação na precessão do periélio dos planetas.[22] O problema de dois corpos na eletrodinâmica de Weber tinha sido resolvido exatamente por Seegers em 1864, em termos de funções elípticas.[23] Mas Tisserand resolveu o problema de dois corpos por aproximações iterativas, mais ou menos como apresentado neste livro.

Outras pessoas também trabalharam com uma lei de Weber aplicada para a gravitação aplicando-a ao problema da precessão do periélio dos planetas: Paul Gerber em 1898 e 1917, Erwin Schrödinger em 1925, Eby em 1977 e nós mesmos em 1989.[24] Curiosamente nenhum destes autores (com exceção do nosso artigo) estava ciente da existência da eletrodinâmica de Weber. Cada um deles chegou nas equações (24.16) ou (24.17) por si próprios. Gerber estava trabalhando com ideias de tempo retardado e trabalhou na formulação lagrangiana. Schrödinger estava tentando implementar o princípio de Mach com uma teoria relacional. Eby estava seguindo os trabalhos de Barbour sobre o princípio de Mach e também trabalhou com a formulação lagrangiana.

Poincaré discutiu o trabalho de Tisserand sobre uma lei de Weber aplicada para a gravitação em 1906-1907.[25] Os trabalhos de Gerber foram criticados por Seeliger, que estava ciente da eletrodinâmica de Weber.[26]

Diversas outras pessoas trabalharam com uma lei de Weber aplicada para a gravitação na segunda metade do século XX.[27]

Com exceção de Schrödinger e Eby, os outros autores que trabalharam com uma lei de Weber aplicada para a gravitação citados aqui não estavam preocupados em implementar o princípio de Mach.

---

[19] [Web46, pág. 149 das *Obras* de Weber] e [Web07, pág. 92].

[20] [Web55, pág. 595 das *Obras* de Weber], [KW57, pág. 652 das *Obras* de Weber] e [Web94a, págs. 481-488 das *Obras* de Weber], com tradução para a língua inglesa em [Web08, págs. 4-15]. Ver também [Woo81] e [Wis81].

[21] [Nor65, pág. 46] e [Jam00, pág. 153].

[22] [Tis72].

[23] [Nor65, pág. 46].

[24] [Ger98], [Ger17], [Sch25], [XA94], [Sch95], [Eby77] e [Ass89a].

[25] [Poi53, págs. 125 e 201-203].

[26] [See17a] e [See17b].

[27] [Ass94, Seção 7.5].

24.4 Mecânica Relacional

Mach sugeriu que a inércia de um corpo devia estar ligada com a matéria distante e especialmente com as estrelas fixas (em seu tempo as galáxias externas ainda não eram conhecidas). Ele não discutiu ou enfatizou a proporcionalidade da massa inercial com a massa gravitacional. Ele não disse que a inércia deveria estar ligada com uma interação *gravitacional* com as massas distantes. E ele não propôs nenhuma lei de força específica para implementar suas ideias quantitativamente (mostrando matematicamente, por exemplo, que ao girar o céu de estrelas seriam geradas forças centrífugas atuando sobre os corpos localizados no sistema solar). Contudo, seu livro *A Ciência da Mecânica* foi extremamente influente no que diz respeito à física, muito mais do que os escritos de Leibniz e Berkeley. Ele foi publicado em 1883 e a partir desta data as pessoas começaram a tentar implementar suas ideias intuitivas, que eram muito atraentes.

O primeiro a propor uma lei de Weber para a gravitação com o intuito de implementar o princípio de Mach parece ter sido Immanuel Friedlaender em 1896. Esta sugestão apareceu em uma nota de rodapé na página 17 do livro dos irmãos Friedlaender, em que cada uma das partes foi escrita por um deles. Immanuel Friedlaender começou falando da força centrífuga (tendência a se afastar do centro de rotação) que aparece quando giramos algum corpo em relação à Terra. Ele afirmou então que devia ser possível invertê-la. Isto é, que a força centrífuga devia aparecer se girarmos no sentido contrário a Terra juntamente com o universo em relação ao corpo de prova. Ele acreditava que a mecânica newtoniana não era completa por não fornecer esta equivalência. Então vem o trecho que nos interessa aqui:[28]

> [...] parece a mim que a forma correta da lei da inércia só será encontrada quando for deduzida, com base em uma *lei unificada*, a *inércia relativa* como um efeito das massas umas sobre as outras e a *gravitação*, que também é um efeito das massas umas sobre as outras.[29] O desafio aos teóricos e calculistas para tentar isto só vai ser coroado com sucesso quando for demonstrado com êxito a invertibilidade da força centrífuga.

Esta foi apenas uma sugestão que não chegou a ser desenvolvida. Apesar deste fato, ela foi importante em pelo menos dois sentidos: (I) Eles foram os primeiros a sugerir em um texto impresso que a inércia é devida a uma interação *gravitacional*. (II) Eles propuseram a lei de Weber como o tipo de interação com a qual se trabalhar. A inversão da força centrífuga, ou seja, a equivalência dinâmica entre situações cinematicamente equivalentes, é implementada de forma completa na mecânica relacional, como vimos neste livro.

Em 1900 Höfler também sugeriu que se aplicasse uma lei de Weber para a gravitação com o sentido de implementar o princípio de Mach.[30] Novamente esta sugestão não chegou a ser desenvolvida.

Em 1904 W. Hofmann propôs substituir a energia cinética $mv^2/2$ por uma interação entre dois corpos dada por $L = kMmf(r)v^2$, sendo k uma constante, $f(r)$ alguma função da distância entre os corpos de massas M e m, sendo v a velocidade relativa entre M e m.[31] O resultado usual $mv^2/2$ seria obtido após integrar L supondo que o corpo m estivesse interagindo com todas as massas no universo. Hofmann não completou a implementação desta ideia qualitativa. Seu trabalho é importante porque ele está considerando uma interação do tipo da energia de Weber (ver a equação (24.16)) para chegar na energia cinética, embora ele não tenha especificado a função $f(r)$. Ele também parece que não conhecia a eletrodinâmica de Weber.

Embora Einstein tenha sido grandemente influenciado pelo livro de Mach sobre a mecânica, ele não tentou empregar uma expressão relacional para a energia de interação entre as massas ou para a força exercida por uma massa sobre outra massa. Ele nunca mencionou a força ou a energia potencial de Weber. Todos aqueles que se deixaram levar pela linha de raciocínio de Einstein ficaram muito longe da mecânica relacional. Por este motivo não os consideraremos aqui.

Após os trabalhos de Friedlaender, Höfler e Hofmann, uma outra pessoa importante tentando implementar o princípio de Mach utilizando grandezas relacionais foi Reissner em 1914 e 1915. Sem estar ciente do trabalho de Weber, ele chegou independentemente a uma energia potencial muito similar à de Weber aplicada para a gravitação.[32] No artigo de 1914 ele trabalhou com uma energia potencial newtoniana mais um termo do tipo $m_1 m_2 f(r)\dot{r}^2$, particularizado para $f(r) =$ constante, sendo que em 1915 substituiu este termo pelo termo

[28] [FF96], [FF95] e [FF07].

[29] [Nota de Immanuel Friedlaender:] Em relação a isto é altamente desejável que seja resolvida a questão de saber se a lei de Weber é para ser aplicada na gravitação e também a questão da velocidade de propagação da gravitação. Em relação ao segundo ponto, pode-se usar um instrumento que torna possível medir estaticamente as variações diurnas da gravidade terrestre como uma função da posição dos corpos celestes.

[30] [Nor95, págs. 21 e 41] e [BP95, págs. 21, 24, 34-35, 40-41, 46, 53 e 164].

[31] Seu trabalho está discutido em [Nor95], sendo que uma tradução parcial para a língua inglesa de seu trabalho se encontra em [Hof95].

[32] [Rei14] com tradução para a língua inglesa em [Rei95b], e [Rei15] com tradução parcial para a língua inglesa em [Rei95a].

weberiano $m_1 m_2 \dot{r}^2/r$. Infelizmente de 1916 em diante ele começou a desenvolver as ideias de Einstein sobre a relatividade geral e não trabalhou mais com grandezas relacionais.[33]

Erwin Schrödinger tem um artigo muito importante de 1925 onde ele chegou nos principais resultados da mecânica relacional.[34] Neste artigo Schrödinger disse que queria implementar as ideias de Mach. Ele mencionou o fato de que a teoria da relatividade geral de Einstein não implementou estas ideias e por este motivo ele tentaria um enfoque diferente. Tomando a forma da energia cinética $mv^2/2$ como guia, Schrödinger propôs heuristicamente uma forma modificada da energia potencial newtoniana, a saber:

$$U = -\frac{Gm_1 m_2}{r}\left(1 - \gamma \dot{r}^2\right) . \tag{24.18}$$

Para chegar nesta expressão ele enfatizou explicitamente o aspecto de que qualquer energia de interação deveria depender apenas da distância e da velocidade relativa entre as partículas interagentes, para assim ser coerente com as ideias de Mach. Isto é, velocidades absolutas não deviam aparecer nas energias de interação. Nestas energias de interação só deveriam aparecer grandezas relacionais. Curiosamente ele nunca mencionou o nome de Weber ou a sua lei, embora Schrödinger fosse uma pessoa de língua alemã, assim como Weber. Ele integrou esta energia para uma casca esférica de massa M e raio R interagindo com uma massa pontual interna m próxima do centro e movendo-se em relação à casca com uma velocidade v. Com isto obteve o seguinte resultado aproximado para esta energia de interação:

$$U = -G\frac{mM}{R}\left(1 - \frac{\gamma v^2}{3}\right) . \tag{24.19}$$

Ele não sabia disto, mas este resultado aproximado é válido exatamente qualquer que seja a posição da partícula teste no interior da casca, como Helmholtz havia mostrado em 1872 (trabalhando com cargas ao invés de massas, mas a consequência é a mesma).[35] Schrödinger também não citou este trabalho de Helmholtz e parece que não chegou a ter conhecimento dele.

Schrödinger identificou o resultado dado pela equação (24.19) com a energia cinética do corpo de prova e com isto chegou nos principais resultados da mecânica relacional, a saber: proporcionalidade da massa inercial com a massa gravitacional, concluiu que o melhor referencial inercial é o referencial das massas distantes etc. Ele então considerou o problema da órbita de um planeta ao redor do Sol levando em conta não apenas a interação entre eles, mas também a interação de cada um destes corpos com as massas distantes. Com isto chegou na precessão do periélio dos planetas. Como vimos na Seção 23.1, outros haviam chegado neste resultado antes dele utilizando uma lei de Weber, mas Schrödinger não citou ninguém. Para chegar no resultado einsteiniano para o avanço do periélio, que se sabia concordar com os dados observacionais, Schrödinger obteve $\gamma = 3/c^2$.

Ele então integrou o resultado da casca esférica para todo o universo. Para isto supôs uma densidade de massa gravitacional constante ρ_{go}, substituiu a massa gravitacional M da casca por $4\pi R^2 \rho_{go} dR$ e integrou a equação (24.19) com o raio da casca indo de zero até o suposto raio R_U do universo. Ao integrar a equação (24.19) obteve a seguinte relação, com $\gamma = 3/c^2$:

$$U = -\int_0^{R_U} \frac{Gm(4\pi R^2 \rho_{go} dR)}{R}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = -2\pi G \rho_{go} R_U^2 m + \frac{mv^2}{2}\left(\frac{4\pi G \rho_{go} R_U^2}{c^2}\right) . \tag{24.20}$$

Para que este resultado coincidisse, a menos de uma constante, com a energia cinética clássica, Schrödinger concluiu que a seguinte relação teria de ser válida:

$$G = \frac{c^2}{4\pi \rho_{go} R_U^2} . \tag{24.21}$$

Ele observou que tomando R_U e ρ_{go} como sendo o raio e a densidade de nossa galáxia, respectivamente, obteríamos um valor de G com uma ordem de grandeza 10^{11} vezes menor do que o valor conhecido de G. Sua conclusão foi então de que a inércia dos corpos no sistema solar era devida principalmente a uma matéria que estava bem afastada de nossa galáxia. Para que esta equação fosse verdadeira, como era necessário para implementar o princípio de Mach, R_U precisaria ser muito maior do que todas as outras distâncias astronômicas conhecidas em sua época. É curioso observar que a existência de galáxias externas tinha acabado de ser confirmada por Edwin Hubble em 1924. Até então muitos pensavam que todo o universo

[33] [Rei16] e [Nor95, pág. 33].
[34] [Sch25], [XA94] e [Sch95].
[35] [Hel72].

era apenas nossa galáxia. A lei de Hubble para os desvios para o vermelho só apareceu em 1929. Esta relação entre G, R_U, c e ρ_{go} foi descoberta independentemente por diversos autores no século XX, partindo de diferentes concepções cosmológicas.[36]

Utilizando a equação (24.21) na equação (24.20) obtém-se:

$$U = -\frac{mc^2}{2} + \frac{mv^2}{2} \ . \tag{24.22}$$

Ele então concluiu que o potencial negativo devido a todas as massas no universo deve ser igual a metade do quadrado da velocidade da luz, como pode ser visto pelo primeiro termo do lado direito da equação (24.22).

Schrödinger foi então um passo além. Ele considerou a energia cinética clássica $mv^2/2$ como sendo apenas uma aproximação para baixas velocidades. Supôs a energia cinética $mc^2(1/\sqrt{1-v^2/c^2}-1)$ como uma relação empírica válida mesmo a altas velocidades. Para deduzir esta nova energia cinética ele modificou a energia potencial de onde havia partido pela seguinte expressão:

$$U = -G\frac{m_{g1}m_{g2}}{r}\left[3 - \frac{2}{(1-\dot{r}^2/c^2)^{3/2}}\right] \ . \tag{24.23}$$

Esta expressão se reduz à energia de Weber se a expandirmos somente até segunda ordem em $\dot{r}/c$. Após integrá-la para as massas distantes, Schrödinger obteve analogamente ao procedimento anterior uma expressão do tipo da energia cinética relativística. Ou seja, obteve a equação (23.40) com $\beta = -3G$ e $\gamma = 2G$. Ele também observou que esta energia (24.23) podia ser obtida a partir de uma energia lagrangiana L dada por

$$L = G\frac{m_{g1}m_{g2}}{r}\left(\frac{2}{\sqrt{1-\dot{r}^2/c^2}} - 4\sqrt{1-\dot{r}^2/c^2} + 3\right) \ . \tag{24.24}$$

Após a integração usual, esta lagrangiana forneceu uma expressão análoga à lagrangiana relativística de uma partícula pontual, a saber:

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \ . \tag{24.25}$$

Mais uma vez, a massa m que aparece na dedução de Schrödinger é a massa gravitacional do corpo. E a velocidade v que aparece nesta expressão é a velocidade do corpo em relação ao referencial da matéria distante, isto é, em relação ao referencial no qual a matéria distante está em repouso. Um trabalho análogo ao de Schrödinger sobre uma energia relacional válida a altas velocidades, $\dot{r} \approx c$, foi feito recentemente por Wesley, que não tinha conhecimento do trabalho de Schrödinger.[37]

Schrödinger não trabalhou mais ao longo destas linhas após este trabalho, nem tinha publicado nada antes sobre o assunto. Este foi um de seus últimos trabalhos antes dos artigos famosos sobre a mecânica quântica, onde desenvolveu a assim chamada equação de Schrödinger e o enfoque ondulatório para a mecânica quântica. O enorme sucesso destes artigos pode ser um dos motivos pelos quais ele não retornou ao seu trabalho sobre o princípio de Mach.

Um segundo motivo pode ter tido a ver com Reissner. Em seu artigo de 1925 Schrödinger afirmou que chegou "heuristicamente" na expressão (24.18), que é essencialmente a energia potencial de Weber aplicada na gravitação. Ele não citou Weber, Tisserand, Reissner ou qualquer outro autor. De acordo com os dicionários, a palavra "heurístico" significa o método analítico para o descobrimento de verdades científicas, ou seja, o método de resolver problemas por raciocínio indutivo, avaliando a experiência passada e descobrindo a solução por tentativa e erro. Isto significa que Schrödinger teria chegado a esta expressão sozinho, por tentativa e erro. Citamos aqui sua justificativa sobre como chegou na expressão para implementar o princípio de Mach, nossa ênfase:[38]

> Pode-se perguntar se talvez não fosse possível que a energia cinética, assim como a potencial, dependesse não apenas de uma partícula, mas da energia de interação das duas massas, e, assim

[36] [Sch25], [XA94] e [Sch95], [Sci53], [Bro55] e [Bro82, pág. 57], [Dic59], [Fre71, Cap. 12: Inertial Forces and Noninertial Frames], [Edw74], [Eby77], [Ass89a], [Ass98, Seções 8.3 e 11.4] e [Ass99a, Seções 8.5 e 11.4].

[37] [Wes90].

[38] [Sch25] e [XA94].

> sendo, da distância e velocidade relativa das duas partículas. De todas as expressões para essa energia, escolhemos **heuristicamente** a que satisfaz às seguintes exigências:
>
> 1. A energia cinética como energia de interação deve depender das massas e distâncias das partículas da mesma maneira que o potencial de Newton;
>
> 2. Deve ser proporcional ao quadrado da velocidade de variação da distância.
>
> Para a energia de interação total de duas massas pontuais, μ e μ', à distância r, isso resulta na expressão
>
> $$W = \gamma \frac{\mu\mu'\dot{r}^2}{r} - \frac{\mu\mu'}{r} \ .$$
>
> As massas são aqui, dadas de tal forma que a constante gravitacional seja igual a 1. A constante indeterminada γ tem dimensão de recíproco de uma velocidade quadrática. Como ela deve ser universal, esperamos que se trate, a menos de um fator numérico, da velocidade da luz e veremos que ela pode ser reduzida a um fator numérico quando escolhemos o segundo-luz como unidade de tempo. Posteriormente, mostraremos que esse fator é igual a 3.

Acontece que a história não foi bem essa. Recentemente começaram a ser publicadas as obras completas de Schrödinger. Ao final da reimpressão deste artigo há uma nota datilografada, assinada por Schrödinger, onde ele pediu profundas desculpas por ter plagiado inconscientemente a ideia de Reissner.[39] Schrödinger afirmou nesta nota que definitivamente conhecia o primeiro artigo de Reissner, de 1914, mas não tinha certeza se conhecia o segundo artigo. Ele considerou os artigos de Reissner "muito interessantes" e esperava que seu próprio artigo iria ser de algum interesse por apresentar um tratamento do assunto um pouco diferente. Pode ser que o fato de ele ter utilizado as ideias de Reissner sem citá-lo e o constrangimento de ter de se corrigir publicamente mais tarde (outros podem ter percebido a similaridade entre os trabalhos de Reissner e de Schrödinger) tenham influído para que ele não mais tratasse deste assunto.

De qualquer forma não deixa de ser uma ironia que embora nem Reissner nem Schrödinger tivessem citado Weber, a força e a energia de Weber já houvessem sido propostas uns 70 anos antes de Reissner (80 anos antes de Schrödinger). A aplicação delas à gravitação data de pelo menos a década de 1870, uns 40 anos antes de Reissner. Além de Weber ser alemão e de ter publicado nessa língua, assim como Reissner e Schrödinger, seu trabalho havia sido amplamente discutido por Maxwell e muitos outros. É incrível que nenhum dos dois tivesse conhecimento disto e que mesmo após suas publicações outros não tenham chamado a atenção deles para este fato.

Um terceiro motivo de Schrödinger não ter mais trabalhado com uma lei do tipo da energia de Weber para implementar o princípio de Mach pode ter sido o fato de que ele se converteu às teorias de Einstein da relatividade, assim como havia acontecido com Reissner. Por exemplo, Schrödinger trabalhou mais tarde com a teoria unificada baseado em trabalhos de Einstein.[40] Chegou até mesmo a publicar um livro sobre o universo em expansão, baseado na teoria da relatividade geral de Einstein.[41]

Este artigo de 1925 de Schrödinger também não foi seguido ou desenvolvido por outras pessoas e ficou essencialmente esquecido nos anos seguintes. De 1925 a 1993 só encontramos uma referência a ele em um artigo de 1987.[42] Mesmo assim havia apenas uma simples menção relacionada com este artigo na pág. 1157. Uma outra citação breve se encontra no livro de Mehra.[43] Foi apenas em 1993 que este artigo fundamental de Schrödinger começou a ser redescoberto por outras pessoas. Julian Barbour nos contou sobre este artigo em julho de 1993, tendo sido ele próprio informado sobre ele um pouco antes por Domenico Giulini, que o notou nas obras completas de Schrödinger.[44] Este artigo foi então discutido na conferência sobre o princípio de Mach que ocorreu em Tübbingen, na Alemanha, em 1993. Recentemente ele foi traduzido para a língua portuguesa e para a língua inglesa.[45] Desde 1993 pode-se dizer que este artigo saiu do esquecimento. Este artigo de Schrödinger é extremamente importante e vários dos resultados relevantes da mecânica relacional estão contidos nele. É impressionante que Schrödinger não tenha continuado ao longo deste enfoque, que outros não tenham percebido a importância deste trabalho e quão longe iam suas consequências. Se este

[39] [Sch84, pág. 192], com tradução para a língua portuguesa em [XA97].
[40] [Hit87].
[41] [Sch57].
[42] [Meh87].
[43] [MR87, págs. 372-373 e 459].
[44] Comunicação particular de Julian Barbour e [BP95, pág. 51].
[45] [XA94] e [Sch95].

trabalho tivesse sido explorado em todas as suas consequências, a mecânica relacional poderia ter sido aceita como uma teoria completamente desenvolvida desde 1925.

Não temos conhecimento de qualquer teoria relacional tentando implementar o princípio de Mach nos cinquenta anos seguintes ao trabalho de Schrödinger. Embora tenham havido alternativas para a relatividade geral, elas foram em geral modeladas com base no trabalho de Einstein e assim mantiveram a maior parte das características negativas da teoria de Einstein (grandezas absolutas, inércia em relação ao espaço, forças dependentes do observador, etc.) Não vamos então considerá-las aqui. Uma exceção que deve ser mencionada são os trabalhos de Burniston Brown.[46] Ele não seguiu a relatividade geral mas sim uma analogia com o eletromagnetismo. Infelizmente a expressão de força que empregou não é exatamente relacional como a de Weber. Apesar disto chegou em diversas consequências machianas com seu modelo.

Somente em 1974 Edwards foi levado a trabalhar com grandezas relacionais, tais como $\dot{r}$, ao considerar as analogias entre o eletromagnetismo e a gravitação.[47] Ele não estava ciente do trabalho de Schrödinger. Ele afirmou que seu "enfoque emprega algumas das ideias básicas das teorias eletromagnéticas de Weber e Riemann." Ele chamou atenção a uma possível explicação para a origem das forças de ligação dentro das partículas fundamentais e dos núcleos utilizando o fato de que uma força de Weber aplicada ao eletromagnetismo depende da aceleração entre as cargas. Isto significa que a massa inercial efetiva de uma partícula carregada vai depender de sua energia potencial eletrostática, de forma que esta massa inercial efetiva pode se tornar negativa sob certas condições. Como consequência disto, cargas negativas poderiam se atrair quando estas condições fossem satisfeitas. Como já vimos, Helmholtz tinha chegado nestas ideias de massas efetivas dependentes da energia potencial 100 anos antes.[48] Edwards não publicou mais ao longo desta linha de pesquisa de implementar o princípio de Mach a partir de uma força de Weber aplicada para a gravitação. Embora não fosse do conhecimento de Edwards, o próprio Weber chegou a propor um modelo planetário para o átomo, antes dos trabalhos de Rutherford e Bohr, no qual o núcleo composto por cargas positivas era mantido estável por forças puramente eletromagnéticas, como visto na Subseção 2.8.1. Estas ideias foram discutidas detalhadamente em um livro sobre o modelo planetário de Weber para o átomo.[49]

Ao mesmo tempo Barbour, e depois Barbour e Bertotti, trabalhavam com grandezas relacionais, derivadas intrínsecas e com a configuração espacial relativa do universo.[50] Hoje em dia eles seguem mais o enfoque einsteiniano.

Eby[51] seguiu as ideias de Barbour e trabalhou com uma energia lagrangiana como a equação (24.17). Ele calculou a precessão do periélio dos planetas com sua lagrangiana e também implementou o princípio de Mach. Mais uma vez ele não estava ciente da eletrodinâmica de Weber nem do artigo de Schrödinger. Em um artigo seguinte Eby considerou a precessão de um giroscópio com seu modelo.[52] Eby não publicou mais ao longo destas ideias e seu trabalho também não foi seguido por outros pesquisadores.

Nosso trabalho sobre a mecânica relacional se desenvolveu durante 1988 e foi publicado em diversos lugares.[53] Não tivemos conhecimento do artigo de Schrödinger até 1993. De acordo com nosso conhecimento da literatura até o momento, fomos os primeiros a obter as equações (16.30) e (16.57) em 1989.[54] Ou seja, fomos os primeiros a implementar quantitativamente a ideia de Mach de que a rotação do conjunto de corpos astronômicos ao redor de um corpo de prova gera neste corpo uma força centrífuga real e uma força de Coriolis real. Fomos também os primeiros a deduzir a equação (16.28) com $\vec{\Omega} \neq \vec{0}$. Helmholtz e Schrödinger obtiveram este resultado anteriormente quando $\vec{\Omega} = \vec{0}$. Fomos também os primeiros a obter[55] as equações (16.29) e (16.31), além de introduzir[56] o decaimento exponencial na energia potencial de Weber, equações (16.17) e (16.18).

O princípio de equilíbrio dinâmico, terceiro postulado da mecânica relacional, foi apresentado na Seção 16.1, equação (16.3). Dennis Sciama parece ter sido o primeiro a supor uma forma particular deste princípio.[57] A primeira limitação de sua formulação de que a soma de todas as forças atuando sobre qualquer corpo é nula, foi que ele a supôs válida apenas para interações gravitacionais, enquanto que nós a aplicamos para todos os tipos de interação. Mas muito mais sério do que isto foi o fato de que ele restringiu a validade de

---

[46] [Bro55] e [Bro82].
[47] [Edw74].
[48] [Ass94].
[49] [AW11].
[50] [Bar74], [BB77] e [BB82].
[51] [Eby77].
[52] [Eby79].
[53] [Ass89a], [Ass92f], [Ass92c], [Ass93b], [Ass93c], [Ass94, Seções 7.5 a 7.7], [AG95], [Ass95f], [Ass95d], [AG96].
[54] [Ass89a].
[55] [Ass89a], [Ass92f] e [Ass94, Capítulo 7].
[56] [Ass92f].
[57] [Sci53].

seu postulado apenas ao referencial de repouso do corpo de prova que sente a interação, enquanto que nós supomos este princípio válido em todos os sistemas de referência. O motivo para sua suposição limitada é muito simples. Ele utilizou como sua lei de força uma expressão similar à força de Maxwell-Lorentz, equação (14.12), aplicada para a gravitação, força esta que certamente não é relacional. Além do mais, como é bem conhecido, a força de Maxwell-Lorentz depende da posição e velocidade do corpo de prova, mas não depende da aceleração do corpo de prova. Quando o corpo de prova era acelerado em relação às galáxias distantes, Sciama era capaz de deduzir no referencial do corpo de prova (isto é, em um referencial sempre fixo ao corpo de prova) que as galáxias distantes exerceriam uma força sobre o corpo de prova com massa gravitacional m_g dada por $m_g\vec{A}_{GA}$, onde $\vec{A}_{GA}$ é a aceleração do conjunto de galáxias distantes em relação ao corpo de prova. Mas no referencial das galáxias distantes não há força exercida por elas sobre o corpo de prova acelerado, se utilizarmos a expressão de Sciama. Ou seja, se estivermos no referencial universal (fixo em relação ao conjunto de galáxias distantes) e calcularmos a força gravitacional exercida por estas galáxias sobre um corpo de prova que está acelerado em relação a elas, obteremos um resultado nulo com a força gravitacional de Sciama (análoga à força de Maxwell-Lorentz eletromagnética), não interessando a aceleração do corpo de prova em relação às galáxias. Este resultado nulo é devido ao fato de que a força de Maxwell-Lorentz não é relacional, fornecendo resultados diferentes em diferentes sistemas de referência. Este resultado nulo também é devido ao fato de que a força de Maxwell-Lorentz depende da aceleração do corpo fonte (que gera os campos ou as forças), mas não depende da aceleração do corpo de prova (que sente os campos ou as forças).[58] Isto significa que Sciama não conseguiu implementar o princípio de Mach em toda sua generalidade. Em primeiro lugar, ele não trabalhou com grandezas relacionais. Ele também não conseguiu deduzir a segunda lei de Newton no referencial das galáxias distantes, onde se sabe que ela é válida. A primeira apresentação do princípio de equilíbrio dinâmico em toda sua generalidade, onde também se deduziram todas as suas consequências importantes, ocorreu apenas em nosso artigo de 1989.[59]

Esperamos que daqui por diante muitas outras pessoas se envolverão com a mecânica relacional, desenvolvendo suas propriedades e consequências. Foi por este motivo que este livro foi escrito, de tal forma que outros possam participar ativamente na história deste assunto fascinante.

[58] [Ass92b, Seção 5.3], [Ass92a], [Ass93a], [Ass94, Seções 6.4 e 7.3], [Ass95b, Seção 5.2].
[59] [Ass89a].

Capítulo 25

Conclusão

Acreditamos fortemente na mecânica relacional como apresentada neste livro. Escrevemos esta obra para mostrar ao leitor esta formulação em toda sua generalidade, de tal forma que outros possam ver toda a força deste novo enfoque e possam desenvolvê-lo com suas próprias pesquisas.

Peter e Neal Graneau são alguns dos cientistas que captaram todos os aspectos essenciais da mecânica relacional.[1] Alguns outros que podemos mencionar são Wesley, Zylbersztajn, Phipps, Gualavalverde e Warkulwiz.[2]

Acreditamos que as intuições subjacentes aos três postulados da mecânica relacional são bastante claras e plausíveis. Por outro lado, descobertas experimentais podem nos obrigar a alterar a lei de Weber aplicada ao eletromagnetismo ou à gravitação. Por exemplo, pode ser que seja necessário introduzir termos que dependem de d^3r_{12}/dt^3, d^4r_{12}/dt^4, etc. Outras potências elevando cada derivada temporal podem também ser necessárias, tais como: $\dot{r}$, $(\dot{r})^3$, $(\dot{r})^4$, ..., $(\ddot{r})^2$, $(\ddot{r})^3$, ..., $(d^3r/dt^3)^m$, ... A necessidade ou não do decaimento exponencial na gravitação (o mesmo valendo para o eletromagnetismo) precisa ser confirmada experimentalmente. Mas as principais linhas sobre como abordar os problemas futuros já foram estabelecidas, a saber: Não ter espaço e tempo absolutos; só devem aparecer grandezas relacionais (tais como $\hat{r}_{12}, r_{12}, \dot{r}_{12}, \ddot{r}_{12}, ...$); todas as forças devem vir de interações entre corpos materiais; todas as forças têm de obedecer ao princípio de ação e reação; para partículas pontuais as forças devem estar direcionadas ao longo da reta as unindo; etc.

Isaac Newton criou a melhor mecânica possível em seu tempo. Ele entendeu claramente a diferença conceitual entre massa inercial e peso. Conhecia o resultado de Galileu da igualdade da aceleração em queda livre e realizou uma experiência extremamente precisa com pêndulos, que mostrou que a massa inercial de um corpo é proporcional ao seu peso com uma precisão de uma parte em mil. Embora não pudesse explicar esta proporcionalidade, ele foi um gigante ao perceber o significado e a importância deste fato e ao realizar uma experiência tão precisa. Introduziu a lei de gravitação universal segundo a qual a força entre dois corpos varia com o inverso do quadrado da distância, além de ser proporcional ao produto das massas destes corpos. Provou com esta lei dois teoremas capitais, a saber: (I) Uma casca esférica atrai uma partícula material externa como se toda a casca estivesse concentrada em seu centro. (II) Além disso, esta casca esférica não exerce nenhuma força sobre uma partícula interna, qualquer que seja a posição da partícula no interior da casca. Estes dois teoremas obtidos a partir de sua lei da gravitação universal são válidos quaisquer que sejam o estado de movimento da partícula teste ou o estado de movimento da casca esférica. Realizou a experiência fundamental do balde e observou que a concavidade da água não era devida à sua rotação em relação ao balde. Devido a estes dois teoremas que provou, Newton acreditava que esta concavidade da água não podia ser devida à sua rotação em relação à Terra, nem devida à rotação da água em relação às estrelas fixas. Ele não tinha outra alternativa para explicar esta experiência a não ser concluir que a concavidade da água estava relacionada à sua rotação em relação ao espaço absoluto desvinculado da matéria.

Foi apenas 160 anos depois que Wilhelm Weber propôs uma força elétrica dependendo da distância entre as cargas, da velocidade radial relativa entre elas e da aceleração radial relativa entre elas. Ele propôs também uma energia potencial dependendo da distância e da velocidade radial relativa entre as cargas. Foi a primeira expressão de força a depender da aceleração entre os corpos e a primeira expressão de energia a depender da velocidade entre eles. A formulação de Weber é a única eletrodinâmica já proposta até hoje contendo apenas

[1] [Gra90d], [Gra90a], [Gra90c], [Gra90e], [Gra90b] e [GG93, Capítulo 3: The Riddle of Inertia].

[2] [Wes90], [Wes91, Capítulo 6], [Zyl94], [ZA99], [AZ01], [Phi96], [Phi13], [GV97], [GV98], [GV99a], [GV99b], [AGV00], [GV01], [GVM01], [AGV02], [AGV03], [GV04], [GVAB05] e [War13, Capítulo 5: A Lógica da Física Relacional].

grandezas relacionais entre as cargas que estão interagindo. Por este motivo tanto a força quanto a energia entre as cargas nesta formulação têm o mesmo valor para todos os observadores ou referenciais, mesmo para referenciais não inerciais no sentido newtoniano. A força de Weber satisfaz ao princípio de ação e reação e está direcionada ao longo da linha reta unindo as cargas. Ela satisfaz aos princípios de conservação do momento linear, do momento angular e da energia. Quando não há movimento entre as cargas, deduz-se com ela a força entre cargas em repouso e a lei de Gauss da eletrostática. Com a força de Weber deduz-se a força de Ampère entre elementos de corrente. Desta última expressão pode-se deduzir a lei de não existência de monopolos magnéticos e a lei circuital magnética. Weber conseguiu deduzir também a lei de indução de Faraday a partir de sua expressão de força. Weber e Kirchhoff conseguiram deduzir, antes de Maxwell, uma equação de onda descrevendo a propagação de perturbações eletromagnéticas caminhando com a velocidade da luz. Fizeram isto trabalhando independentemente um do outro, mas ambos baseados na eletrodinâmica de Weber. Weber foi também o primeiro a medir a grandeza eletromagnética $1/\sqrt{\mu_o \varepsilon_o}$ encontrando o mesmo valor que a velocidade da luz no vácuo. Este foi o primeiro indício quantitativo mostrando uma ligação entre a óptica e o eletromagnetismo.[3]

Utilizando-se uma energia potencial de Weber para a gravitação e aplicando-a para a interação entre um corpo de teste e o conjunto de galáxias, obtém-se uma expressão análoga à energia cinética clássica. Identificando as duas expressões obtém-se que a energia cinética passa a ser vista como mais uma energia de interação, assim como todas as outras energias conhecidas. Neste caso, ela passa a ser interpretada como uma energia de interação gravitacional entre o corpo de teste e o conjunto das galáxias distantes quando há movimento translacional entre ambos. Ao integrar-se uma força de Weber aplicada para a gravitação é possível mostrar que o conjunto de galáxias exerce uma força gravitacional sobre os corpos acelerados em relação às galáxias. Esta força é proporcional à massa gravitacional do corpo de teste e à sua aceleração em relação ao conjunto de galáxias. Juntando-se estes resultados com o princípio de equilíbrio dinâmico pôde-se deduzir leis de movimento similares à primeira e segunda leis de Newton. Isto finalmente explicou a proporcionalidade entre a massa inercial e o peso (ou a proporcionalidade entre a massa inercial e a massa gravitacinal). Também deduziu-se o fato de que o melhor sistema de referência inercial de que dispomos é aquele das galáxias distantes. Ou seja, foi explicada a coincidência da mecânica newtoniana de que o conjunto dos corpos astronômicos distantes não gira em relação ao espaço absoluto ou em relação a um referencial inercial. Deduziu-se uma relação ligando grandezas microscópicas (G) com grandezas macroscópicas (H_o e ρ_{go}). Já se sabia que esta relação era verdadeira, mas sem uma explicação convincente de sua origem. Obteve-se uma equivalência completa entre os sistemas ptolomaico e copernicano. Ou seja, a cinemática passou a ser equivalente à dinâmica. Passou então a ser igualmente válido afirmar que a Terra está em movimento em relação ao conjunto de galáxias, como afirmar que a Terra está em repouso e que é o conjunto de galáxias distantes que se move em relação à Terra. Foi também deduzido o fato de que as forças inerciais da mecânica newtoniana, tais como a força centrífuga e a força de Coriolis, são forças reais agindo sobre o corpo de teste e sendo exercidas pelo conjunto de galáxias. Estas forças são de origem gravitacional, surgindo quando há uma rotação *relativa* entre o corpo de prova e o conjunto de galáxias. Esta propriedade explicou o achatamento da Terra como sendo devido à rotação relativa entre a Terra e o conjunto de galáxias. Isto justifica o fato do plano de oscilação do pêndulo de Foucault permanecer em repouso em relação ao conjunto de galáxias. Já no referencial terrestre a força de Coriolis exercida gravitacionalmente pelas galáxias sobre o pêndulo faz com que seu plano de oscilação gire junto com as galáxias em relação ao solo. A mecânica relacional também explicou a concavidade na superfície da água na experiência do balde de Newton como sendo devida à rotação da água em relação ao conjunto de corpos astronômicos distantes, como havia sugerido Mach. É esta rotação *relativa* entre a água e o conjunto de galáxias que ocasiona a concavidade da superfície da água. A concavidade ocorreria não apenas ao girarmos a água em relação ao solo, mantendo as galáxias paradas em relação ao solo, mas também se fosse possível girar rapidamente as galáxias ao redor do eixo do balde, mantendo a água parada no solo. Além do mais, a concavidade passa a ser uma função da densidade média de massa gravitacional no universo, de tal forma que se fosse possível diminuir esta densidade, a concavidade da água diminuiria concomitantemente, mesmo que ela mantivesse a mesma rotação relativa em relação às galáxias.

Agora que obtivemos esta compreensão clara e satisfatória dos fatos fundamentais da mecânica newtoniana, a melhor coisa a fazer em nossa opinião é ir em frente seguindo este enfoque relacional.

Vamos entrar em um novo mundo.

[3] Para uma discussão detalhada de todos estes pontos ver [Ass92b], [Ass94] e [Ass95b].

Parte VII

Apêndices

Apêndice A

Casca Esférica Interagindo com uma Partícula de acordo com a Lei de Weber

Neste Apêndice mostra-se como calcular a energia de interação entre uma partícula de massa gravitacional m_g e uma casca esférica de massa gravitacional M_g, partindo de uma energia potencial de Weber entre dois corpos pontuais. Também será calculada a força exercida por esta casca esférica sobre a partícula, partindo da força de Weber entre dois corpos pontuais. Estes são os cálculos mais importantes de toda a mecânica relacional. Aqui vai ficar clara a principal distinção entre as leis de Newton e de Weber para a gravitação.

Sejam então duas partículas pontuais com massas gravitacionais m_{g1} e m_{g2}. Vamos supor que elas estejam localizadas nos vetores $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ em relação à origem O de um sistema de coordenadas arbitrário S, figura A.1. As velocidade e acelerações destas partículas em relação à origem de S são dadas por, respectivamente: $\vec{v}_1 = d\vec{r}_1/dt$, $\vec{a}_1 = d\vec{v}_1/dt = d^2\vec{r}_1/dt^2$, $\vec{v}_2 = d\vec{r}_2/dt$ e $\vec{a}_2 = d\vec{v}_2/dt = d^2\vec{r}_2/dt^2$.

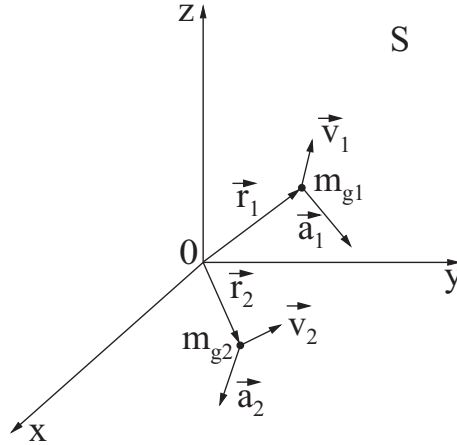



Figura A.1: Posições, velocidades e acelerações das partículas 1 e 2 deslocando em relação à origem O de um referencial S.

A energia de interação entre 1 e 2, U_{12}, de acordo com a lei de Weber é dada pelas equação (16.15), a saber:

$$U_{12} = -H_g \frac{m_{g1} m_{g2}}{r_{12}} \left(1 - \xi \frac{\dot{r}_{12}^2}{2c^2} \right) = -H_g \frac{m_{g1} m_{g2}}{r_{12}} \left[1 - \xi \frac{(\hat{r}_{12} \cdot \vec{v}_{12})^2}{2c^2} \right] . \tag{A.1}$$

Já a força $\vec{F}_{21}$ exercida por 2 em 1 é dada pela equação (16.16), a saber:

$$\vec{F}_{21} = -H_g m_{g1} m_{g2} \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \left[1 - \frac{\xi}{c^2} \left(\frac{\dot{r}_{12}^2}{2} - r_{12} \ddot{r}_{12} \right) \right]$$

$$= -H_g m_{g1} m_{g2} \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \left\{ 1 + \frac{\xi}{c^2} \left[\vec{v}_{12} \cdot \vec{v}_{12} - \frac{3}{2} (\hat{r}_{12} \cdot \vec{v}_{12})^2 + \vec{r}_{12} \cdot \vec{a}_{12} \right] \right\} . \tag{A.2}$$

Nestas equações se assume que H_g e ξ são constantes fundamentais, sendo ξ uma constante adimensional. As grandezas c, r_{12}, $\hat{r}_{12}$, $\dot{r}_{12} \equiv dr_{12}/dt$ e $\ddot{r}_{12} \equiv d\dot{r}_{12}/dt = d^2r_{12}/dt^2$ foram definidas nas equações (2.22) até (2.29).

As contas apresentadas nas próximas Seções também podem ser facilmente adaptadas para uma interação de uma carga pontual com uma casca esférica uniformemente eletrizada, de acordo com a eletrodinâmica de Weber, fazendo as seguintes substituições nas equações (A.1) e (A.2): $H_eq_1q_2$ em vez de $H_gm_{g1}m_{g2}$, assim como $1/c^2$ em vez de ξ/c^2.

A.1 Força Exercida por uma Casca Esférica Parada

O objetivo é calcular a energia gravitacional de $m_{g1} \equiv m_g$ interagindo com uma casca esférica de massa gravitacional M_g e raio R. Também será calculada a força exercida por esta casca sobre a partícula de massa gravitacional m_g. Inicialmente vamos supor que a casca esférica esteja parada em um referencial U e que seu centro coincida com a origem O do referencial U, figura A.2. A posição, velocidade e aceleração da partícula pontual em relação à origem da casca vão ser representadas por, respectivamente: $\vec{r}_1 \equiv \vec{r}_{mU}$, $\vec{v}_1 \equiv \vec{v}_{mU} = d\vec{r}_{mU}/dt$ e $\vec{a}_1 \equiv \vec{a}_{mU} = d\vec{v}_{mU}/dt = d^2\vec{r}_{mU}/dt^2$.

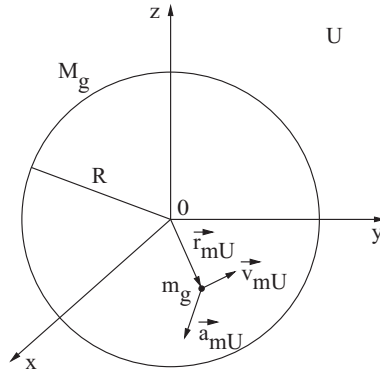



Figura A.2: Casca esférica parada no referencial U interagindo com uma partícula deslocando-se em relação à casca.

Para obter a energia de interação entre m_g e a casca, assim como a força exercida pela casca sobre m_g, temos de substituir nas equações (A.1) e (A.2) a massa m_{g2} por um elemento de massa dm_{g2} e integrar a expressão para toda a casca esférica. Para isto vamos usar coordenadas esféricas $(r,\ \theta,\ \varphi)$ com o ângulo polar θ indo de 0 rad até π rad e com o ângulo azimutal φ indo de 0 rad até 2π rad, figura A.3.

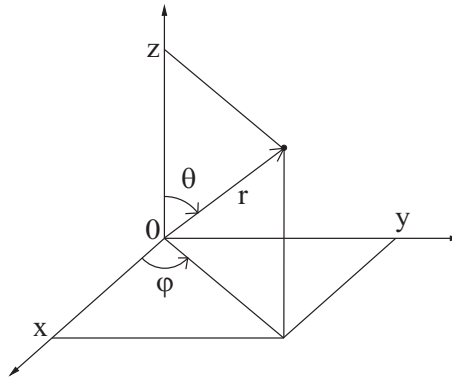



Figura A.3: Coordenadas esféricas $(r,\ \theta,\ \varphi)$.

As coordenadas retangulares $(x,\ y,\ z)$ estão relacionadas com as coordenada esféricas através das relações

$$\left.\begin{array}{l} x = r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \ , \\ y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \ , \\ z = r\cos\theta \ , \end{array}\right\} \tag{A.3}$$

e

$$\left.\begin{array}{l} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \ , \\ \theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \ , \\ \varphi = \arctan \frac{y}{x} \ . \end{array}\right\} \tag{A.4}$$

As relações entre os vetores unitários nestes dois sistemas de coordenadas são dadas por:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{r} = \operatorname{sen}\theta\cos\varphi\hat{x} + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\hat{y} + \cos\theta\hat{z} \ , \\ \hat{\theta} = \cos\theta\cos\varphi\hat{x} + \cos\theta\operatorname{sen}\varphi\hat{y} - \operatorname{sen}\theta\hat{z} \ , \\ \hat{\varphi} = -\operatorname{sen}\varphi\hat{x} + \cos\varphi\hat{y} \ . \end{array}\right\} \tag{A.5}$$

Os vetores posição, velocidade e aceleração nestes dois sistemas de coordenadas são dados por, respectivamente:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = r\hat{r} \ , \\ \vec{v} = d\vec{r}/dt = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta\hat{\varphi} \ , \\ \vec{a} = d\vec{v}/dt = d^2\vec{r}/dt^2 = \ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y} + \ddot{z}\hat{z} \\ = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}^2\theta)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta)\hat{\theta} \\ + (r\ddot{\varphi}\operatorname{sen}\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta)\hat{\varphi} \ . \end{array}\right\} \tag{A.6}$$

Um elemento de área da casca esférica pode ser escrito como $dA_2 = R^2 \operatorname{sen}\theta_2 d\theta_2 d\varphi_2$. Logo um elemento de massa pertencente à casca pode ser escrito como

$$dm_{g2} = \sigma_{g2} dA_2 = \sigma_{g2} R^2 \operatorname{sen}\theta_2 d\theta_2 d\varphi_2 = M_g \frac{\operatorname{sen}\theta_2 d\theta_2 d\varphi_2}{4\pi} \ , \tag{A.7}$$

onde $\sigma_{g2} \equiv M_g/(4\pi R^2)$ é a densidade de massa gravitacional distribuída uniformemente sobre a casca esférica.

Neste referencial U em que a casca esférica está parada temos $\vec{v}_2 = \vec{0}$ e $\vec{a}_2 = \vec{0}$. Logo as grandezas que vão nos interessar para calcular a energia de interação entre m_g e a casca ficam dadas por:

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = (x_1 - R\operatorname{sen}\theta_2\cos\varphi_2)\hat{x} + (y_1 - R\operatorname{sen}\theta_2\operatorname{sen}\varphi_2)\hat{y} + (z_1 - R\cos\theta_2)\hat{z} \ . \tag{A.8}$$

$$r_{12} = |\vec{r}_{12}| = \sqrt{r_1^2 + R^2 - 2r_1R[\cos\theta_1\cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)]} \ , \tag{A.9}$$

$$\hat{r}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} = \frac{(x_1 - R\operatorname{sen}\theta_2\cos\varphi_2)\hat{x} + (y_1 - R\operatorname{sen}\theta_2\operatorname{sen}\varphi_2)\hat{y} + (z_1 - R\cos\theta_2)\hat{z}}{\sqrt{r_1^2 + R^2 - 2r_1R[\cos\theta_1\cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)]}} \ , \tag{A.10}$$

$$\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_1 \equiv \vec{v}_{mU} = \dot{x}_1\hat{x} + \dot{y}_1\hat{y} + \dot{z}_1\hat{z} \ , \tag{A.11}$$

e

$$\vec{a}_{12} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2 = \vec{a}_1 \equiv \vec{a}_{mU} = \ddot{x}_1\hat{x} + \ddot{y}_1\hat{y} + \ddot{z}_1\hat{z} \ . \tag{A.12}$$

De acordo com a equação (A.1), a energia de interação gravitacional entre m_g e a casca, U_{Mm}, fica dada pela seguinte expressão:

$$U_{Mm} = -H_g m_{g1} \int_{\theta_2=0}^{\pi} \int_{\varphi_2=0}^{2\pi} \frac{dm_{g2}}{r_{12}} \left[1 - \xi\frac{(\hat{r}_{12}\cdot\vec{v}_1)^2}{2c^2}\right] \ . \tag{A.13}$$

Para resolver esta integral usamos a equação (A.7) juntamente com as equações (A.8) até (A.12):

$$U_{Mm} = -\frac{H_g m_{g1} M_g}{4\pi} \int_{\theta_2=0}^{\pi} \int_{\varphi_2=0}^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}\theta_2 d\theta_2 d\varphi_2}{\sqrt{r_1^2 + R^2 - 2r_1R[\cos\theta_1\cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)]}}$$

$$\times \left\{1 - \frac{\xi}{2c^2}\left[\frac{(x_1 - R\operatorname{sen}\theta_2\cos\varphi_2)\dot{x}_1 + (y_1 - R\operatorname{sen}\theta_2\operatorname{sen}\varphi_2)\dot{y}_1 + (z_1 - R\cos\theta_2)\dot{z}_1}{\sqrt{r_1^2 + R^2 - 2r_1R[\cos\theta_1\cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)]}}\right]^2\right\} \ . \tag{A.14}$$

A integração desta expressão fornece:

$$U_{Mm}(r_{mU} < R) = -\frac{H_g m_g M_g}{R}\left(1 - \frac{\xi}{6}\frac{\vec{v}_{mU}\cdot\vec{v}_{mU}}{c^2}\right) , \quad \text{(A.15)}$$

e

$$U_{Mm}(r_{mU} > R) = -\frac{H_g m_g M_g}{r_{mU}}\left[1 - \frac{\xi(\hat{r}_{mU}\cdot\vec{v}_{mU})^2}{2c^2} - \frac{\xi}{6}\frac{R^2}{r_{mU}^2}\frac{\vec{v}_{mU}\cdot\vec{v}_{mU} - 3(\hat{r}_{mU}\cdot\vec{v}_{mU})^2}{c^2}\right] . \quad \text{(A.16)}$$

A energia potencial gravitacional newtoniana pode ser obtida a partir destas equações fazendo $\xi/c^2 \to 0$.

Pode-se chegar às equações (A.15) e (A.16) a partir da integração da equação (A.14). Esta integração pode ser feita de várias maneiras. Apresentamos algumas possibilidades a seguir.

A maneira mais simples de obter a equação (A.15) é considerando o caso particular no qual a partícula teste de massa m_g está passando pela origem, figura A.4 (a). Neste caso $r_1 = r_{mU} = 0$ e as integrais podem ser obtidas de modo trivial. Embora a princípio o resultado desta integração só seja válido neste caso particular em que a partícula teste está na origem, este caso simples já mostra como chegar na equação (A.15).

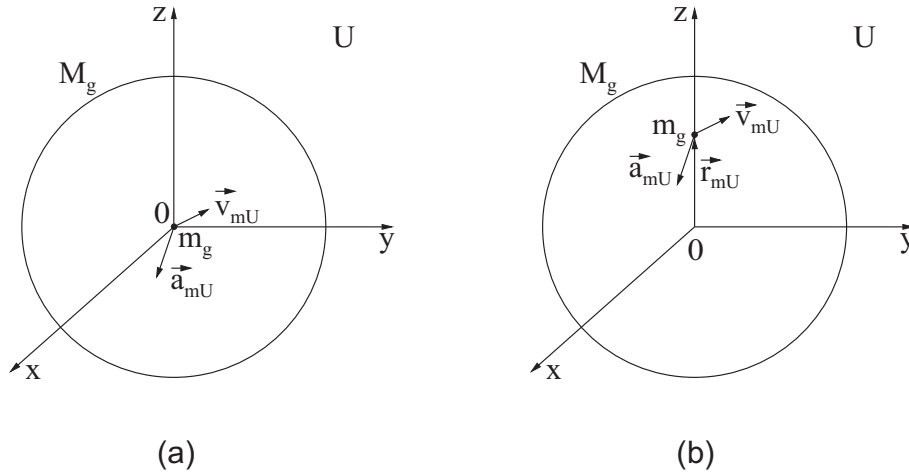



Figura A.4: (a) Partícula no centro da casca. (b) Partícula ao longo do eixo z.

Em seguida considera-se o caso mais geral no qual a partícula está fora da origem, $r_1 \neq 0$. Neste caso pode-se chegar nas equações (A.15) e (A.16) a partir da integração da equação (A.14) considerando um sistema de referências no qual a partícula está ao longo do eixo z, isto é, com $\vec{r}_1 = z_1\hat{z}$, figura A.4 (b). Inicialmente pode-se considerar o caso em que a partícula está parada, $\vec{v}_1 = \vec{0}$. As integrais também ficam simples já que $\theta_1 = 0$. Para integrar em θ_2 pode ser feita a substituição $\cos\theta_2 \equiv u$, $du = -\operatorname{sen}\theta_2 d\theta_2$, $\operatorname{sen}^2\theta_2 = 1 - u^2$, $\int_{\theta_2=0}^{\pi} = \int_{u=1}^{-1}$. Em seguida é possível generalizar este resultado resolvendo-se as mesmas integrais no caso em que $\vec{r}_1 = z_1\hat{z}$, supondo agora que a partícula desloca-se no plano xz, isto é, com $\vec{v}_1 = \dot{x}_1\hat{x} + \dot{z}_1\hat{z}$.

Finalmente generaliza-se este último resultado supondo que a partícula teste tem uma posição qualquer, $\vec{r}_1 = x_1\hat{x} + y_1\hat{y} + z_1\hat{z}$, deslocando-se com uma velocidade arbitrária em relação à origem, $\vec{v}_1 = \dot{x}_1\hat{x} + \dot{y}_1\hat{y} + \dot{z}_1\hat{z}$.

Uma maneira de testar o resultado dado pela equação (A.15) é fazer a integração aproximada da equação (A.14) supondo $r_{mU} \ll R$. Expande-se então o denominador até, por exemplo, a terceira potência de r_{mU}/R. Em seguida são feitas facilmente as integrações em θ_2 e φ_2.

Uma outra maneira de obter as equações (A.15) e (A.16) a partir da equação (A.14) é utilizando os harmônicos esféricos.[1] A ideia aqui é expandir r_{12} e r_{12}^3 em termos dos harmônicos esféricos. A integração dupla em θ_2 e φ_2 pode então ser obtida utilizando as condições de ortonormalidade dos harmônicos esféricos. Este procedimento é um pouco trabalhoso mas funciona perfeitamente bem. Ele pode ser aplicado tanto no caso em que $r_{mU} < R$, quanto no caso em que $r_{mU} > R$.

De forma análoga pode ser obtida a força gravitacional exercida pela casca parada ao atuar sobre a partícula de massa m_g deslocando-se em relação à casca, $\vec{F}_{casca\ parada}$. De acordo com a equação (A.2), a

[1] [Jac75, Seções 3.5 e 3.6], [Jac83] e [Jac99].

força exercida pela casca esférica de massa gravitacional M_g sobre a partícula de massa gravitacional m_g fica dada pela seguinte integral:

$$\vec{F}_{casca\ parada} = -H_g m_{g1} \int_{\theta_2=0}^{\pi} \int_{\varphi_2=0}^{2\pi} dm_{g2} \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \left\{ 1 + \frac{\xi}{c^2} \left[\vec{v}_{12} \cdot \vec{v}_{12} - \frac{3}{2} \left(\hat{r}_{12} \cdot \vec{v}_{12} \right)^2 + \vec{r}_{12} \cdot \vec{a}_{12} \right] \right\} . \quad (A.17)$$

Para resolver esta integral usamos a equação (A.7) juntamente com as equações (A.8) até (A.12). Com estas substituições obtemos a seguinte expressão:

$$\vec{F}_{casca\ parada} = -\frac{H_g m_{g1} M_g}{4\pi} \int_{\theta_2=0}^{\pi} \int_{\varphi_2=0}^{2\pi} \frac{(x_1 - R \operatorname{sen}\theta_2 \cos\varphi_2)\hat{x} + (y_1 - R \operatorname{sen}\theta_2 \operatorname{sen}\varphi_2)\hat{y} + (z_1 - R\cos\theta_2)\hat{z}}{\{r_1^2 + R^2 - 2r_1 R[\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)]\}^{3/2}}$$

$$\times \left\{ 1 + \frac{\xi}{c^2} \left[\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 - \frac{3}{2} \left(\frac{(x_1 - R \operatorname{sen}\theta_2 \cos\varphi_2)\dot{x}_1 + (y_1 - R \operatorname{sen}\theta_2 \operatorname{sen}\varphi_2)\dot{y}_1 + (z_1 - R\cos\theta_2)\dot{z}_1}{\sqrt{r_1^2 + R^2 - 2r_1 R[\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)]}} \right)^2 \right. \right.$$

$$\left. \left. + [(x_1 - R \operatorname{sen}\theta_2 \cos\varphi_2)\ddot{x}_1 + (y_1 - R \operatorname{sen}\theta_2 \operatorname{sen}\varphi_2)\ddot{y}_1 + (z_1 - R\cos\theta_2)\ddot{z}_1] \right] \right\} \operatorname{sen}\theta_2 d\theta_2 d\varphi_2 . \quad (A.18)$$

A integração desta expressão fornece:

$$\vec{F}_{casca\ parada}(r_{mU} < R) = -\frac{H_g \xi m_g M_g}{3Rc^2} \vec{a}_{mU} , \quad (A.19)$$

e

$$\vec{F}_{casca\ parada}(r_{mU} > R) = -\frac{H_g m_g M_g}{r_{mU}^2} \left\{ \left[1 + \frac{\xi}{c^2} \left(\vec{v}_{mU} \cdot \vec{v}_{mU} - \frac{3}{2} (\hat{r}_{mU} \cdot \vec{v}_{mU})^2 + \vec{r}_{mU} \cdot \vec{a}_{mU} \right) \right] \hat{r}_{mU} \right.$$

$$\left. + \frac{\xi}{c^2} \frac{R^2}{r_{mU}^2} \left[\frac{r_{mU}}{3} \vec{a}_{mU} - (\hat{r}_{mU} \cdot \vec{v}_{mU}) \vec{v}_{mU} - \frac{\vec{v}_{mU} \cdot \vec{v}_{mU}}{2} \hat{r}_{mU} + \frac{5}{2} (\hat{r}_{mU} \cdot \vec{v}_{mU})^2 \hat{r}_{mU} - (\vec{r}_{mU} \cdot \vec{a}_{mU}) \hat{r}_{mU} \right] \right\} . \quad (A.20)$$

Por ação e reação obtém-se que a partícula exerce sobre a casca uma força igual e oposta a estas expressões (A.19) e (A.20).

A força gravitacional newtoniana exercida pela casca parada sobre a partícula pode ser obtida a partir destas equações fazendo $\xi/c^2 \to 0$.

A principal diferença que se encontra entre a força de Newton para a gravitação e a força de Weber para a gravitação encontra-se na equação (A.19). Enquanto que a força de Weber é diferente de zero sempre que a partícula estiver acelerada em relação à casca, a força de Newton é sempre nula, não interessando a aceleração da partícula em relação à casca, já que esta força vai a zero quando $\xi/c^2 \to 0$. O próprio Newton foi o primeiro a obter que a casca não exerce força sobre uma partícula deslocando-se internamente à casca, Subseção 1.4.1. A força de Weber dada pela equação (A.19) tem o mesmo valor qualquer que seja a posição da partícula no interior da casca. Este resultado é a base de toda a mecânica relacional, sendo essencial para a implementação matemática do princípio de Mach.

Para chegar nas equações (A.19) e (A.20) podem ser utilizados os mesmos procedimentos que aqueles empregados para obter a energia de interação entre a partícula e a casca.

Por exemplo, a maneira mais simples de obter a equação (A.19) é considerando o caso particular no qual a partícula teste de massa m_g está passando pela origem, figura A.4 (a). Neste caso $r_1 = r_{mU} = 0$ e as integrais podem ser obtidas de modo trivial. Embora a princípio o resultado desta integração só seja válido neste caso particular no qual a partícula está passando pela origem, esta é uma maneira simples de obter a equação (A.19).

Em seguida considera-se o caso mais geral no qual a partícula está fora da origem, $r_1 \neq 0$. Neste caso pode-se chegar nas equações (A.19) e (A.20) a partir da integração da equação (A.18) considerando um sistema de referências no qual a partícula está ao longo do eixo z, isto é, com $\vec{r}_1 = z_1 \hat{z}$, figura A.4 (b). Inicialmente considera-se o caso no qual ela esteja parada, $\vec{v}_1 = \vec{0}$ e $\vec{a}_1 = \vec{0}$. As integrais também ficam

simples já que $\theta_1 = 0$. Para integrar em θ_2 pode ser feita a substituição $\cos\theta_2 \equiv u$, $du = -\operatorname{sen}\theta_2 d\theta_2$, $\operatorname{sen}^2\theta_2 = 1 - u^2$, $\int_{\theta_2=0}^{\pi} = \int_{u=1}^{-1}$. Em seguida é possível generalizar este resultado resolvendo-se as mesmas integrais no caso em que $\vec{r}_1 = z_1\hat{z}$, supondo agora que a partícula desloca-se no plano xz, isto é, com $\vec{v}_1 = \dot{x}_1\hat{x} + \dot{z}_1\hat{z}$ e com $\vec{a}_1 = \ddot{x}_1\hat{x} + \ddot{z}_1\hat{z}$.

Finalmente generaliza-se este último resultado supondo que a partícula teste tem uma posição qualquer, $\vec{r}_1 = x_1\hat{x} + y_1\hat{y} + z_1\hat{z}$, deslocando-se com uma velocidade e com uma aceleração arbitrárias em relação à origem, $\vec{v}_1 = \dot{x}_1\hat{x} + \dot{y}_1\hat{y} + \dot{z}_1\hat{z}$ e $\vec{a}_1 = \ddot{x}_1\hat{x} + \ddot{y}_1\hat{y} + \ddot{z}_1\hat{z}$.

Uma maneira de testar o resultado dado pela equação (A.19) é fazer a integração aproximada da equação (A.18) supondo $r_{mU} \ll R$. Expande-se então o denominador até, por exemplo, a terceira potência de r_{mU}/R. Em seguida são feitas facilmente as integrações em θ_2 e φ_2.

Uma outra maneira de obter as equações (A.19) e (A.20) a partir da equação (A.18) é utilizando os harmônicos esféricos.[2] A ideia aqui é expandir r_{12}^3 e r_{12}^5 em termos dos harmônicos esféricos. A integração dupla em θ_2 e φ_2 pode então ser obtida utilizando as condições de ortonormalidade dos harmônicos esféricos. Este procedimento é um pouco trabalhoso mas funciona perfeitamente bem. Ele pode ser aplicado tanto no caso em que $r_{mU} < R$, quanto no caso em que $r_{mU} > R$.

A.2 Força Exercida por uma Casca Esférica Linearmente Acelerada

Vamos agora considerar um sistema de referência A no qual a partícula de massa $m_{g1} \equiv m_g$ tem um vetor posição, velocidade e aceleração em relação à origem O do referencial A dados por, respectivamente, $\vec{r}_1 \equiv \vec{r}_{mA}$, $\vec{v}_1 \equiv \vec{v}_{mA}$ e $\vec{a}_1 \equiv \vec{a}_{mA}$. Vamos considerar ainda que em um certo instante t o centro da casca esférica de massa gravitacional M_g e raio R esteja passando pela origem O do referencial A. Além disso, vamos supor que neste instante t a casca como um todo esteja deslocando-se com velocidade $\vec{V}_{MA} = V_{MA}^x\hat{x} + V_{MA}^y\hat{y} + V_{MA}^z\hat{z}$ e aceleração $\vec{A}_{MA} = A_{MA}^x\hat{x} + A_{MA}^y\hat{y} + A_{MA}^z\hat{z}$ em relação a este referencial A, figura A.5.

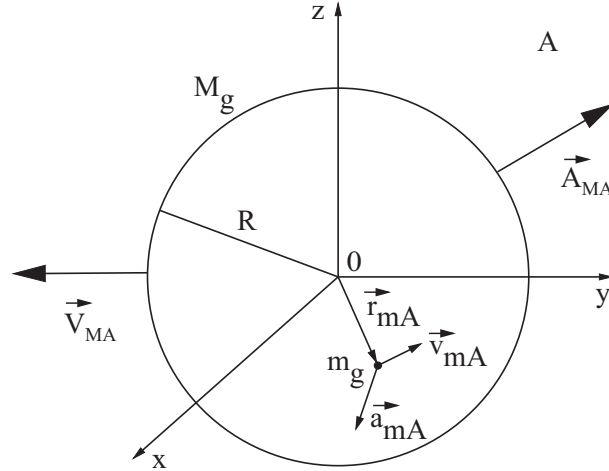



Figura A.5: Casca esférica acelerada em um referencial A e interagindo com uma partícula deslocando-se em relação à casca.

A energia de interação gravitacional entre m_g e a casca, assim como a força gravitacional exercida pela casca sobre m_g, podem ser obtidas a partir da integração das equações (A.1) e (A.2), usando os procedimentos adotados na Seção A.1. A única diferença é que agora a velocidade e a aceleração de um elemento de massa dm_{g2} da casca esférica são dadas por:

$$\vec{v}_2 = \dot{x}_2\hat{x} + \dot{y}_2\hat{y} + \dot{z}_2\hat{z} = V_{MA}^x\hat{x} + V_{MA}^y\hat{y} + V_{MA}^z\hat{z} \ , \tag{A.21}$$

e

$$\vec{a}_2 = \ddot{x}_2\hat{x} + \ddot{y}_2\hat{y} + \ddot{z}_2\hat{z} = A_{MA}^x\hat{x} + A_{MA}^y\hat{y} + A_{MA}^z\hat{z} \ . \tag{A.22}$$

Após a integração os resultados obtidos para a energia de interação entre m_g e a casca são dados por:

[2][Jac75, Seções 3.5 e 3.6], [Jac83] e [Jac99].

$$U_{Mm}(r_{mA} < R) = -\frac{H_g m_g M_g}{R}\left[1 - \frac{\xi}{6}\frac{(\vec{v}_{mA} - \vec{V}_{MA})\cdot(\vec{v}_{mA} - \vec{V}_{MA})}{c^2}\right] , \tag{A.23}$$

e

$$U_{Mm}(r_{mA} > R) = -\frac{H_g m_g M_g}{r_{mA}}\left\{1 - \frac{\xi[\hat{r}_{mA}\cdot(\vec{v}_{mA} - \vec{V}_{MA})]^2}{2c^2}\right.$$

$$\left. - \frac{\xi}{6}\frac{R^2}{r_{mA}^2}\frac{(\vec{v}_{mA} - \vec{V}_{MA})\cdot(\vec{v}_{mA} - \vec{V}_{MA}) - 3(\hat{r}_{mA}\cdot(\vec{v}_{mA} - \vec{V}_{MA}))^2}{c^2}\right\} . \tag{A.24}$$

Já a força exercida pela casca sobre m_g é dada por:

$$\vec{F}_{casca\ acelerada}(r_{mA} < R) = -\frac{H_g \xi m_g M_g}{3Rc^2}(\vec{a}_{mA} - \vec{A}_{MA}) , \tag{A.25}$$

e

$$\vec{F}_{casca\ acelerada}(r_{mA} > R) = -\frac{H_g m_g M_g}{r_{mA}^2}\left\{\left[1 + \frac{\xi}{c^2}\left((\vec{v}_{mA} - \vec{V}_{MA})\cdot(\vec{v}_{mA} - \vec{V}_{MA}) - \frac{3}{2}(\hat{r}_{mA}\cdot(\vec{v}_{mA} - \vec{V}_{MA}))^2\right.\right.\right.$$

$$\left.\left. + \vec{r}_{mA}\cdot(\vec{a}_{mA} - \vec{A}_{MA})\right)\right]\hat{r}_{mA} + \frac{\xi}{c^2}\frac{R^2}{r_{mA}^2}\left[\frac{r_{mA}}{3}(\vec{a}_{mA} - \vec{A}_{MA}) - (\hat{r}_{mA}\cdot(\vec{v}_{mA} - \vec{V}_{MA}))(\vec{v}_{mA} - \vec{V}_{MA})\right.$$

$$\left.\left. - \frac{(\vec{v}_{mA} - \vec{V}_{MA})\cdot(\vec{v}_{mA} - \vec{V}_{MA})}{2}\hat{r}_{mA} + \frac{5}{2}(\hat{r}_{mA}\cdot(\vec{v}_{mA} - \vec{V}_{MA}))^2\hat{r}_{mA} - (\vec{r}_{mA}\cdot(\vec{a}_{mA} - \vec{A}_{MA}))\hat{r}_{mA}\right]\right\} . \tag{A.26}$$

Para chegar nestes resultados podem ser usadas técnicas de integração como aquelas apresentadas na Seção A.1. Uma outra possibilidade é utilizar o fato de que as grandezas que aparecem na força de Weber são totalmente relacionais, já que dependem apenas de r_{12}, $\dot{r}_{12}$ e $\ddot{r}_{12}$. Isto significa que só interessam as distâncias, velocidades radiais e acelerações radiais *entre os corpos que estão interagindo*. Ou seja, o observador (ou o sistema de referência) não é relevante para o resultado final da força. Isto significa que para chegar nas equações (A.23) até (A.26) é possível utilizar as equações (A.15) até (A.20) fazendo uma mudança apropriada das velocidades a acelerações que aparecem nestas expressões.

Por ação e reação, a partícula exerce sobre a casca uma força igual e oposta a estas expressões (A.25) e (A.26).

A.3 Força Exercida por uma Casca Esférica Girando

Vamos agora considerar um sistema de referência R no qual a partícula de massa $m_{g1} \equiv m_g$ tem um vetor posição, velocidade e aceleração em relação à origem O do referencial R dados por, respectivamente, $\vec{r}_1 \equiv \vec{r}_{mR}$, $\vec{v}_1 \equiv \vec{v}_{mR}$ e $\vec{a}_1 \equiv \vec{a}_{mR}$. Vamos considerar ainda que o centro de uma casca esférica de massa gravitacional M_g e raio R coincida com a origem O do referencial R. Além disso, vamos supor que a casca esférica esteja girando com uma velocidade angular $\vec{\Omega}_{MR}(t)$ neste referencial R, figura A.6.

A energia de interação gravitacional entre m_g e a casca, assim como a força gravitacional exercida pela casca sobre m_g, podem ser obtidas a partir da integração das equações (A.1) e (A.2), usando os procedimentos adotados na Seção A.1. A única diferença é que agora o vetor posição, a velocidade e a aceleração de um elemento de massa dm_{g2} da casca esférica, em relação à origem O do referencial R, são dados por, respectivamente:

$$\vec{r}_2 = R \operatorname{sen}\theta_2 \cos\varphi_2 \hat{x} + R \operatorname{sen}\theta_2 \operatorname{sen}\varphi_2 \hat{y} + R\cos\theta_2 \hat{z} . \tag{A.27}$$

$$\vec{v}_2 = \vec{\Omega}_{MR} \times \vec{r}_2 , \tag{A.28}$$

e

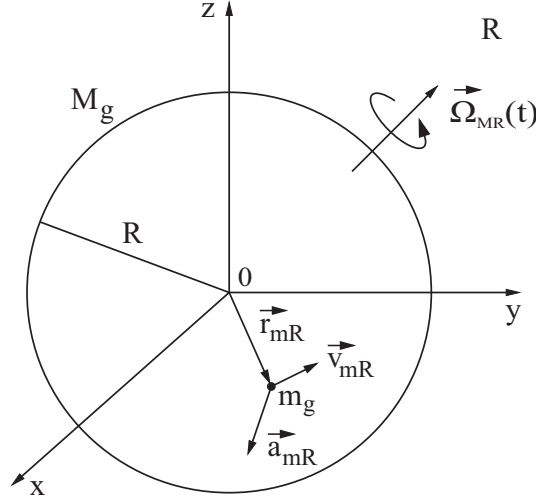



Figura A.6: Casca esférica girando com uma velocidade angular $\vec{\Omega}_{MR}$ em relação ao referencial R e interagindo com uma partícula deslocando-se em relação à casca.

$$\vec{a}_2 = \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \vec{\Omega}_{MR} \times (\vec{\Omega}_{MR} \times \vec{r}_2) + \frac{d\vec{\Omega}_{MR}}{dt} \times \vec{r}_2 \ . \tag{A.29}$$

Após integrar a equação (A.1), assim como foi feito na Seção A.1, obtém-se que a energia de interação entre m_g e a casca é dada por:

$$U_{Mm}(r_{mR} < R) = -\frac{H_g m_g M_g}{R}\left[1 - \frac{\xi}{6}\frac{(\vec{v}_{mR} - \vec{\Omega}_{MR} \times \vec{r}_{mR}) \cdot (\vec{v}_{mR} - \vec{\Omega}_{MR} \times \vec{r}_{mR})}{c^2}\right] \ , \tag{A.30}$$

e

$$U_{Mm}(r_{mR} > R) = -\frac{H_g m_g M_g}{r_{mR}}\left\{1 - \frac{\xi[\hat{r}_{mR} \cdot (\vec{v}_{mR} - \vec{\Omega}_{MR} \times \vec{r}_{mR})]^2}{2c^2}\right.$$

$$\left. - \frac{\xi}{6}\frac{R^2}{r_{mR}^2}\frac{(\vec{v}_{mR} - \vec{\Omega}_{MR} \times \vec{r}_{mR}) \cdot (\vec{v}_{mR} - \vec{\Omega}_{MR} \times \vec{r}_{mR}) - 3[\hat{r}_{mR} \cdot (\vec{v}_{mR} - \vec{\Omega}_{MR} \times \vec{r}_{mR})]^2}{c^2}\right\} \ . \tag{A.31}$$

Após integrar a equação (A.2) pelos procedimentos adotados na Seção A.1, obtém-se que a força exercida pela casca sobre m_g é dada por:

$$\vec{F}_{casca\ girando}(r_{mR} < R) = -\frac{\xi}{3c^2}\frac{H_g m_g M_g}{R}\left[\vec{a}_{mR} + \vec{\Omega}_{MR} \times (\vec{\Omega}_{MR} \times \vec{r}_{mR}) + 2\vec{v}_{mR} \times \vec{\Omega}_{MR} + \vec{r}_{mR} \times \frac{d\vec{\Omega}_{MR}}{dt}\right] \ , \tag{A.32}$$

e

$$\vec{F}_{casca\ girando}(r_{mR} > R) = -\frac{H_g m_g M_g}{r_{mR}^2}\left\{\left[1 + \frac{\xi}{c^2}\left(\vec{v}_{mR} \cdot \vec{v}_{mR} - \frac{3}{2}(\hat{r}_{mR} \cdot \vec{v}_{mR})^2 + \vec{r}_{mR} \cdot \vec{a}_{mR}\right)\right]\hat{r}_{mR}\right.$$

$$+ \frac{\xi}{c^2}\frac{R^2}{r_{mR}^2}\left[\frac{r_{mR}}{3}\vec{a}_{mR} - (\hat{r}_{mR} \cdot \vec{v}_{mR})\vec{v}_{mR} - \frac{\vec{v}_{mR} \cdot \vec{v}_{mR}}{2}\hat{r}_{mR} + \frac{5}{2}(\hat{r}_{mR} \cdot \vec{v}_{mR})^2\hat{r}_{mR} - (\vec{r}_{mR} \cdot \vec{a}_{mR})\hat{r}_{mR}\right.$$

$$+ (\hat{r}_{mR} \cdot \vec{v}_{mR})(\vec{\Omega}_{MR} \times \vec{r}_{mR}) + \frac{2}{3}r_{mR}(\vec{v}_{mR} \times \vec{\Omega}_{MR}) + \frac{r_{mR}}{3}(\vec{\Omega}_{MR} \cdot \vec{r}_{mR})\vec{\Omega}_{MR} + \frac{r_{mR}^2\Omega_{MR}^2}{6}\hat{r}_{mR}$$

$$- \frac{(\vec{r}_{mR} \cdot \vec{\Omega}_{MR})^2}{2} \hat{r}_{mR} + [\vec{r}_{mR} \cdot (\vec{\Omega}_{MR} \times \vec{v}_{mR})] \hat{r}_{mR} + \frac{r_{mR}}{3} \left(\vec{r}_{mR} \times \frac{d\vec{\Omega}_{MR}}{dt} \right) \Bigg] \Bigg\} . \quad \text{(A.33)}$$

Na mecânica clássica os termos com ξ/c^2 não apareceriam.

Para obter estas equações as integrações podem ser feitas como indicado na Seção A.1. Um caso particular que simplifica as contas é aquele no qual $\vec{\Omega} = \Omega \hat{z}$. As contas podem ser feitos neste caso particular, generalizando depois para uma velocidade angular arbitrária.

Uma outra possibilidade para obter estas integrações é utilizar o fato de que as grandezas que aparecem na força de Weber são totalmente relacionais, já que dependem apenas de r_{12}, $\dot{r}_{12}$ e $\ddot{r}_{12}$. Isto significa que só interessam as distâncias, velocidades radiais e acelerações radiais *entre os corpos que estão interagindo.* Ou seja, o observador (ou o sistema de referência) não é relevante para o resultado final da energia entre a casca e a partícula, ou para calcular a força exercida pela casca sobre a partícula. Isto significa que para chegar nas equações (A.30) até (A.33) é possível utilizar as equações (A.15) até (A.20) fazendo uma mudança apropriada das velocidades a acelerações que aparecem nestas expressões.

Por ação e reação, a partícula exerce sobre a casca uma força igual e oposta a estas expressões (A.32) e (A.33).

Suponha que a casca esférica estivesse girando com uma velocidade angular $\vec{\Omega}_{MR}(t)$ em relação ao referencial R. Mas agora vamos supor que o centro da casca esférica esteja localizado em um vetor posição $\vec{R}_{oR}$ em relação à origem O do referencial R, e que este centro da casca esteja deslocando-se com velocidade $\vec{V}_{oR}$ e aceleração $\vec{A}_{oR}$ em relação à origem O do referencial R. Ao integrar as equações (A.1) e (A.2) obteríamos resultados análogos às equações (A.30) até (A.33), mas agora com $\vec{r}_{mR} - \vec{R}_{oR}$, $|\vec{r}_{mR} - \vec{R}_{oR}|$, $\hat{r}_{mo} \equiv (\vec{r}_{mR} - \vec{R}_{oR})/|\vec{r}_{mR} - \vec{R}_{oR}|$, $\vec{v}_{mR} - \vec{V}_{oR}$ e $\vec{a}_{mR} - \vec{A}_{oR}$ no lugar de $\vec{r}_{mR}$, r_{mR}, $\hat{r}_{mR}$, $\vec{v}_{mR}$ e $\vec{a}_{mR}$, respectivamente.

Apêndice B

Casca Esférica Interagindo com uma Partícula com a Lei de Weber com Decaimento Exponencial

B.1 Força Exercida por uma Casca Esférica Parada

O objetivo é calcular a energia gravitacional U_{Mm} de $m_{g1} \equiv m_g$ interagindo com uma casca esférica de massa gravitacional M_g e raio R. Também será calculada a força $\vec{F}_{Mm}$ exercida por esta casca sobre a partícula de massa gravitacional m_{g1}. Mas agora, contrariamente ao que foi feito no Apêndice A, será suposta uma lei de Weber com decaimento exponencial atuando entre cada par de partículas, equações (16.17) e (16.18), a saber:

$$U_{12} = -H_g \frac{m_{g1} m_{g2}}{r_{12}} \left(1 - \xi \frac{\dot{r}_{12}^2}{2c^2} \right) e^{-\alpha r_{12}} \ , \tag{B.1}$$

e

$$\vec{F}_{21} = -H_g m_{g1} m_{g2} \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \left[1 - \frac{\xi}{c^2} \left(\frac{\dot{r}_{12}^2}{2} - r_{12}\ddot{r}_{12} \right) + \alpha r_{12} \left(1 - \frac{\xi}{2} \frac{\dot{r}_{12}^2}{c^2} \right) \right] e^{-\alpha r_{12}} \ . \tag{B.2}$$

Inicialmente vamos supor que a casca esférica esteja parada em um referencial U e que seu centro coincida com a origem O do referencial U. Neste caso com decaimento exponencial só vai nos interessar neste livro a situação na qual a partícula teste esteja no centro da casca, $\vec{r}_1 \equiv \vec{r}_{mU} = \vec{0}$. A velocidade e a aceleração desta partícula em relação ao centro da casca podem ser consideradas como tendo valores quaisquer: $\vec{v}_1 \equiv \vec{v}_{mU} = d\vec{r}_{mU}/dt$ e $\vec{a}_1 \equiv \vec{a}_{mU} = d\vec{v}_{mU}/dt = d^2\vec{r}_{mU}/dt^2$, figura A.4 (a).

Assim como no Apêndice A, Seção A.1, vamos utilizar coordenadas esféricas, figura A.3. As grandezas que vão nos interessar nas equações (B.1) e (B.2) são dadas por, com $\vec{r}_1 = \vec{0}$, $\vec{v}_2 = \vec{0}$ e $\vec{a}_2 = \vec{0}$:

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = -\vec{r}_2 = -R \operatorname{sen}\theta_2 \cos\varphi_2 \hat{x} - R \operatorname{sen}\theta_2 \operatorname{sen}\varphi_2 \hat{y} - R\cos\theta_2 \hat{z} \ , \tag{B.3}$$

$$r_{12} = |\vec{r}_{12}| = |\vec{r}_2| = R \ , \tag{B.4}$$

$$\hat{r}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} = -\frac{\vec{r}_2}{R} = -\operatorname{sen}\theta_2 \cos\varphi_2 \hat{x} - \operatorname{sen}\theta_2 \operatorname{sen}\varphi_2 \hat{y} - \cos\theta_2 \hat{z} \ , \tag{B.5}$$

$$\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_1 \equiv \vec{v}_{mU} = \dot{x}_1 \hat{x} + \dot{y}_1 \hat{y} + \dot{z}_1 \hat{z} \ , \tag{B.6}$$

e

$$\vec{a}_{12} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2 = \vec{a}_1 \equiv \vec{a}_{mU} = \ddot{x}_1 \hat{x} + \ddot{y}_1 \hat{y} + \ddot{z}_1 \hat{z} \ . \tag{B.7}$$

Com as definições de $\dot{r}_{12}$ e $\ddot{r}_{12}$ dadas pelas equações (2.28) e (2.29), obtém-se, a partir das equações (B.3) até (B.7):

$$\dot{r}_{12} = \hat{r}_{12} \cdot \vec{v}_{12} = -\dot{x}_1 \operatorname{sen}\theta_2 \cos\varphi_2 - \dot{y}_1 \operatorname{sen}\theta_2 \operatorname{sen}\varphi_2 - \dot{z}_1 \cos\theta_2 \ , \tag{B.8}$$

e

$$\ddot{r}_{12} = \frac{\vec{v}_{12} \cdot \vec{v}_{12} - (\hat{r}_{12} \cdot \vec{v}_{12})^2 + \vec{r}_{12} \cdot \vec{a}_{12}}{r_{12}} = \frac{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2 - (\dot{x}_1 \operatorname{sen}\theta_2 \cos\varphi_2 + \dot{y}_1 \operatorname{sen}\theta_2 \operatorname{sen}\varphi_2 + \dot{z}_1 \cos\theta_2)^2}{R}$$

$$- \ddot{x}_1 \operatorname{sen}\theta_2 \cos\varphi_2 - \ddot{y}_1 \operatorname{sen}\theta_2 \operatorname{sen}\varphi_2 - \ddot{z}_1 \cos\theta_2 \ . \tag{B.9}$$

Substituindo m_{g2} por dm_{g2} dado pela equação (A.7), utilizando a equação (B.4) e integrando por toda a superfície da casca esférica as equações (B.1) e (B.2) obtém-se:

$$U_{Mm} = -H_g \frac{m_{g1} M_g e^{-\alpha R}}{4\pi R} \int_{\theta_2=0}^{\pi} \int_{\varphi_2=0}^{2\pi} \left(1 - \xi \frac{\dot{r}_{12}^2}{2c^2}\right) \operatorname{sen}\theta_2 d\theta_2 d\varphi_2 \ , \tag{B.10}$$

e

$$\vec{F}_{Mm} = -\frac{H_g m_{g1} M_g e^{-\alpha R}}{4\pi R^2} \int_{\theta_2=0}^{\pi} \int_{\varphi_2=0}^{2\pi} \hat{r}_{12} \left[1 - \frac{\xi}{c^2}\left(\frac{\dot{r}_{12}^2}{2} - R\ddot{r}_{12}\right) + \alpha R \left(1 - \frac{\xi}{2}\frac{\dot{r}_{12}^2}{c^2}\right)\right] \operatorname{sen}\theta_2 d\theta_2 d\varphi_2 \ . \tag{B.11}$$

Finalmente, utilizando as equações (B.8) e (B.9) os resultados destas integrações duplas ficam dados por:

$$U_{Mm} = -\frac{H_g m_g M_g e^{-\alpha R}}{R} \left(1 - \frac{\xi}{6}\frac{\vec{v}_{mU} \cdot \vec{v}_{mU}}{c^2}\right) \ , \tag{B.12}$$

e

$$\vec{F}_{casca\ parada} = -\frac{H_g \xi m_g M_g e^{-\alpha R}}{3Rc^2} \vec{a}_{mU} \ . \tag{B.13}$$

Por ação e reação, a partícula exerce sobre a casca uma força igual e oposta a esta expressão (B.13).

B.2 Força Exercida por uma Casca Esférica Linearmente Acelerada

Neste caso a única situação que vai nos interessar neste livro quando há um decaimento exponencial é aquele no qual a partícula está passando pela origem. Vamos agora considerar a interação entre a partícula de massa gravitacional $m_{g1} \equiv m_g$ e a casca esférica de massa gravitacional M_g quando a partícula está passando pela origem da casca, que coincide com a origem do sistema de coordenadas no instante t. Ou seja, o caso que nos interessa é aquele no qual o vetor posição da partícula vale $\vec{r}_1 \equiv \vec{r}_{mA} = \vec{0}$, com a partícula tendo uma velocidade $\vec{v}_1 \equiv \vec{v}_{mA}$ e aceleração $\vec{a}_1 \equiv \vec{a}_{mA}$ em relação a um referencial A, sendo que a casca esférica de raio R está deslocando-se como um todo neste referencial, no instante t, com velocidade $\vec{V}_{MA}$ e aceleração $\vec{A}_{MA}$, figura B.1.

Como as grandezas que aparecem nas equações (B.1) e (B.2) são totalmente relacionais, após integrá-las sobre toda a casca vamos obter os resultados das equações (B.12) e (B.13) com $\vec{v}_{mA} - \vec{V}_{MA}$ no lugar de $\vec{v}_{mU}$ e com $\vec{a}_{mA} - \vec{A}_{MA}$ no lugar de $\vec{a}_{mU}$, ou seja:

$$U_{Mm} = -\frac{H_g m_g M_g e^{-\alpha R}}{R} \left[1 - \frac{\xi}{6}\frac{(\vec{v}_{mA} - \vec{V}_{MA}) \cdot (\vec{v}_{mA} - \vec{V}_{MA})}{c^2}\right] \ , \tag{B.14}$$

e

$$\vec{F}_{casca\ acelerada} = -\frac{H_g \xi m_g M_g e^{-\alpha R}}{3Rc^2} (\vec{a}_{mA} - \vec{A}_{MA}) \ . \tag{B.15}$$

Como a lei de Weber com decaimento exponencial satisfaz ao princípio de ação e reação, a força exercida pela partícula m_{g1} sobre a casca esférica vai ser dada pela equação (B.15) com uma troca global de sinal.

Ou seja, também com uma lei de Weber com decaimento exponencial obtém-se que só vão interessar na energia e na força de interação a velocidade relativa entre a partícula e a casca esférica, $\vec{v}_{mA} - \vec{V}_{MA}$, assim como a aceleração relativa entre a partícula e a casca esférica, $\vec{a}_{mA} - \vec{A}_{MA}$.

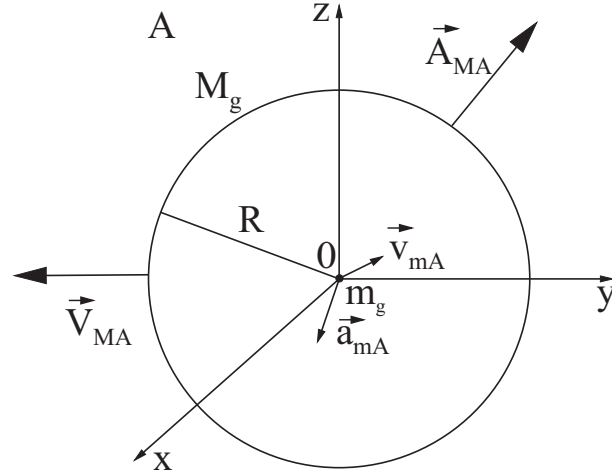



Figura B.1: Casca esférica acelerada em um referencial A e interagindo com uma partícula passando pelo centro da casca e deslocando-se em relação à casca.

B.3 Força Exercida por uma Casca Esférica Girando

Vamos agora considerar um sistema de referência R no qual a partícula de massa $m_{g1} \equiv m_g$ tem um vetor posição, velocidade e aceleração em relação à origem O do referencial R dados por, respectivamente, $\vec{r}_1 \equiv \vec{r}_{mR}$, $\vec{v}_1 \equiv \vec{v}_{mR}$ e $\vec{a}_1 \equiv \vec{a}_{mR}$. Vamos considerar ainda que o centro de uma casca esférica de massa gravitacional M_g e raio R coincida com a origem O do referencial R. Além disso, vamos supor que a casca esférica esteja girando com uma velocidade angular $\vec{\Omega}_{MR}(t)$ neste referencial R, figura A.6.

Neste caso a única situação que vai nos interessar neste livro quando há um decaimento exponencial é aquele no qual a partícula está bem próxima da origem, ou seja, quando $r_1 \equiv r_{mR} \ll R$.

A energia de interação gravitacional entre m_g e a casca, assim como a força gravitacional exercida pela casca sobre m_g, podem ser obtidas a partir da integração das equações (B.1) e (B.2), usando os procedimentos adotados na Seção A.1. A única diferença é que agora o vetor posição, a velocidade e a aceleração de um elemento de massa dm_{g2} da casca esférica, em relação à origem O do referencial R, são dados pelas equações (A.27), (A.28) e (A.29), respectivamente. Com isto obtemos:

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = (x_1 - R \operatorname{sen} \theta_2 \cos \varphi_2)\hat{x} + (y_1 - R \operatorname{sen} \theta_2 \operatorname{sen} \varphi_2)\hat{y} + (z_1 - R \cos \theta_2)\hat{z} \ . \tag{B.16}$$

$$r_{12} = |\vec{r}_{12}| \approx R \ , \tag{B.17}$$

$$\hat{r}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} \approx \frac{(x_1 - R \operatorname{sen} \theta_2 \cos \varphi_2)\hat{x} + (y_1 - R \operatorname{sen} \theta_2 \operatorname{sen} \varphi_2)\hat{y} + (z_1 - R \cos \theta_2)\hat{z}}{R} \ , \tag{B.18}$$

$$\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_1 - \vec{\Omega}_{MR} \times \vec{r}_2 \ , \tag{B.19}$$

e

$$\vec{a}_{12} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2 = \vec{a}_1 - \vec{\Omega}_{MR} \times (\vec{\Omega}_{MR} \times \vec{r}_2) - \frac{d\vec{\Omega}_{MR}}{dt} \times \vec{r}_2 \ . \tag{B.20}$$

Após integrar a equação (B.1), assim como foi feito na Seção A.1, obtém-se que a energia de interação entre m_g e a casca é dada por:

$$U_{Mm}(r_{mR} \ll R) = -\frac{H_g m_g M_g}{R} \left[1 - \frac{\xi}{6} \frac{(\vec{v}_{mR} - \vec{\Omega}_{MR} \times \vec{r}_{mR}) \cdot (\vec{v}_{mR} - \vec{\Omega}_{MR} \times \vec{r}_{mR})}{c^2} \right] e^{-\alpha R} \ . \tag{B.21}$$

Após integrar a equação (B.2) pelos procedimentos adotados na Seção A.1, obtém-se que a força exercida pela casca sobre m_g é dada por:

$$\vec{F}_{casca\ girando}(r_{mR} \ll R) = -\frac{\xi}{3c^2}\frac{H_g m_g M_g}{R}\left[\vec{a}_{mR} + \vec{\Omega}_{MR} \times (\vec{\Omega}_{MR} \times \vec{r}_{mR}) \right.$$

$$\left. + 2\vec{v}_{mR} \times \vec{\Omega}_{MR} + \vec{r}_{mR} \times \frac{d\vec{\Omega}_{MR}}{dt}\right] e^{-\alpha R} \ . \tag{B.22}$$

Na mecânica clássica os termos com ξ/c^2 não apareceriam.

Para obter estas equações as integrações podem ser feitas como indicado na Seção A.1. Um caso particular que simplifica as contas é aquele no qual $\vec{\Omega} = \Omega\hat{z}$.

Uma outra possibilidade para chegar nestes resultados é utilizar o fato de que as grandezas que aparecem na força de Weber são totalmente relacionais, já que dependem apenas de r_{12}, $\dot{r}_{12}$ e $\ddot{r}_{12}$. Isto significa que só interessam as distâncias, velocidades radiais e acelerações radiais *entre os corpos que estão interagindo*. Ou seja, o observador (ou o sistema de referência) não é relevante para o resultado final da energia entre a casca e a partícula, ou para calcular a força exercida pela casca sobre a partícula. Isto significa que para chegar nas equações (B.21) e (B.22) é possível utilizar as equações (B.12) e (B.13) fazendo uma mudança apropriada das velocidades a acelerações que aparecem nestas expressões.

Por ação e reação, a partícula exerce sobre a casca uma força igual e oposta à expressão (B.22).

Suponha que a casca esférica estivesse girando com uma velocidade angular $\vec{\Omega}_{MR}(t)$ em relação ao referencial R. Mas agora vamos supor que o centro da casca esférica esteja localizado em um vetor posição $\vec{R}_{oR}$ em relação à origem O do referencial R, e que este centro da casca esteja deslocando-se com velocidade $\vec{V}_{oR}$ e aceleração $\vec{A}_{oR}$ em relação à origem O do referencial R. Ao integrar as equações (A.1) e (A.2) obteríamos resultados análogos às equações (A.30) até (A.33), mas agora com $\vec{r}_{mR} - \vec{R}_{oR}$, $|\vec{r}_{mR} - \vec{R}_{oR}|$, $\hat{r}_{mo} \equiv (\vec{r}_{mR} - \vec{R}_{oR})/|\vec{r}_{mR} - \vec{R}_{oR}|$, $\vec{v}_{mR} - \vec{V}_{oR}$ e $\vec{a}_{mR} - \vec{A}_{oR}$ no lugar de $\vec{r}_{mR}$, r_{mR}, $\hat{r}_{mR}$, $\vec{v}_{mR}$ e $\vec{a}_{mR}$, respectivamente.

Referências Bibliográficas

[AB95] A. K. T. Assis and Marcelo Bueno. Longitudinal forces in Weber's electrodynamics. *International Journal of Modern Physics B*, 9:3689–3696, 1995.

[AB96] A. K. T. Assis and Marcelo A. Bueno. Equivalence between Ampère and Grassmann's forces. *IEEE Transactions on Magnetics*, 32:431–436, 1996.

[AC91] A. K. T. Assis and J. J. Caluzi. A limitation of Weber's law. *Physics Letters A*, 160:25–30, 1991.

[AC92] A. K. T. Assis and R. A. Clemente. The ultimate speed implied by theories of Weber's type. *International Journal of Theoretical Physics*, 31:1063–1073, 1992.

[AC93] A. K. T. Assis and R. A. Clemente. The influence of temperature on gravitation. *Il Nuovo Cimento B*, 108:713–716, 1993.

[AC11] A. K. T. Assis and J. P. M. d. C. Chaib. *Eletrodinâmica de Ampère: Análise do Significado e da Evolução da Força de Ampère, Juntamente com a Tradução Comentada de Sua Principal Obra sobre Eletrodinâmica*. Editora da Unicamp, Campinas, 2011. ISBN: 9788526809383.

[AFC00] A. K. T. Assis, J. Fukai, and H. B. Carvalho. Weberian induction. *Physics Letters A*, 268:274–278, 2000.

[AG95] A. K. T. Assis and P. Graneau. The reality of Newtonian forces of inertia. *Hadronic Journal*, 18:271–289, 1995.

[AG96] A. K. T. Assis and P. Graneau. Nonlocal forces of inertia in cosmology. *Foundations of Physics*, 26:271–283, 1996.

[AGV00] A. K. T. Assis and J. Guala-Valverde. Mass in relational mechanics. *Apeiron*, 7:131–132, 2000.

[AGV02] A. K. T. Assis and J. Guala-Valverde. On absolute and relative motions in physics. *Journal of New Energy*, 6:8–12, 2002.

[AGV03] A. K. T. Assis and J. Guala-Valverde. Frequency in relational mechanics. *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, 28:83–97, 2003.

[AH48] R. A. Alpher and R. Herman. Evolution of the universe. *Nature*, 162:774–775, 1948.

[AH49] R. A. Alpher and R. C. Herman. Remarks on the evolution of the expanding universe. *Physical Review*, 75:1089–1095, 1949.

[AH06] A. K. T. Assis and J. A. Hernandes. Magnetic energy and effective inertial mass of the conduction electrons in circuit theory. *Electromagnetic Phenomena*, 6:31–35, 2006.

[AH07] A. K. T. Assis and J. A. Hernandes. *The Electric Force of a Current: Weber and the Surface Charges of Resistive Conductors Carrying Steady Currents*. Apeiron, Montreal, 2007. ISBN: 9780973291155. Disponível em: www.ifi.unicamp.br/~assis.

[AH09] A. K. T. Assis and J. A. Hernandes. *A Força Elétrica de uma Corrente: Weber e as Cargas Superficiais de Condutores Resistivos com Correntes Constantes*. Edusp e Edufal, São Paulo e Maceió, 2009. Volume 73 da Coleção Acadêmica. ISBNs: 9788531411236 e 9788571774315.

[Ale84] H. G. Alexander (ed.). *The Leibniz-Clarke Correspondence*. Manchester University Press, Manchester, 1984.

[Amp20a] A.-M. Ampère. Mémoire présenté à l'Académie royale des Sciences, le 2 octobre 1820, où se trouve compris le résumé de ce qui avait été lu à la même Académie les 18 et 25 septembre 1820, sur les effets des courans électriques. *Annales de Chimie et de Physique*, 15:59–76, 1820.

[Amp20b] A.-M. Ampère. Suite du Mémoire sur l'Action mutuelle entre deux courans électriques, entre un courant électrique et un aimant ou le globe terrestre, et entre deux aimants. *Annales de Chimie et de Physique*, 15:170–218, 1820.

[Amp22a] A.-M. Ampère. Mémoire sur la Détermination de la formule qui représente l'action mutuelle de deux portions infiniment petites de conducteurs voltaïques. Lu à l'Académie royale des Sciences, dans la séance du 10 juin 1822. *Annales de Chimie et de Physique*, 20:398–421, 1822.

[Amp22b] A.-M. Ampère. Second mémoire sur la Détermination de la formule que représente l'action mutuelle de deux portions infiniment petites de conducteurs voltaïques. In A.-M. Ampère, editor, *Recueil d'Observations Électro-dynamiques*, pages 293–318. Crochard, Paris, 1822. Apesar da data, este volume foi publicado apenas em 1823.

[Amp23] A.-M. Ampère. Mémoire sur la théorie mathématique des phénomènes électro-dynamiques uniquement déduite de l'expérience, dans lequel se trouvent réunis les Mémoires que M. Ampère a communiqués à l'Académie royale des Sciences, dans les séances des 4 et 26 décembre 1820, 10 juin 1822, 22 décembre 1823, 12 septembre et 21 novembre 1825. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France*, 6:175–387, 1823. Apesar da data, este volume foi publicado apenas em 1827.

[Amp26] A.-M. Ampère. *Théorie des Phénomènes Électro-dynamiques, Uniquement Déduite de l'Expérience*. Méquignon-Marvis, Paris, 1826.

[Amp85] A.-M. Ampère. Second mémoire sur la détermination de la formule qui représente l'action mutuelle de deux portions infiniment petites de conducteurs voltaïques, lu à l'Académie royale des Sciences, le 10 juin 1822. In J. Joubert, editor, *Collection de Mémoires relatifs a la Physique,* Vol. II: *Mémoires sur l'Électrodynamique*, pages 270–289. Gauthier-Villars, Paris, 1885.

[AN95a] A. K. T. Assis and M. C. D. Neves. History of the 2.7 K temperature prior to Penzias and Wilson. *Apeiron*, 2:79–84, 1995.

[AN95b] A. K. T. Assis and M. C. D. Neves. The redshift revisited. *Astrophysics and Space Science*, 227:13–24, 1995. Este artigo também foi publicado em *Plasma Astrophysics and Cosmology*, A. L. Peratt (editor), (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995), págs. 13-24.

[ANS08] A. K. T. Assis, M. C. D. Neves, and D. S. d. L. Soares. A cosmologia de Hubble: De um universo finito em expansão a um universo infinito no espaço e no tempo. In M. C. D. Neves and J. A. P. d. Silva, editors, *Evoluções e Revoluções: O Mundo em Transição*, pages 199–221. Editora Massoni e LCV Edições, Maringá, 2008.

[ANS09] A. K. T. Assis, M. C. D. Neves, and D. S. L. Soares. Hubble's cosmology: from a finite expanding universe to a static endless universe. In F. Potter, editor, *2nd Crisis in Cosmology Conference, CCC-2*, pages 255–267, San Francisco, 2009. Astronomical Society of the Pacific. APS Conference Series, Volume 413.

[AP92] A. K. T. Assis and F. M. Peixoto. On the velocity in the Lorentz force law. *The Physics Teacher*, 30:480–483, 1992.

[Arc89] T. Archibald. Energy and the mathematization of electrodynamics in Germany, 1845-1875. *Archives Internationales d'Histoire des Sciences*, 39:276–308, 1989.

[ARV09] A. K. T. Assis, J. E. A. Ribeiro, and A. Vannucci. The field concepts of Faraday and Maxwell. In M. S. D. Cattani, L. C. B. Crispino, M. O. C. Gomes, and A. F. S. Santoro, editors, *Trends in Physics: Festscrift in Homage to Prof. José Maria Filardo Bassalo*, pages 31–38. Livraria da Física, São Paulo, 2009.

[Ass89a] A. K. T. Assis. On Mach's principle. *Foundations of Physics Letters*, 2:301–318, 1989.

[Ass89b] A. K. T. Assis. Weber's law and mass variation. *Physics Letters A*, 136:277–280, 1989.

[Ass90a] A. K. T. Assis. Deriving Ampère's law from Weber's law. *Hadronic Journal*, 13:441–451, 1990.

[Ass90b] A. K. T. Assis. Modern experiments related to Weber's electrodynamics. In U. Bartocci and J. P. Wesley, editors, *Proceedings of the Conference on Foundations of Mathematics and Physics*, pages 8–22, Blumberg, Germany, 1990. Benjamin Wesley Publisher.

[Ass91a] A. K. T. Assis. Can a steady current generate an electric field? *Physics Essays*, 4:109–114, 1991.

[Ass91b] A. K. T. Assis. Wilhelm Eduard Weber (1804-1891) — Sua vida e sua obra. *Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência*, 5:53–59, 1991.

[Ass92a] A. K. T. Assis. Centrifugal electrical force. *Communications in Theoretical Physics*, 18:475–478, 1992.

[Ass92b] A. K. T. Assis. *Curso de Eletrodinâmica de Weber*. Setor de Publicações do Instituto de Física da Universidade Estadual de Campinas — UNICAMP, Campinas, 1992. Notas de Física IFGW Número 5. Disponível em: www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Ass92c] A. K. T. Assis. Deriving gravitation from electromagnetism. *Canadian Journal of Physics*, 70:330–340, 1992.

[Ass92d] A. K. T. Assis. On forces that depend on the acceleration of the test body. *Physics Essays*, 5:328–330, 1992.

[Ass92e] A. K. T. Assis. On Hubble's law of redshift, Olbers' paradox and the cosmic background radiation. *Apeiron*, 12:10–16, 1992.

[Ass92f] A. K. T. Assis. On the absorption of gravity. *Apeiron*, 13:3–11, 1992.

[Ass92g] A. K. T. Assis. On the mechanism of railguns. *Galilean Electrodynamics*, 3:93–95, 1992.

[Ass92h] A. K. T. Assis. Teorias de ação a distância — uma tradução comentada de um texto de James Clerk Maxwell. *Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência*, 7:53–76, 1992.

[Ass93a] A. K. T. Assis. Changing the inertial mass of a charged particle. *Journal of the Physical Society of Japan*, 62:1418–1422, 1993.

[Ass93b] A. K. T. Assis. Compliance of a Weber's force law for gravitation with Mach's principle. In P. N. Kropotkin *et al.*, editor, *Space and Time Problems in Modern Natural Science, Part II*, pages 263–270, St.-Petersburg, 1993. Tomsk Scientific Center of the Russian Academy of Sciences. Series: "The Universe Investigation Problems," Issue 16.

[Ass93c] A. K. T. Assis. A steady-state cosmology. In H. C. Arp, C. R. Keys, and K. Rudnicki, editors, *Progress in New Cosmologies: Beyond the Big Bang*, pages 153–167, New York, 1993. Plenum Press.

[Ass94] A. K. T. Assis. *Weber's Electrodynamics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994. ISBN: 0792331370.

[Ass95a] A. K. T. Assis. Acceleration dependent forces: reply to Smulsky. *Apeiron*, 2:25, 1995.

[Ass95b] A. K. T. Assis. *Eletrodinâmica de Weber — Teoria, Aplicações e Exercícios*. Editora da Universidade Estadual de Campinas — UNICAMP, Campinas, 1995. ISBN: 8526803581.

[Ass95c] A. K. T. Assis. A eletrodinâmica de Weber e seus desenvolvimentos recentes. *Ciência e Natura*, 17:7–16, 1995.

[Ass95d] A. K. T. Assis. Gravitation as a fourth order electromagnetic effect. In T. W. Barrett and D. M. Grimes, editors, *Advanced Electromagnetism: Foundations, Theory and Applications*, pages 314–331, Singapore, 1995. World Scientific.

[Ass95e] A. K. T. Assis. Weber's force versus Lorentz's force. *Physics Essays*, 8:335–341, 1995.

[Ass95f] A. K. T. Assis. Weber's law and Mach's principle. In J. B. Barbour and H. Pfister, editors, *Mach's Principle — From Newton's Bucket to Quantum Gravity*, pages 159–171, Boston, 1995. Birkhäuser.

[Ass96] A. K. T. Assis. Sobre os corpos flutuantes — tradução comentada de um texto de Arquimedes. *Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência*, 16:69–80, 1996.

[Ass97] A. K. T. Assis. Circuit theory in Weber electrodynamics. *European Journal of Physics*, 18:241–246, 1997.

[Ass98] A. K. T. Assis. *Mecânica Relacional*. Editora do Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência da UNICAMP/FAPESP, Campinas, 1998. ISBN: 8586497010. Disponível em: www.ifi.unicamp.br/˜assis.

[Ass99a] A. K. T. Assis. *Relational Mechanics*. Apeiron, Montreal, 1999. ISBN: 0968368921. Disponível em: www.ifi.unicamp.br/˜assis.

[Ass99b] A. K. T. Assis. *Uma Nova Física*. Editora Perspectiva, São Paulo, 1999. ISBN: 8527301997.

[Ass01] A. K. T. Assis. Applications of the principle of physical proportions to gravitation. In K. Rudnicki, editor, *Gravitation, Electromagnetism and Cosmology — Toward a New Synthesis*, pages 1–7, Montreal, 2001. Apeiron.

[Ass03a] A. K. T. Assis. The relationship between Mach's principle and the principle of physical proportions. In M. Sachs and A. R. Roy, editors, *Mach's Principle and the Origin of Inertia*, pages 37–44, Montreal, 2003. Apeiron.

[Ass03b] A. K. T. Assis. Tradução de uma obra de Gauss. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 25:226–249, 2003.

[Ass04] A. K. T. Assis. The principle of physical proportions. *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, 29:149–171, 2004.

[Ass08a] A. K. T. Assis. *Archimedes, the Center of Gravity, and the First Law of Mechanics*. Apeiron, Montreal, 2008. Primeira edição. ISBN: 9780973291162. Disponível em: www.ifi.unicamp.br/˜assis.

[Ass08b] A. K. T. Assis. *Arquimedes, o Centro de Gravidade e a Lei da Alavanca*. Apeiron, Montreal, 2008. ISBN: 9780973291179. Disponível em: www.ifi.unicamp.br/˜assis.

[Ass10a] A. K. T. Assis. *Archimedes, the Center of Gravity, and the First Law of Mechanics: The Law of the Lever*. Apeiron, Montreal, 2010. Segunda edição. ISBN: 9780986492648. Disponível em: www.ifi.unicamp.br/˜assis.

[Ass10b] A. K. T. Assis. *Os Fundamentos Experimentais e Históricos da Eletricidade*. Apeiron, Montreal, 2010. ISBN: 9780986492617. Disponível em: www.ifi.unicamp.br/˜assis.

[Ass10c] A. K. T. Assis. Wilhelm Weber's works translated into English. *21st Century Science & Technology*, Vol. 22, No. 4:67–69, 2010.

[Ass11a] A. K. T. Assis. *Arquimedes, o Centro de Gravidade e a Lei da Alavanca*. Livraria da Física, São Paulo, 2011. ISBN: 9788578611057.

[Ass11b] A. K. T. Assis. *Os Fundamentos Experimentais e Históricos da Eletricidade*. Livraria da Física, São Paulo, 2011. ISBN: 9788578610975.

[AT94] A. K. T. Assis and D. S. Thober. Unipolar induction and Weber's electrodynamics. In M. Barone and F. Selleri, editors, *Frontiers of Fundamental Physics*, pages 409–414, New York, 1994. Plenum Press.

[AW11] A. K. T. Assis and K. H. Wiederkehr. Weber's Planetary Model of the Atom. In G. Wolfschmidt, editor, *Weber's Planetary Model of the Atom*, volume 19 of Nuncius Hamburgensis — Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften, chapter 1, pages 17–101. Tredition Science, Hamburg, 2011. ISBN: 9783842402416.

[AZ01] A. K. T. Assis and A. Zylbersztajn. The influence of Ernst Mach in the teaching of mechanics. *Science and Education*, 10:137–144, 2001.

[BA95] Marcelo A. Bueno and A. K. T. Assis. A new method for inductance calculations. *Journal of Physics D*, 28:1802–1806, 1995.

[BA98] Marcelo Bueno and A. K. T. Assis. *Cálculo de Indutância e de Força em Circuitos Elétricos*. Editora da UFSC e Editora da UEM, Florianópolis e Maringá, 1998. ISBN: 8532801196.

[BA01] M. d. A. Bueno and A. K. T. Assis. *Inductance and Force Calculations in Electrical Circuits*. Nova Science Publishers, Huntington, New York, 2001. ISBN: 1560729171.

[Bar74] J. B. Barbour. Relative-distance Machian theories. *Nature*, 249:328–329, 1974. Misprints corrected in Nature, vol. 250, p. 606 (1974).

[Bar89] J. B. Barbour. *Absolute or Relative Motion? — A study from a Machian point of view of the discovery and the structure of dynamical theories*, volume 1: *The Discovery of Dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[Bar93] E. S. de O. Barra. Newton sobre movimento, espaço e tempo. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, 3(1/2), Série 3:85–115, 1993.

[BB77] J. B. Barbour and B. Bertotti. Gravity and inertia in a Machian framework. *Nuovo Cimento B*, 38:1–27, 1977.

[BB82] J. B. Barbour and B. Bertotti. Mach's principle and the structure of dynamical theories. *Proceedings of the Physical Society of London A*, 382:295–306, 1982.

[BC66] D. R. Brill and J. M. Cohen. Rotating masses and their effect on inertial frames. *Physical Review*, 143:1011–1015, 1966.

[Ber80] G. Berkeley. Tratado sobre os Princípios do Conhecimento Humano. In Victor Civita, editor, Volume "Berkeley e Hume" da Coleção *Os Pensadores*, pages 1–44, São Paulo, 2^a edição, 1980. Abril Cultural. Tradução de A. Sérgio.

[Ber92] G. Berkeley. De Motu — Of Motion, or the principle and nature of motion and the cause of the communication of motions. In M. R. Ayers, editor, *George Berkeley's Philosophical Works*, pages 211–227, London, 1992. Everyman's Library. Translated by A. A. Luce.

[Ber06] G. Berkeley. De motu [sobre o movimento ou sobre o princípio, a natureza e a causa da comunicação dos movimentos]. *Scientiae Studia*, 4:115–137, 2006. Tradução de M. R. d. Silva da versão inglesa para a língua portuguesa.

[Bla72] J. T. Blackmore. *Ernst Mach — His Life, Work, and Influence*. University of California Press, Berkeley, 1972.

[Bla89] J. Blackmore. Ernst Mach leaves 'the church of physics'. *British Journal for the Philosophy of Science*, 40:519–540, 1989.

[Blo82] C. Blondel. *A.-M. Ampère et la Création de l'Électrodynamique (1820-1827)*. Bibliothèque Nationale, Paris, 1982.

[Bor53] M. Born. Theoretische Bemerkungen zu Freundlich's Formel für die stellare Rotverschiebung. In *Nachrichten der Akademie der Wissenschaften in Göttingen Mathematisch-Physikalische Klasse, N. 7*, pages 102–108, Göttingen, 1953. Vandenhoeck & Ruprecht.

[Bor54] M. Born. On the interpretation of Freundlich's red-shift formula. *Proceedings of the Physical Society A*, 67:193–194, 1954.

[Bor65] M. Born. *Einstein's Theory of Relativity*. Dover, New York, Revised edition, 1965.

[Bor88] G. Borner. *The Early Universe — Facts and Fiction*. Springer, Berlin, 1988.

[BP55] L. Bass and F. A. E. Pirani. On the gravitational effects of distant rotating masses. *Philosophical Magazine*, 46:850–856, 1955.

[BP95] J. B. Barbour and H. Pfister (editors). *Mach's Principle: From Newton's Bucket to Quantum Gravity*. Birkhäuser, Boston, 1995.

[Bra29] J. Bradley. The discovery of the aberration of light. In H. Shapley and H. E. Howarth, editors, *A Source Book in Astronomy*, pages 103–108, New York, 1929. McGraw-Hill.

[Bra35] J. Bradley. The velocity of light. In W. F. Magie, editor, *A Source Book in Physics*, pages 337–340, New York, 1935. McGraw-Hill.

[Bra62a] C. H. Brans. Mach's principle and a relativistic theory of gravitation. II. *Physical Review*, 125:2194–2201, 1962.

[Bra62b] C. H. Brans. Mach's principle and the locally measured gravitational constant in general relativity. *Physical Review*, 125:388–396, 1962.

[Bro55] G. B. Brown. A theory of action-at-a-distance. *Proceedings of the Physical Society B*, 68:672–678, 1955.

[Bro82] G. B. Brown. *Retarded Action-at-a-Distance*. Cortney Publications, Luton, 1982.

[BT64] V. V. Batygin and I. N. Toptygin. *Problems in Electrodynamics*. Academic Press, London, 1964.

[Bun66] M. Bunge. Mach's critique of newtonian mechanics. *American Journal of Physics*, 34:585–596, 1966.

[BX89] J. B. Bastos Filho and R. M. Xavier. Conflitos entre os Principia de Newton e os Principia de Descartes. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, 1, Série 2:65–76, 1989.

[CA91] R. A. Clemente and A. K. T. Assis. Two-body problem for Weber-like interactions. *International Journal of Theoretical Physics*, 30:537–545, 1991.

[CA95a] J. J. Caluzi and A. K. T. Assis. An analysis of Phipps's potential energy. *Journal of the Franklin Institute B*, 332:747–753, 1995.

[CA95b] J. J. Caluzi and A. K. T. Assis. Schrödinger's potential energy and Weber's electrodynamics. *General Relativity and Gravitation*, 27:429–437, 1995.

[CA07] J. P. M. d. C. Chaib and A. K. T. Assis. Sobre os efeitos das correntes elétricas — Tradução comentada da primeira obra de Ampère sobre eletrodinâmica. *Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência*, 5:85–102, 2007.

[CA09] J. P. M. d. C. Chaib and A. K. T. Assis. Sobre os efeitos das correntes elétricas (segunda parte) — Tradução da primeira obra de Ampère sobre eletrodinâmica. *Revista Brasileira de História da Ciência*, 2:118–145, 2009.

[Cav98] H. Cavendish. Experiments to determine the density of the earth. *Philosophical Transactions*, 88:469–526, 1798. Reprinted in: *The Scientific Papers of the Honorable Henry Cavendish, F. R. S.*, vol. II, E. Thorpe *et al.* (editors), (Cambridge University Press, Cambridge, 1928), pp. 249-286; also reprinted with explanatory notes by A. S. Mackenzie in: *Gravitation, Heat and X-Rays*, (Arno Press, New York, 1981), pp. 57-105.

[CB68] J. M. Cohen and D. R. Brill. Further examples of "machian" effects of rotating bodies in general relativity. *Nuovo Cimento B*, 56:209–219, 1968.

[Cha09] J. P. M. d. C. Chaib, 2009. Tese de doutorado: "Análise do Significado e da Evolução do Conceito de Força de Ampère, juntamente com a Tradução Comentada de sua Principal Obra sobre Eletrodinâmica." Universidade Estadual de Campinas — UNICAMP (Campinas, SP). Orientador: A. K. T. Assis. Disponível em: http://webbif.ifi.unicamp.br/teses/ e em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Chi99] S. S. Chibeni. A fundamentação empírica das leis dinâmicas de Newton. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 21:1–13, 1999.

[Chi10] S. Chibeni. Berkeley e o papel das hipóteses na filosofia natural. *Scientiae Studia*, 8:389–419, 2010.

[Cin96] J. L. Cindra. Anomalias e paradoxos da teoria newtoniana da gravitação. *Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência*, 16:53–60, 1996.

[Clo87] B. E. Clotfelter. The Cavendish experiment as Cavendish knew it. *American Journal of Physics*, 55:210–213, 1987.

[Coe10] R. L. Coelho. On the concept of force: how understanding its history can improve physics teaching. *Science & Education*, 19:91–113, 2010. Doi: 10.1007/s11191-008-9183-1.

[Coh40] I. B. Cohen. Roemer and the first determination of the velocity of light. *Isis*, 31:327–379, 1940.

[Coh78] I. B. Cohen (ed.). *Isaac Newton's Papers & Letters on Natural Philosophy*. Harvard University Press, Cambridge, second edition, 1978.

[Coh80] I. B. Cohen. *The Newtonian Revolution*. Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

[Coh81] I. B. Cohen. Newton's discovery of gravity. *Scientific American*, 244:122–133, 1981.

[Con69] E. K. Conklin. Velocity of the earth with respect to the cosmic background radiation. *Nature*, 222:971–972, 1969. Doi: 10.1038/222971a0.

[Cor35] G. Coriolis. Sur les équations du mouvement relatif des systèmes de corps. *Journal de l'École Polytechnique*, 15:142–154, 1835.

[Cou85a] C. A. Coulomb. Premier mémoire sur l'électricité et le magnétisme: Construction et usage d'une balance électrique, fondée sur la propriété qu'ont les fils de métal, d'avoir une force de réaction de torsion proportionelle à l'angle de torsion. Détermination expérimentale de la loi suivant laquelle les élémens des corps électrisés du même genre d'électricité, se repoussent mutuellement. *Mémoires de l'Académie royale des Sciences de l'Institut de France*, 88:569–577, 1785. Published in 1788.

[Cou85b] C. A. Coulomb. Second mémoire sur l'électricité et le magnétisme, où l'on détermine, suivant quelles loix de fluide magnétique, ainsi que le fluide électrique, agissent, soit par répulsion, soit par attraction. *Mémoires de l'Académie royale des Sciences de l'Institut de France*, 88:578–611, 1785. Published in 1788.

[Cou35a] A. Coulomb. First memoir on electricity and magnetism. In W. F. Magie, editor, *A Source Book in Physics*, pages 408–413, New York, 1935. McGraw-Hill. Publicação original de 1785 em francês.

[Cou35b] A. Coulomb. Second memoir on electricity and magnetism. In W. F. Magie, editor, *A Source Book in Physics*, pages 413–420, New York, 1935. McGraw-Hill. Publicação original de 1785 em francês.

[CR82] C. A. P. Ceneviva and W. A. Rodrigues Jr. Objetividade, convencionalismo e a teoria da relatividade. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, 3:59–83, 1982.

[Cra90] R. Crane. The Foucault pendulum as a murder weapon and a physicist's delight. *The Physics Teacher*, 28:264–269, 1990.

[CS58] G. Cocconi and E. Salpeter. A search for anisotropy of inertia. *Nuovo Cimento*, 10:646–651, 1958.

[CS60] G. Cocconi and E. Salpeter. Upper limit for the anisotropy of inertia from the Mössbauer effect. *Physical Review Letters*, 4:176–177, 1960.

[Cur09] J. C. Curé. *Einstein on Trial or Metaphysical Principles of Natural Philosophy*. Shirley Ramsey, Caracas, 3rd edition, 2009.

[Dar20] C. G. Darwin. The dynamical motions of charged particles. *Philosophical Magazine*, 39:537–551, 1920.

[dB66] L. de Broglie. Sur le déplacement des raies émises par un objet astronomique lointain. *Comptes Rendues de l'Académie des Sciences de Paris*, 263:589–592, 1966.

[Dic59] R. H. Dicke. New research on old gravitation. *Science*, 129:621–624, 1959.

[Dic61] R. H. Dicke. Experimental tests of Mach's principle. *Physical Review Letters*, 7:359–360, 1961. Reprinted in: R. H. Dicke, *The Theoretical Significance of Experimental Relativity* (Gordon and Breach, New York, 1964), pp. 31-34.

[Dre61] R. W. P. Drever. A search for anisotropy of inertial mass using a free precession technique. *Philosophical Magazine*, 6:683–687, 1961.

[dS17] W. de Sitter. On Einstein's theory of gravitation, and its astronomical consequences. Third paper. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 78:3–28, 1917.

[Dug88] R. Dugas. *A History of Mechanics*. Dover, New York, 1988.

[Ear89] J. Earman. *World Enough and Space-Time: Absolute versus Relational Theories of Space and Time*. MIT Press, Cambridge, 1989.

[Eby77] P. B. Eby. On the perihelion precession as a Machian effect. *Lettere al Nuovo Cimento*, 18:93–96, 1977.

[Eby79] P. Eby. Gyro precession and Mach's principle. *General Relativity and Gravitation*, 11:111–117, 1979.

[Edd88] A. S. Eddington. *The Internal Constitution of the Stars*. Cambridge University Press, Cambridge, 1988. Reimpressão da edição de 1926.

[Edw74] W. F. Edwards. Inertia and an alternative approach to the theory of interactions. *Proceedings of the Utah Academy of Science, Arts, and Letters*, 51, Part 2:1–7, 1974.

[Ein05] A. Einstein. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Annalen der Physik*, 17:891–921, 1905.

[Ein12] A. Einstein. Gibt es eine Gravitationswirkung, die der elektrodynamischen Induktionswirkung analog ist? *Vierteljahrschrift für gerichtliche Medizin und öffentliches Sanitätswesen*, 44:37–40, 1912.

[Ein16] A. Einstein. Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. *Annalen der Physik*, 49:769–822, 1916.

[Ein17] A. Einstein. Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, pages 142–152, 1917.

[Ein18a] A. Einstein. Dialog über Einwände gegen die Relativitätstheorie. *Die Naturwissenschaften*, 48:697–702, 1918.

[Ein18b] A. Einstein. Prinzipielles zur allgemeinen Relativitätstheorie. *Annalen der Physik*, 55:241–244, 1918.

[Ein31] A. Einstein. Zum kosmologischen Problem der allgemeinen Relativitätstheorie. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, pages 235–237, 1931.

[Ein52a] A. Einstein. Cosmological considerations on the general theory of relativity. In A. Einstein, H. A. Lorentz, H. Weyl and H. Minkowski, *The Principle of Relativity*, pages 175–188, New York, 1952. Dover.

[Ein52b] A. Einstein. The foundations of the general theory of relativity. In A. Einstein, H. A. Lorentz, H. Weyl and H. Minkowski, *The Principle of Relativity*, pages 109–164, New York, 1952. Dover.

[Ein52c] A. Einstein. On the electrodynamics of moving bodies. In A. Einstein, H. A. Lorentz, H. Weyl and H. Minkowski, *The Principle of Relativity*, pages 35–65, New York, 1952. Dover.

[Ein58] A. Einstein. *O Significado da Relatividade*. Arménio Armado, Coimbra, 1958. Tradução de M. Silva.

[Ein78a] A. Einstein. Considerações cosmológicas sobre a teoria da relatividade geral. In A. Einstein, H. Lorentz, H. Weyl e H. Minkowski, *O Princípio da Relatividade*, Lisboa, 2^a edição, 1978. Fundação Calouste Gulbenkian. Págs. 225-241. Tradução de M. J. Saraiva.

[Ein78b] A. Einstein. Os fundamentos da teoria da relatividade geral. In A. Einstein, H. Lorentz, H. Weyl e H. Minkowski, *O Princípio da Relatividade*, Lisboa, 2^a edição, 1978. Fundação Calouste Gulbenkian. Págs. 141-214. Tradução de M. J. Saraiva.

[Ein78c] A. Einstein. Sobre a electrodinâmica dos corpos em movimento. In A. Einstein, H. Lorentz, H. Weyl e H. Minkowski, *O Princípio da Relatividade*, Lisboa, 2^a edição, 1978. Fundação Calouste Gulbenkian. Págs. 47-86. Tradução de M. J. Saraiva.

[Ein80] A. Einstein. *The Meaning of Relativity*. Chapman and Hall, London, 1980. English translation by E. P. Adams.

[Ein82] A. Einstein. *Notas Autobiográficas*. Nova Fronteira, Rio de Janeiro, 3^a edição, 1982. Tradução de A. S. Rodrigues.

[Ein96] A. Einstein. Is there a gravitational effect which is analogous to electrodynamic induction? In *The Collected Papers of Albert Einstein*, volume 4, pages 126–129. Princeton University Press, Princeton, 1996.

[Ein02] A. Einstein. On the foundations of the general theory of relativity. In *The Collected Papers of Albert Einstein*, volume 7, pages 37–44. Princeton University Press, Princeton, 2002.

[Erl67] H. Erlichson. The Leibniz-Clarke controversy: absolute versus relative space and time. *American Journal of Physics*, 35:89–98, 1967.

[Evo88] F. R. R. Evora. *A Revolução Copernicana-Galileana*, volume I: Astronomia e Cosmologia Pré-Galileana. Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência da UNICAMP, Campinas, 1988. Coleção CLE.

[Evo94] F. R. R. Evora. *A Revolução Copernicano-Galileana*, volume II: A Revolução Galileana. Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência da UNICAMP, Campinas, 1994. Coleção CLE.

[FA03] J. Fukai and A. K. T. Assis. Testing Mach's principle in electrodynamics. *Canadian Journal of Physics*, 81:1239–1242, 2003.

[Far52] M. Faraday. *Experimental Researches in Electricity*, volume 45, pp. 257-866 of *Great Books of the Western World*. Encyclopaedia Britannica, Chicago, 1952.

[Far11] M. Faraday. Pesquisas experimentais em eletricidade. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, 28:152–204, 2011. Tradução de A. K. T. Assis e L. F. Haruna. DOI: 10.5007/2175-7941.2011v28n1p152.

[Fey64] Feynman. *Lectures on Physics: Exercises*, volume 2. Addison-Wesley, Reading, 1964.

[FF96] B. Friedlaender and I. Friedlaender. *Absolute oder relative Bewegung?* Leonhard Simion, Berlin, 1896.

[FF53] E. Finlay-Freundlich. Über die Rotverschiebung der Spektrallinien. In *Nachrichten der Akademie der Wissenschaften in Göttingen Mathematisch-Physikalische Klasse, N. 7*, pages 95–102, Göttingen, 1953. Vandenhoeck & Ruprecht.

[FF54a] E. Finlay-Freundlich. Red-shifts in the spectra of celestial bodies. *Proceedings of the Physical Society A*, 67:192–193, 1954.

[FF54b] E. Finlay-Freundlich. Red shifts in the spectra of celestial bodies. *Philosophical Magazine*, 45:303–319, 1954.

[FF95] B. Friedlaender and I. Friedlaender. Absolute or relative motion? In J. B. Barbour and H. Pfister, editors, *Mach's Principle, From Newton's Bucket to Quantum Gravity*, pages 114–119 and 309–311, Boston, 1995. Birkhäuser. Translated by J. B. Barbour.

[FF07] B. Friedlaender and I. Friedlaender. Absolute or relative motion? In J. Renn, editor, *The Genesis of General Relativity*, volume 3, pages 127–144. Springer, Berlin, 2007. Boston Studies in the Philosophy and History of Science, 2007, Vol. 250, Part 2, pp. 1053-1071, DOI: 10.1007/978-1-4020-4000-9_14.

[FLS63] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands. *The Feynman Lectures on Physics*. Addison-Wesley, Reading, 1963. Volume 1: Mainly Mechanics, Radiation, and Heat.

[FLS64] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands. *The Feynman Lectures on Physics*. Addison-Wesley, Reading, 1964. Volume 2: Mainly Electromagnetism and Matter.

[Fou51a] L. Foucault. Démonstration physique du mouvement de rotation de la terre au moyen du pendule. *Comptes Rendues de l'Académie des Sciences de Paris*, Feb. 03:135–138, 1851.

[Fou51b] L. Foucault. Physical demonstration of the rotation of the earth by means of the pendulum. *Journal of the Franklin Institute*, 21:350–353, 1851.

[Fou52] L. Foucault. Sur les phénomènes d'orientation des corps tournants entraînés par un axe fixe à la surface de la terre - nouveaux signes sensibles du mouvement diurne. *Comptes Rendues de l'Académie des Sciences de Paris*, 35:424–427, 1852.

[Fre71] A. P. French. *Newtonian Mechanics*. W. W. Norton & Company, New York, 1971.

[Fre89] S. French. A estrutura do argumento de Newton para a lei da gravitação universal. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, 1, Série 2:33–52, 1989.

[Fuk03] J. Fukai. *A Promenade Along Electrodynamics*. Vales Lake Publishing, Pueblo West, 2003.

[GA94] P. Graneau and A. K. T. Assis. Kirchhoff on the motion of electricity in conductors. *Apeiron*, 19:19–25, 1994.

[Gal85] Galileu Galilei. *Duas Novas Ciências*. Ched Editorial, Istituto Italiano di Cultura e Nova Stella, São Paulo, 1985. Tradução e Notas: L. Mariconda e P. R. Mariconda.

[Gam61] G. Gamow. *The Creation of the Universe*. Viking Press, New York, revised edition, 1961.

[Gar] Gardelli, D., Concepções de Interação Física: Subsídios para uma Abordagem Histórica do Assunto no Ensino Médio. Tese de mestrado, Instituto de Física, Universidade de São Paulo, Brasil, 2004.

[Gar10] D. Gardelli. A indução gravitacional. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, 27:584–598, 2010.

[Gau33] C. F. Gauss. Die Intensität der erdmagnetischen Kraft, zurückgeführt auf absolutes Maass. *Annalen der Physik und Chemie*, 28:241–273 and 591–615, 1833.

[Gau94] C. F. Gauss. Die Intensität der erdmagnetischen Kraft auf absolutes Maass zurückgeführt. In E. Dorn, editor, *Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, Vol. 53*. Wilhelm Engelmann Verlag, Leipzig, 1894. Translation by Kiel, notes by E. Dorn.

[Gen88] P. Gen. New insight into Olbers' and Seeliger's paradoxes and the cosmic background radiation. *Chinese Astronomy and Astrophysics*, 12:191–196, 1988.

[Ger98] P. Gerber. Die räumliche und zeitliche Ausbreitung der Gravitation. *Zeitschrift fur Mathematik und Physik II*, 43:93–104, 1898.

[Ger17] P. Gerber. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation. *Annalen der Physik*, 52:415–444, 1917.

[GG90] I. Grattan-Guinness. *Convolutions in French Mathematics, 1800-1840*. Birkhäuser, Basel, 1990. Vol. 2.

[GG91] I. Grattan-Guinness. Lines of mathematical thought in the electrodynamics of Ampère. *Physis*, 28:115–129, 1991.

[GG93] P. Graneau and N. Graneau. *Newton Versus Einstein — How Matter Interacts with Matter*. Carlton Press, New York, 1993.

[GG06] P. Graneau and N. Graneau. *In the Grip of the Distant Universe: The Science of Inertia*. World Scientific, New Jersey, 2006.

[Ghi91] M. Ghins. *A Inércia e o Espaço-Tempo Absoluto*. Coleção CLE. Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência da UNICAMP, Campinas, 1991.

[Ghi92] M. Ghins. A equivalência dinâmica segundo Mach e a teoria geral da relatividade. In F. R. R. Évora, editor, *Século XIX: O Nascimento da Ciência Contemporânea*, pages 161–175. Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência da UNICAMP, Campinas, 1992.

[Ghi95] M. Ghins. A existência do espaço-tempo segundo Leonhard Euler. In F. R. R. Évora, editor, *Espaço e Tempo*, pages 41–51. Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência da UNICAMP, Campinas, 1995.

[Gho84] A. Ghosh. Velocity dependent inertial induction: An extension of Mach's principle. *Pramana Journal of Physics*, 23:L671–L674, 1984.

[Gho86] A. Ghosh. Velocity-dependent inertial induction and secular retardation of the earth's rotation. *Pramana Journal of Physics*, 26:1–8, 1986.

[Gho93] A. Ghosh. Astrophysical and cosmological consequences of velocity-dependent inertial induction. In H. Arp, R. Keys, and K. Rudnicki, editors, *Progress in New Cosmologies: Beyond the Big Bang*, pages 305–326, New York, 1993. Plenum Press.

[Gil71a] C. S. Gillmor. *Coulomb and the Evolution of Physics and Engineering in Eighteenth-Century France*. Princeton University Press, Princeton, 1971.

[Gil71b] C. S. Gillmor. Coulomb, Charles Augustin. In C. C. Gillispie, editor, *Dictionary of Scientific Biography,* Vol. 3, pages 439–447. Charles Scribner's Sons, New York, 1971.

[Gol68] J. Goldemberg. *Física Geral e Experimental*, volume 1. Companhia Editora Nacional e Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1968.

[Gol80] H. Goldstein. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, Reading, 2nd edition, 1980.

[Gra85] P. Graneau. *Ampere-Neumann Electrodynamics of Metals*. Hadronic Press, Nonantum, 1985.

[Gra90a] P. Graneau. Far-action versus contact action. *Speculations in Science and Technology*, 13:191–201, 1990.

[Gra90b] P. Graneau. Has the mystery of inertia been solved? In U. Bartocci and J. P. Wesley, editors, *Proceedings of the Conference on Foundations of Mathematics and Physics*, pages 129–136, Blumberg, Germany, 1990. Benjamin Wesley Publisher.

[Gra90c] P. Graneau. Interconnecting action-at-a-distance. *Physics Essays*, 3:340–343, 1990.

[Gra90d] P. Graneau. The riddle of inertia. *Electronics and Wireless World*, 96:60–62, 1990.

[Gra90e] P. Graneau. Some cosmological consequences of Mach's principle. *Hadronic Journal Supplement*, 5:335–349, 1990.

[Gri89] D. J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 2nd edition, 1989.

[Gui96] C. E. Guillaume. La température de l'espace. *La Nature*, 24, series 2:210–211, 234, 1896.

[GV97] J. Guala-Valverde. Centrifugal potential energy in a machian universe. *Galilean Electrodynamics*, 8:100, 1997.

[GV98] J. Guala-Valverde. Gravitational mutual energy in Weber-type mechanics. *Physics Essays*, 11:164–165, 1998.

[GV99a] J. Guala-Valverde. *Inercia y Gravitacion.* Fundacion Julio Palacios, Neuquen, Argentina, 1999. In collaboration with J. Tramaglia and R. Rapacioli. Available at: http://www.educ.ar/recursos/ver?rec_id=90380.

[GV99b] J. Guala-Valverde. Inertial mass in Mach-Weber-Assis theory. *Apeiron*, 6:202–204, 1999.

[GV01] J. Guala-Valverde. A new theorem in relational mechanics. *Apeiron*, 8:132–138, 2001.

[GV04] J. Guala-Valverde. Distant matter in physics. *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, 29:635–640, 2004.

[GVAB05] J. Guala-Valverde, R. Achilles, and R. Blas. Inertial mass: a changing entity? — Weber vs. Einstein, Weber plus Einstein or none? *Apeiron*, 12:351–352, 2005.

[GVM01] J. Guala-Valverde and P. Mazzoni. The unipolar dynamotor: a genuine relational engine. *Apeiron*, 8:41–52, 2001.

[Har86] E. Harrison. Newton and the infinite universe. *Physics Today*, 39:24–32, 1986.

[Hay95] H. C. Hayden. Special relativity: problems and alternatives. *Physics Essays*, 8:366–374, 1995.

[Hea89] O. Heaviside. On the electromagnetic effects due to the motion of electrification through a dielectric. *Philosophical Magazine*, 27:324–339, 1889.

[Hee92] P. Heering. On Coulomb's inverse square law. *American Journal of Physics*, 60:988–994, 1992.

[Hei81] J. L. Heilbron. The electrical field before Faraday. In G. N. Cantor and M. J. S. Hodge, editors, *Conceptions of Ether: Studies in the History of Ether Theories 1740-1900*, pages 187–213. Cambridge University Press, Cambridge, 1981.

[Hel72] H. von Helmholtz. On the theory of electrodynamics. *Philosophical Magazine*, 44:530–537, 1872.

[Her41] G. Herzberg. *Molecular Spectra and Molecular Structure*, volume 1: Spectra of Diatomic Molecules. D. Van Nostrand, New York, 1941.

[HH62] A. R. Hall and M. B. Hall. *Unpublished Scientific Papers of Isaac Newton.* Cambridge University Press, Cambridge, 1962. A selection from the Portsmouth Collection in the University Library, Cambridge. Chosen, edited and translated by A. R. Hall and M. B. Hall.

[Hit87] O. Hittmair. Schrödinger's unified theory seen 40 years later. In C. W. Kilmister, editor, *Schrödinger — Centenary Celebration of a Polymath*, pages 165–175. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[HM95] M. A. Heald and J. B. Marion. *Classical Electromagnetic Radiation.* Saunders, Fort Worth, 3rd edition, 1995.

[Hof95] W. Hofmann. Motion and inertia. In J. B. Barbour and H. Pfister, editors, *Mach's Principle, From Newton's Bucket to Quantum Gravity*, pages 128–133, Boston, 1995. Birkhäuser. Translated by J. B. Barbour.

[Hof96] J. R. Hofmann. *André-Marie Ampère, Enlightenment and Electrodynamics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[Hoo78] R. Hooke. *Lectures De Potentia Restitutiva, or of Spring, Explaining the Power of Springing Bodies.* John Martyn, London, 1678.

[Hoo35] R. Hooke. Law of elastic force. In W. F. Magie, editor, *A Source Book in Physics*, pages 93–95, New York, 1935. McGraw-Hill.

[HT35] E. Hubble and R. Tolman. Two methods of investigating the nature of the nebular red-shift. *Astrophysical Journal*, 82:302–337, 1935.

[Hub29] E. Hubble. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 15:168–173, 1929.

[Hub37] E. Hubble. *The Observational Approach to Cosmology*. Clarendon Press, Oxford, 1937.

[Hub42] E. Hubble. The problem of the expanding universe. *American Scientist*, 30:99–115, 1942.

[Hub58] E. Hubble. *The Realm of the Nebulae*. Dover, New York, 1958. Book originally published in 1936.

[Hug60] V. W. Hughes *et al.* Upper limit for the anisotropy of inertial mass from nuclear resonance experiments. *Physical Review Letters*, 4:342–344, 1960.

[Hur10] P. G. Huray. *Maxwell's Equations*. Wiley: IEEE, Hoboken, 2010.

[Huy] Huygens, C., On centrifugal force, translated by M. S. Mahoney. Available at: http://www.princeton.edu/˜hos/mike/texts/huygens/centriforce/huyforce.htm.

[Huy03] C. Huygens. *Über die Centrifugalkraft*, volume 138 of *Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften*. Wilhelm Engelmann, Leipzig, 1903. Herausgegeben von Felix Hausdorff.

[Huy13] C. Huygens. *Die Pendeluhr*. Wilhelm Engelmann, Leipzig, 1913. Herausgegeben von A. Heckscher und A. v. Oettingen.

[Huy29] C. Huygens. La force centrifuge. In Société Hollandaise des Sciences, editor, *Oeuvres Complètes de Christiaan Huygens*, volume 16, pages 253–301. F. Muget, Paris, 1929.

[Huy34] C. Huygens. L'Horloge à Pendule ou Démonstrations Géométriques sur le Mouvement des Pendules Adapté aus Horloges. In Société Hollandaise des Sciences, editor, *Oeuvres Complètes de Christiaan Huygens*, volume 18, pages 69–368. F. Muget, Paris, 1934.

[Huy86] C. Huygens. *The Pendulum Clock or Geometrical Demonstrations Concerning the Motion of Pendula as Applied to Clocks*. The Iowa State University Press, Ames, 1986. Translated with Notes by R. J. Blackwell. Introduction by H. J. M. Bos.

[Jaa91] T. Jaakkola. Electro-gravitational coupling: Empirical and theoretical arguments. *Apeiron*, 9-10:76–90, 1991.

[Jac75] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, New York, second edition, 1975.

[Jac83] J. D. Jackson. *Eletrodinâmica Clássica*. Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1983. 2^a edição. Tradução de A. Macedo e H. Macedo.

[Jac99] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, New York, third edition, 1999.

[Jak90] S. L. Jaki. *Cosmos in Transition — Studies in the History of Cosmology*. Pachart Publishing House, Tucson, 1990.

[Jam57] M. Jammer. *Concepts of Force: A Study in the Foundations of Dynamics*. Harvard University Press, Cambridge, 1957.

[Jam93] M. Jammer. *Concepts of Space — The History of Theories of Space in Physics*. Dover, New York, 3rd edition, 1993.

[Jam00] M. Jammer. *Concepts of Mass in Contemporary Physics and Philosophy*. Princeton University Press, Princeton, 2000.

[Jam10] M. Jammer. *Conceitos de Espaço — A História das Teorias do Espaço na Física*. Contraponto e Editora PUC Rio, Rio de Janeiro, 2010. Tradução de V. Ribeiro.

[Jam11] M. Jammer. *Conceitos de Força — Estudo sobre os Fundamentos da Dinâmica*. Contraponto e Editora PUC Rio, Rio de Janeiro, 2011. Tradução de V. Ribeiro.

[Jea41] J. Jeans. *The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism*. Cambridge University Press, Cambridge, 1941. Reprint of the 5th edition of 1925.

[JP04] J. E. Junginger and Z. D. Popovic. An experimental investigation of the influence of an electrostatic potential on electron mass as predicted by Weber's force law. *Canadian Journal of Physics*, 82:731–735, 2004.

[Kae58] F. A. Kaempffer. On possible realizations of Mach's program. *Canadian Journal of Physics*, 36:151–159, 1958.

[Kel97] A. G. Kelly. Rules for Einstein-synchronization of clocks challenged. *Monograph of the Institution of Engineers of Ireland*, 4:1–13, 1997.

[Kel01] A. G. Kelly. Sagnac effect contradicts special relativity. *Infinite Energy*, 39:24–28, 2001.

[Kep02] J. Kepler. *Harmonies of the World - Book Five.* Series: On the Shoulders of Giants. Running Press, Philadelphia, 2002. Edited, with commentary, by S. Hawking. English translation by Andrew Motte.

[Koe89] A. Koestler. *O Homem e o Universo.* Ibrasa, São Paulo, 1989. Tradução de A. Denis.

[Koy86] A. Koyré. *Do Mundo Fechado ao Universo Infinito.* Forense-Universitária, Rio de Janeiro, 2^a edição, 1986. Tradução de D. M. Garschagen.

[KS05] S. Krapas and M. C. d. Silva. Forças que atuam a distância: representações em livros didáticos do ensino médio e a história da ciência. In M. A. Moreira, C. C. Sahelices, and J. M. Villagrá, editors, *Actas do II Encuentro Iberoamericano sobre Investigación Básica em Educación em Ciências*, pages 351–366. Servicios de Publicaciones de la Universidad de Burgos, Burgos, 2005.

[KS08] S. Krapas and M. C. d. Silva. O conceito de campo: polissemia nos manuais, significados na física do passado e da atualidade. *Ciência & Educação*, 14:15–33, 2008.

[Kuh57] T. S. Kuhn. *The Copernican Revolution.* Harvard University Press, Cambridge, 1957.

[Kuh82] T. S. Kuhn. *A Estrutura das Revoluções Científicas.* Editora Perspectiva, São Paulo, 1982. Volume 115 da Coleção Debates. Tradução de B. V. Boeira e N. Boeira.

[KW57] R. Kohlrausch and W. Weber. Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere Zurückführung der Stromintensitäts-Messungen auf mechanisches Maass. *Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, mathematisch-physische Klasse*, 3:221–290, 1857. Reprinted in Wilhelm Weber's *Werke*, Vol. 3, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1893), pp. 609-676.

[LaV86] P. A. LaViolette. Is the universe really expanding? *Astrophysical Journal*, 301:544–553, 1986.

[Lei83] G. W. Leibniz. *Correspondência com Clarke.* Coleção "Os Pensadores", volume de "Newton e Leibniz". Abril Cultural, São Paulo, 1983. Tradução e notas de C. L. d. Mattos.

[Lei89] G. W. Leibniz. *Philosophical Essays.* Hackett Publishing Company, Indianapolis, 1989. Edited and translated by R. Ariew and D. Garber.

[Lor95] H. A. Lorentz. *Versuch einer Theorie der Electrischen und Optischen Erscheinungen in Bewegten Körpern.* E. J. Brill, Leiden, 1895. Abschmitt I (Die Grundgleichungen für ein System in den Aether eingelagerter Ionen), §12 (Der zweite Theil der auf die ponderable Materie wirkenden Kraft), pp. 21-22.

[Lor15] H. A. Lorentz. *The Theory of Electrons.* Teubner, Leipzig, second edition, 1915. Reprinted in *Selected Works of H. A. Lorentz*, vol. 5, N. J. Nersessian (ed.), (Palm Publications, Nieuwerkerk, 1987).

[Lor31] H. A. Lorentz. *Lectures on Theoretical Physics*, volume 3. MacMilan, London, 1931.

[Lor78] H. A. Lorentz. A experiência interferencial de Michelson. In A. Einstein, H. Lorentz, H. Weyl e H. Minkowski, *O Princípio da Relatividade*, Lisboa, 2^a edição, 1978. Fundação Calouste Gulbenkian. Págs. 5-11. Tradução de M. J. Saraiva.

[LT18] J. Lense and H. Thirring. Über den Einfluss der Eigenrotation der Zentralkörper auf die Bewegung der Planeten und Monde nach der Einsteinschen Gravitationstheorie. *Physikalische Zeitschrift*, 19:156–163, 1918.

[Luc79] P. Lucie. *Física Básica — Mecânica 1.* Editora Campus, Rio de Janeiro, 1979.

[Luc80] P. Lucie. *Física Básica — Mecânica 2*. Editora Campus, Rio de Janeiro, 1980.

[LV86] P. Lubin and T. Villela. Measurements of the cosmic background radiation. In B. F. Madore and R. B. Tully, editors, *Galaxy Distances and Deviations from Universal Expansion*, pages 169–177. Reidel, Dordrecht, 1986.

[LVES85] P. Lubin, T. Villela, G. Epstein, and G. Smoot. A map of the cosmic background radiation at 3 millimeters. *Astrophysical Journal*, 298:L1–L5, 1985.

[Mac68] E. Mach. Über die Definition der Masse. *Carls Repertorium für Physik und physikalische Technik*, 4:355–359, 1868. English translation in E. Mach, *History and Root of the Principle of the Conservation of Energy*, in I. B. Cohen (editor), *The Conservation of Energy and the Principle of Least Action* (Arno Press, New York, 1981), pp. 80-85. English translation by P. E. B. Jourdain.

[Mac10a] E. Mach. On the fundamental concepts of electrostatics. In E. Mach, editor, *Popular Scientific Lectures*, pages 107–136. Open Court, 4th edition, 1910. Translated by T. J. McCormack.

[Mac10b] E. Mach. On the principle of the conservation of energy. In E. Mach, editor, *Popular Scientific Lectures*, pages 137–185. Open Court, 4th edition, 1910. Translated by T. J. McCormack.

[Mac26] E. Mach. *The Principles of Physical Optics — An Historical and Philosophical Treatment*. E. P. Dutton and Company, New York, 1926. Reprinted by Dover, New York, in 1953.

[Mac60] E. Mach. *The Science of Mechanics — A Critical and Historical Account of Its Development*. Open Court, La Salle, sixth edition, 1960. Translated by J. McCormack.

[Mac81] E. Mach. History and Root of the Principle of the Conservation of Energy. In I. B. Cohen, editor, *The Conservation of Energy and the Principle of Least Action*, New York, 1981. Arno Press. Reprint of the 1911 English edition. English translation by P. E. B. Jourdain.

[Maj20] Q. Majorana. On gravitation — Theoretical and experimental researches. *Philosophical Magazine*, 39:488–504, 1920.

[Maj30] Q. Majorana. Quelques recherches sur l'absorption de la gravitation par la matière. *Journal de Physique et de Radium*, 1:314–324, 1930.

[Maj88a] Q. Majorana. On gravitation — Theoretical and experimental researches. In V. DeSabbata and V. N. Melnikov, editors, *Gravitational Measurements, Fundamental Metrology and Constants*, pages 523–539, Dordrecht, 1988. Kluwer.

[Maj88b] Q. Majorana. Quelques recherches sur l'absorption de la gravitation par la matière. In V. DeSabbata and V. N. Melnikov, editors, *Gravitational Measurements, Fundamental Metrology and Constants*, pages 508–522, Dordrecht, 1988. Kluwer.

[Mar86] R. de A. Martins. Pesquisa sobre absorção da gravidade. In Mast, editor, *Anais do I Seminário Nacional Sobre História da Ciência e da Tecnologia*, pages 198–213, Rio de Janeiro, 1986. Mast.

[Mar89] R. de A. Martins. Huygens e a gravitação newtoniana. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, 1, Série 2:151–184, 1989.

[Mar90] S. Marinov. *The Thorny Way of Truth*, volume VIII. International Publishers East-West, Graz, 1990.

[Mar93] R. de A. Martins. Huygens's reaction to Newton's gravitational theory. In J. V. Field and A. J. L. James, editors, *Renaissance and Revolution*, pages 203–213. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[Max] Maxwell, J. C., On physical lines of force. Philosophical Magazine, Vol. 21, pp. 161-175, 281-291 and 338-348 (1861); Vol. 23, pp. 12-24 and 85-95 (1862).

[Max65] J. C. Maxwell. A dynamical theory of the electromagnetic field. *Philosophical Transactions*, 155:459–512, 1865. Doi: 10.1098/rstl.1865.0008.

[Max54] J. C. Maxwell. *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Dover, New York, 1954.

[Max65a] J. C. Maxwell. A dynamical theory of the electromagnetic field. In W. D. Niven, editor, *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell*, pages 526–597 (vol. 1), New York, 1965. Dover. Article originally published in 1864.

[Max65b] J. C. Maxwell. On physical lines of force. In W. D. Niven, editor, *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell*, pages 451–513 (vol. 1), New York, 1965. Dover. Article originally published in 1861/2.

[Meh87] J. Mehra. Erwin Schrödinger and the rise of wave mechanics. II. The creation of wave mechanics. *Foundations of Physics*, 17:1141–1188, 1987.

[MG25] A. A. Michelson and H. G. Gale. The effect of the earth's rotation on the velocity of light, part II. *Astrophysical Journal*, 61:140–145, 1925.

[MHT84] B. Mashhoon, F. H. Hehl, and D. S. Theiss. On the gravitational effects of rotating masses: the Thirring-Lense papers. *General Relativity and Gravitation*, 16:711–750, 1984.

[Mik99] V. F. Mikhailov. The action of an electrostatic potential on the electron mass. *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, 24:161–169, 1999.

[Mik01] V. F. Mikhailov. Influence of an electrostatic potential on the inertial electron mass. *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, 26:33–38, 2001.

[Mik03] V. F. Mikhailov. Influence of a field-less electrostatic potential on the inertial electron mass. *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, 28:231–236, 2003.

[Mil81] A. I. Miller. *Albert Einstein's Special Theory of Relativity.* Addison-Wesley, Reading, 1981.

[Mil83a] M. Milgrom. A modification of the newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis. *Astrophysical Journal*, 270:365–370, 1983.

[Mil83b] M. Milgron. A modification of the newtonian dynamics - implications for galaxies. *Astrophysical Journal*, 270:371–389, 1983.

[Mol93] J. A. Molina. Observações sobre a concepção kantiana do espaço. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, 3 (1/2), Série 3:117–132, 1993.

[Mon96] R. A. Monti. Theory of relativity: a critical analysis. *Physics Essays*, 9:238–260, 1996.

[MR87] J. Mehra and H. Rechenberg. *The Historical Development of Quantum Theory*, volume 5: Erwin Schrödinger and the Rise of Wave Mechanics. Part 1. Springer, New York, 1987.

[MR89] P. Marmet and G. Reber. Cosmic matter and the nonexpanding universe. *IEEE Transactions on Plasma Science*, 17:264–269, 1989.

[NA95] M. C. D. Neves and A. K. T. Assis. The Compton effect as an explanation for the cosmological redshift. *Quarterly Journal of the Royal Astronomical Society*, 36:279–280, 1995.

[Ner37] W. Nernst. Weitere Prüfung der Annahne eines stationären Zustandes im Weltall. *Zeitschrift für Physik*, 106:633–661, 1937.

[Ner38] W. Nernst. Die Strahlungstemperatur des Universums. *Annalen der Physik*, 32:44–48, 1938.

[Ner95a] W. Nernst. Further investigation of the stationary universe hypothesis. *Apeiron*, 2:58–71, 1995.

[Ner95b] W. Nernst. The radiation temperature of the universe. *Apeiron*, 2:86–87, 1995.

[Neu70] C. Neumann. *Ueber die Principien der Galilei-Newton'schen Theorie.* B. G. Teubner, Leipzig, 1870.

[Neu96] C. Neumann. *Allgemeine Untersuchungen über das Newton'sche Princip der Fernwirkungen mit besonderer Rücksicht auf die elektrischen Wirkungen.* Teubner, Leipzig, 1896.

[Neu93] C. Neumann. On the principles of the galilean-newtonian theory. *Science in Context*, 6:355–368, 1993. English translation by G. Freudenthal.

[New34] I. Newton. *Mathematical Principles of Natural Philosophy.* University of California Press, Berkeley, 1934. Cajori edition.

[New83] I. Newton. *O Peso e o Equilíbrio dos Fluidos.* Volume "Newton e Leibniz" da Coleção "Os Pensadores". Editora Abril Cultural, São Paulo, 1983. Tradução do original latino *De gravitatione et aequipondio fluidorum*, editado por A. R. Hall e M. B. Hall. *Unpublished Scientific Papers of Isaac Newton*, Cambridge University Press, Cambridge, 1962, págs. 90-121. Tradução de L. J. Baraúna.

[New90] I. Newton. *Principia — Princípios Matemáticos de Filosofia Natural.* Nova Stella/Edusp, São Paulo, 1990. Livro I: O Movimento dos Corpos. Tradução de T. Ricci, L. G. Brunet, S. T. Gehring e M. H. C. Célia.

[New96] I. Newton. *Óptica.* Edusp, São Paulo, 1996. Tradução, introdução e notas de A. K. T. Assis. ISBN: 8531403405.

[New99] I. Newton. *The Principia: Mathematical Principles of Natural Philosophy.* University of California Press, Berkeley, 1999. A new translation by I. B. Cohen and A. Whitman, assisted by J. Budenz.

[New08a] I. Newton. *O Sistema do Mundo.* Edusp, São Paulo, 2008. Tradução de F. D. Joly.

[New08b] I. Newton. *Principia — Princípios Matemáticos de Filosofia Natural.* Edusp, São Paulo, 2008. Livro II: O Movimento dos Corpos (em Meios com Resistência). Livro III: O Sistema do Mundo (Tratado Matematicamente). Tradução de A. K. T. Assis. ISBN: 9788531410895.

[New10] I. Newton. *Principia — Princípios Matemáticos de Filosofia Natural.* Folha de São Paulo, São Paulo, 2010. Livro III: O Sistema do Mundo (Tratado Matematicamente). Tradução de A. K. T. Assis. ISBN: 9788563270306. Coleção Folha de São Paulo: Livros que Mudaram o Mundo, Volume 9.

[Nor65] J. D. North. *The Measure of the Universe — A History of Modern Cosmology.* Clarendon Press, Oxford, 1965.

[Nor95] J. D. Norton. Mach's principle before Einstein. In J. B. Barbour and H. Pfister, editors, *Mach's Principle — From Newton's Bucket to Quantum Gravity*, pages 9–57, Boston, 1995. Birkhäuser.

[Nus81] H. M. Nussenzveig. *Curso de Física Básica*, volume 1 — Mecânica. Edgard Blücher, São Paulo, 1981.

[Oli93] M. P. Oliveira. O éter luminoso como espaço absoluto. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, 3 (1/2), Série 3:163–182, 1993.

[O'R65] A. O'Rahilly. *Electromagnetic Theory — A Critical Examination of Fundamentals.* Dover, New York, 1965.

[Ørs86] H. C. Ørsted. Experiências sobre o efeito do conflito elétrico sobre a agulha magnética. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, 10:115–122, 1986. Tradução de R. d. A. Martins.

[Ørs98a] H. C. Ørsted. New electro-magnetic experiments. In K. Jelved, A. D. Jackson, and O. Knudsen, editors, *Selected Scientific Works of Hans Christian Ørsted*, pages 421–424. Princeton University Press, Princeton, 1998. Artigo publicado originalmente em alemão em 1820.

[Ørs98b] H. C. Ørsted. Observations on electro-magnetism. In K. Jelved, A. D. Jackson, and O. Knudsen, editors, *Selected Scientific Works of Hans Christian Ørsted*, pages 430–445. Princeton University Press, Princeton, 1998. Reimpressão dos *Annals of Philosophy* editados por Thomson, Vol. 2, pp. 321-337 (1821).

[Pai82] A. Pais. *'Subtle is the Lord...' — The Science and the Life of Albert Einstein.* Oxford University Press, Oxford, 1982.

[Pai86] A. Pais. *Inward Bound — Of Matter and Forces in the Physical World.* Clarendon Press, Oxford, 1986.

[PFH05] H. Pfister, J. Frauendiener, and S. Hengge. A model for linear dragging. *Classical and Quantum Gravity*, 22:4743–4761, 2005. Doi: 10.1088/0264-9381/22/22/007.

[Pfi95] H. Pfister. Dragging effects near rotating bodies and in cosmological models. In J. B. Barbour and H. Pfister, editors, *Mach's Principle — From Newton's Bucket to Quantum Gravity*, pages 315–331, Boston, 1995. Birkhäuser.

[Pfi07] H. Pfister. On the history of the so-called Lense-Thirring effect. *General Relativity and Gravitation*, 39:1735–1748, 2007. Doi: 10.1007/s10714-007-0521-4.

[Phi96] T. E. Phipps, Jr. Clock rates in a machian universe. *Toth-Maatian Review*, 13:5910–5917, 1996.

[Phi13] T. E. Phipps Jr. *Old Physics for New: a worldview alternative to Einstein's relativity theory.* Apeiron, Montreal, 2nd edition, 2013.

[Poi53] H. Poincaré. Les limites de la loi de Newton. *Bulletin Astronomique*, 17:121–269, 1953.

[Pop53] K. R. Popper. A note on Berkeley as precursor of Mach. *British Journal for the Philosophy of Science*, 4:26–36, 1953.

[Pot84] A. Potier. *Collection de Mémoires relatifs a la Physique*, volume 1: *Mémoires de Coulomb.* Gauthiers-Villars, Paris, 1884.

[PR94] F. M. Peixoto and M. A. F. Rosa. On Thirring's approach to Mach's principle: criticisms and speculations on extensions of his original work. In P. S. Letelier and W. A. Rodrigues Jr., editors, *Gravitation: The Spacetime Structure*, pages 172–178, Singapore, 1994. World Scientific. Proceedings of the 8th Latin American symposium on relativity and gravitation.

[Pur80] E. M. Purcell. *Eletricidade e Magnetismo.* Edgard Blücher, São Paulo, 1980. Curso de Física de Berkeley, Volume 2. Tradução de W. Wajntal, A. d. Oliveira, E. Cavallari, R. O. Zangari e J. Talpe.

[PW65] A. A. Penzias and R. W. Wilson. A measurement of excess antenna temperature at 4080 Mc/s. *Astrophysical Journal*, 142:419–421, 1965.

[Rai81] D. J. Raine. Mach's principle and space-time structure. *Reports on Progress in Physics*, 44:1151–1195, 1981.

[Reb77] G. Reber. Endless, boundless, stable universe. *University of Tasmania Occasional Paper*, 9:1–18, 1977.

[Reb86] G. Reber. Intergalactic plasma. *IEEE Transactions on Plasma Science*, PS-14:678–682, 1986.

[Reg33] E. Regener. Der Energiestrom der Ultrastrahlung. *Zeitschrift für Physik*, 80:666–669, 1933.

[Reg95] E. Regener. The energy flux of cosmic rays. *Apeiron*, 2:85–86, 1995.

[Rei14] H. Reissner. Über die Relativität der Beschleunigungen in der Mechanik. *Physikalishe Zeitschrift*, 15:371–375, 1914.

[Rei15] H. Reissner. Über eine Möglichkeit die Gravitation als unmittelbare Folge der Relativität der Trägheit abzuleiten. *Physikalishe Zeitschrift*, 16:179–185, 1915.

[Rei16] H. Reissner. Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie. *Annalen der Physik*, 50:106–120, 1916.

[Rei73] M. Reinhardt. Mach's principle — A critical review. *Zeitschritte fur Naturforschung A*, 28:529–537, 1973.

[Rei95a] H. Reissner. On a possibility of deriving gravitation as a direct consequence of the relativity of inertia. In J. B. Barbour and H. Pfister, editors, *Mach's Principle — From Newton's Bucket to Quantum Gravity*, pages 143–146, Boston, 1995. Birkhäuser. Translated by J. B. Barbour.

[Rei95b] H. Reissner. On the relativity of accelerations in mechanics. In J. B. Barbour and H. Pfister, editors, *Mach's Principle, From Newton's Bucket to Quantum Gravity*, pages 134–142, Boston, 1995. Birkhäuser. Translated by J. B. Barbour.

[RFT82] V. C. Rubin, W. K. Ford, Jr., and N. Thonnard. Rotational properties of 23 Sb galaxies. *Astrophysical Journal*, 261:439–456, 1982.

[Rib] Ribeiro, J. E. A., Sobre a Força de Lorentz, os Conceitos de Campo e a "Essência" do Eletromagnetismo Clássico. Tese de mestrado, Instituto de Física, Universidade de São Paulo, Brasil, 2008.

[RL97] W. A. Rodrigues Jr. and J. Y. Lu. On the existence of undistorted progressive waves (UPWs) of arbitrary speeds $0 \leq v < \infty$ in nature. *Foundations of Physics*, 27:435–508, 1997.

[RMC82] J. R. Reitz, F. J. Milford, and R. W. Christy. *Fundamentos da Teoria Eletromagnética*. Editora Campus, Rio de Janeiro, 3ª ed., 1982. Tradução de R. B. Sander e C. Duarte.

[RO89] W. A. Rodrigues Jr. and E. C. de Oliveira. A comment on the twin paradox and the Hafele-Keating experiment. *Physics Letters A*, 140:479–484, 1989.

[Roe35] O. Roemer. The velocity of light. In W. F. Magie, editor, *A Source Book in Physics*, pages 335–337, New York, 1935. McGraw-Hill.

[Ron85] J. M. S. Ron. *El Origen y Desarollo de la Relatividad*. Alianza Editorial, Madrid, 1985.

[RR89] W. A. Rodrigues Jr. and M. A. F. Rosa. The meaning of time in the theory of relativity and Einstein's later view on the twin paradox. *Foundations of Physics*, 19:705–724, 1989.

[Rub83] V. C. Rubin. Dark matter in spiral galaxies. *Scientific American*, 248:88–101, 1983.

[RVA08] J. E. A. Ribeiro, A. Vannucci, and A. K. T. Assis. The multiple definitions of 'field' in the context of Electromagnetism. In M. G. P. Batista, editor, *Proceedings of the VI Taller Internacional "ENFIQUI 2008" — La Enseñanza de la Física y la Química*, pages 1–4, Matanzas, Cuba, 2008. Universidad Pedagógica "Juan Marinello".

[Sag13a] G. Sagnac. L'éther lumineux démontré par l'effet du vent relatif d'éther dans un interféromètre en rotation uniforme. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 157:708–710, 1913.

[Sag13b] G. Sagnac. Sur la preuve de la réalité de l'éther lumineux par l'expérience de l'interférographe tournant. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 157:1410–1413, 1913.

[San84] R. H. Sanders. Anti-gravity and galaxy rotation curves. *Astronomy and Astrophysics*, 136:L21–L23, 1984.

[San86] R. H. Sanders. Finite length-scale anti-gravity and observations of mass discrepancies in galaxies. *Astronomy and Astrophysics*, 154:135–144, 1986.

[San90] R. H. Sanders. Mass discrepancies in galaxies: dark matter and alternatives. *Astronomy and Astrophysics Review*, 2:1–28, 1990.

[Sar31] G. Sarton. Discovery of the aberration of light. *Isis*, 6:233–239, 1931.

[Sch15] M. Schlick. Die philosophische Bedeutung des Relativitätsprinzips. *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, 159:129–175, 1915.

[Sch25] E. Schrödinger. Die Erfüllbarkeit der Relativitätsforderung in der klassischen Mechanik. *Annalen der Physik*, 77:325–336, 1925.

[Sch57] E. Schrödinger. *Expanding Universes*. Cambridge University Press, Cambridge, 1957.

[Sch64] L. I. Schiff. Observational basis of Mach's principle. *Reviews of Modern Physics*, 36:510–511, 1964.

[Sch79] M. Schlick. The philosophical significance of the principle of relativity. In H. L. Mulder and B. F. B. v. d. Velde-Schlick, editors, *Philosophical Papers of Moritz Schlick*, volume 1, pages 153–189. Reidel, Dordrecht, 1979. Translated by P. Heath.

[Sch84] E. Schrödinger. *Collected Papers*, volume 2. Austrian Academy of Sciences, Vienna, 1984.

[Sch95] E. Schrödinger. The possibility of fulfillment of the relativity requirement in classical mechanics. In J. B. Barbour and H. Pfister, editors, *Mach's Principle — From Newton's Bucket to Quantum Gravity*, pages 147–158, Boston, 1995. Birkhäuser. Translated by J. B. Barbour.

[Sci53] D. W. Sciama. On the origin of inertia. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 113:34–42, 1953.

[See] Seegers, C., De motu perturbationibusque planetarum secundum legem electrodynamicam Weberianam solem ambientium. Dissertation, Göttingen, 1864.

[See95] H. Seeliger. Ueber das Newton'sche Gravitationsgesetz. *Astronomische Nachrichten*, 137:129–136, 1895.

[See17a] H. Seeliger. Bemerkung zu P. Gerbers Aufsatz: "Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation". *Annalen der Physik*, 53:31–32, 1917.

[See17b] H. Seeliger. Weitere Bemerkungen zur "Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation". *Annalen der Physik*, 54:38–40, 1917.

[See24] C. Seegers. *Über die Bewegung und die Störungen der Planeten, wenn dieselben sich nach dem Weberschen elektrodynamischen Gesetz um die Sonne bewegen.* Kommissionsverlag von Friedr. Viewweg & Sohn Akt. Ges., Braunschweig, 1924. Neu herausgegeben von P. Heylandt. Übersetzt von F. Diestel.

[Ser] A. Servus, Untersuchungen über die Bahn und die Störungen der Himmelskörper mit Zugrundelegung des Weber'schen electrodynamischen Gesetzes. Dissertation, Halle, 1885.

[She60] C. W. Sherwin *et al.* Search for the anisotropy of inertia using the Mössbauer effect in Fe^{57}. *Physical Review Letters*, 4:399–401, 1960.

[SJ04] R. A. Serway and J. W. Jewett Jr. *Princípios de Física*, volume 1, Mecânica Clássica. Thomson, São Paulo, 2004. Tradução de A. K. T. Assis. ISBN: 8522103828.

[SK07] M. C. d. Silva and S. Krapas. Controvérsia ação a distância/ação mediada: abordagens didáticas para o ensino das interações físicas. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 29:471–479, 2007.

[Soa92] D. S. L. Soares. An alternative view of flat rotation curves in spiral galaxies. *Revista Mexicana de Astronomia e Astrofisica*, 24:3–7, 1992.

[Soa94] D. S. L. Soares. An alternative view of flat rotation curves. II. The observations. *Revista Mexicana de Astronomia e Astrofisica*, 28:35–42, 1994.

[Soa02] D. S. L. Soares. A tradução de *Big Bang*. Disponível em: http://www.fisica.ufmg.br/˜dsoares/, 2002.

[Sym82] K. R. Symon. *Mecânica*. Editora Campus, Rio de Janeiro, 5ª ed., 1982. Tradução de G. B. Batista.

[Tat78] R. Taton (editor). *Roemer et la Vitesse de la Lumière*. J. Vrin, Paris, 1978.

[Thi18] H. Thirring. Über die Wirkung rotierender ferner Massen in der Einsteinschen Gravitationstheorie. *Physikalische Zeitschrift*, 19:33–39, 1918.

[Thi21] H. Thirring. Berichtigung zu meiner Arbeit: 'Über die Wirkung rotierender ferner Massen in der Einsteinschen Gravitationstheorie'. *Physikalische Zeitschrift*, 22:29–30, 1921.

[Tho81] J. J. Thomson. On the electric and magnetic effects produced by the motion of electrified bodies. *Philosophical Magazine*, 11:229–249, 1881.

[Tho21] J. J. Thomson. *Elements of the Mathematical Theory of Electricity and Magnetism*. Cambridge University Press, Cambridge, 5th edition, 1921.

[Tis72] F. Tisserand. Sur le mouvement des planètes autour du soleil, d'après la loi électrodynamique de Weber. *Comptes Rendues de l'Academie des Sciences de Paris*, 75:760–763, 1872.

[Tis95] F. F. Tisserand. *Traité de Mécanique*, volume 4, Chapter 28 (Vitesse de propagation de l'attraction), pp. 499-503, "Loi d'attraction conforme à la loi électrodynamique de Weber". Gauthier-Villars, Paris, 1895.

[Tol92] S. A. Tolchelnikova-Murri. A new way to determine the velocity of the solar system. *Galilean Electrodynamics*, 3:72–75, 1992.

[Tol93] S. A. Tolchelnikova-Murri. The Doppler observations of Venus contradict SRT. *Galilean Electrodynamics*, 4:3–6, 1993.

[Toma] Tombe, F. D., Maxwell's original equations, The General Science Journal (2012). Available at: http://gsjournal.net/Science-Journals/Essays-Mechanics%20/%20Electrodynamics/Download/3889.

[Tomb] Tombe, F. D., The significance of Maxwell's equations, The General Science Journal (2012). Available at: http://gsjournal.net/Science-Journals/Essays-Mechanics%20/%20Electrodynamics/Download/4258.

[War13] V. P. Warkulwiz. *Universe without Space and Time*. Albertus Magnus Apostolate for Religion and Science, Bensalem, 2013.

[WE82] P. W. Worden and C. W. F. Everitt. Resource letter GI-1: gravity and inertia. *American Journal of Physics*, 50:494–500, 1982.

[Web46] W. Weber. Elektrodynamische Maassbestimmungen — Über ein allgemeines Grundgesetz der elektrischen Wirkung. *Abhandlungen bei Begründung der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften am Tage der zweihundertjährigen Geburtstagfeier Leibnizen's herausgegeben von der Fürstl. Jablonowskischen Gesellschaft (Leipzig)*, pages 211–378, 1846. Reprinted in Wilhelm Weber's *Werke*, Vol. 3, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1893), pp. 25-214.

[Web48] W. Weber. Elektrodynamische Maassbestimmungen. *Annalen der Physik und Chemie*, 73:193–240, 1848. Reprinted in Wilhelm Weber's *Werke*, Vol. 3, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1893), pp. 215-254.

[Web52a] W. Weber. Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere über Diamagnetismus. *Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, mathematisch-physische Klasse*, 1:485–577, 1852. Reprinted in Wilhelm Weber's *Werke*, Vol. 3, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1893) pp. 473-554.

[Web52b] W. Weber. Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere Widerstandsmessungen. *Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, mathematisch-physische Klasse*, 1:199–381, 1852. Reprinted in Wilhelm Weber's *Werke*, Vol. 3, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1893), pp. 301-471.

[Web55] W. Weber. Vorwort bei der Übergabe der Abhandlung: *Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere Zurückführung der Stromintensitäts-Messungen auf mechanisches Maass. Berichte über die Verhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch-physische Klasse*, 17:55–61, 1855. Reprinted in Wilhelm Weber's *Werke*, Vol. 3, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1893), pp. 591-596.

[Web64] W. Weber. Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere über elektrische Schwingungen. *Abhandlungen der Königl. Sächs. Geselschaft der Wissenschaften, mathematisch-physische Klasse*, 6:571–716, 1864. Reprinted in Wilhelm Weber's *Werke*, Vol. 4, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1894), pp. 105-241.

[Web71] W. Weber. Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere über das Princip der Erhaltung der Energie. *Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, mathematisch-physische Klasse (Leipzig)*, 10:1–61, 1871. Reprinted in Wilhelm Weber's *Werke*, Vol. 4, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1894), pp. 247-299.

[Web72] W. Weber. Electrodynamic measurements — Sixth memoir, relating specially to the principle of the conservation of energy. *Philosophical Magazine*, 43:1–20 and 119–149, 1872.

[Web78] W. Weber. Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere über die Energie der Wechselwirkung. *Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, mathematisch-physische Klasse, (Leipzig)*, 11:641–696, 1878. Reprinted in Wilhelm Weber's *Werke*, Vol. 4, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1894), pp. 361-412.

[Web92a] W. Weber. *Wilhelm Weber's Werke,* E. Riecke (ed.), volume 2, *Magnetismus*. Springer, Berlin, 1892.

[Web92b] W. Weber. *Wilhelm Weber's Werke,* W. Voigt, (ed.), volume 1, *Akustik, Mechanik, Optik und Wärmelehre*. Springer, Berlin, 1892.

[Web93] W. Weber. *Wilhelm Weber's Werke, H. Weber (ed.)*, volume 3, *Galvanismus und Elektrodynamik*, first part. Springer, Berlin, 1893.

[Web94a] W. Weber. Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere über den Zusammenhang des elektrischen Grundgesetzes mit dem Gravitationsgesetze. In H. Weber, editor, Wilhelm Weber's *Werke,* Vol. 4, pages 479–525, Berlin, 1894. Springer.

[Web94b] W. Weber. *Wilhelm Weber's Werke,* H. Weber, (ed.), volume 4, *Galvanismus und Elektrodynamik*, second part. Springer, Berlin, 1894.

[Web66] W. Weber. On the measurement of electro-dynamic forces. In R. Taylor, editor, *Scientific Memoirs,* Vol. 5, pages 489–529, New York, 1966. Johnson Reprint Corporation.

[Web07] W. Weber, 2007. Determinations of electrodynamic measure: concerning a universal law of electrical action, 21st Century Science & Technology, traduzido para a língua inglesa por S. P. Johnson, editado por L. Hecht e A. K. T. Assis. Disponível desde março de 2007 em: http://www.21stcenturysciencetech.com/translation.html.

[Web08] W. Weber, 2008. Determinations of electrodynamic measure: particularly in respect to the connection of the fundamental laws of electricity with the law of gravitation, 21st Century Science & Technology, disponível online desde novembro de 2008, traduzido para a língua inglesa por G. Gregory, editado por L. Hecht e A. K. T. Assis. Disponível em: http://www.21stcenturysciencetech.com/translation.html.

[Wes90] J. P. Wesley. Weber electrodynamics, Part III. Mechanics, gravitation. *Foundations of Physics Letters*, 3:581–605, 1990.

[Wes91] J. P. Wesley. *Selected Topics in Advanced Fundamental Physics*. Benjamin Wesley Publisher, Blumberg, 1991.

[Whi53] G. J. Whitrow. Berkeley's philosophy of motion. *British Journal for the Philosophy of Science*, 4:37–45, 1953.

[Whi73] E. T. Whittaker. *A History of the Theories of Aether and Electricity*, volume 1: *The Classical Theories*. Humanities Press, New York, 1973.

[Wie60] K. H. Wiederkehr. Wilhelm Webers Stellung in der Entwicklung der Elektrizitätslehre. Dissertation, Hamburg, 1960.

[Wie67] K. H. Wiederkehr. *Wilhelm Eduard Weber — Erforscher der Wellenbewegung und der Elektrizität (1804-1891)*, volume 32 of *Grosse Naturforscher,* H. Degen (ed.). Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1967.

[Wis81] M. N. Wise. German concepts of force, energy, and the electromagnetic ether: 1845–1880. In G. N. Cantor and M. J. S. Hodge, editors, *Conceptions of Ether — Studies in the History of Ether Theories 1740–1900*, pages 269–307, Cambridge, 1981. Cambridge University Press.

[WK56] W. Weber and R. Kohlrausch. Über die Elektricitätsmenge, welche bei galvanischen Strömen durch den Querschnitt der Kette fliesst. *Annalen der Physik und Chemie,* J. C. Poggendoff (ed.), 99:10–25, 1856. Reprinted in Wilhelm Weber's *Werke*, Vol. 3, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1893), pp. 597-608.

[WK68] W. Weber and R. Kohlrausch. Über die Einführung absoluter elektrischer Maße. In S. Balke, H. Gericke, W. Hartner, G. Kerstein, F. Klemm, A. Portmann, H. Schimank, and K. Vogel, editors, *Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, new series, Vol. 5.* Friedrich-Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1968. Commented by F. Kohlrausch and K. H. Wiederkehr.

[WK03] W. Weber and R. Kohlrausch. On the amount of electricity which flows through the cross-section of the circuit in galvanic currents. In F. Bevilacqua and E. A. Giannetto, editors, *Volta and the History of Electricity*, pages 287–297. Università degli Studi di Pavia and Editore Ulrico Hoepli, Milano, 2003. Traduzido por S. P. Johnson. Disponível em: www.ifi.unicamp.br/˜assis.

[WK08] W. Weber and R. Kohlrausch. Sobre a quantidade de eletricidade que flui através da seção reta do circuito em correntes galvânicas. *Revista Brasileira de História da Ciência*, 1:94–102, 2008. Traduzido por A. K. T. Assis.

[Woo68] A. E. Woodruff. The contributions of Hermann von Helmholtz to electrodynamics. *Isis*, 59:300–311, 1968.

[Woo81] A. E. Woodruff. Weber, Wilhelm Eduard. In C. C. Gillispie, editor, *Dictionary of Scientific Biography,* Vol. 14, pages 203–209, New York, 1981. Charles Scribner's Sons.

[WW93] E. H. Weber and W. Weber. *Wilhelm Weber's Werke,* E. Riecke (ed.), volume 5, *Wellenlehre auf Experimente gegründet oder über die Wellen tropfbarer Flüssigkeiten mit Anwendung auf die Schall- und Lichtwellen.* Springer, Berlin, 1893. Originally published in 1825.

[WW94] W. Weber and E. Weber. *Wilhelm Weber's Werke,* F. Merkel and O. Fischer (editors), volume 6, *Mechanik der menschlichen Gehwerkzeuge. Eine anatomisch-physiologische Untersuchung.* Springer, Berlin, 1894. Originally published in 1836.

[XA94] A. L. Xavier Jr. and A. K. T. Assis. O cumprimento do postulado de relatividade na mecânica clássica — uma tradução comentada de um texto de Erwin Schrödinger sobre o princípio de Mach. *Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência*, 12:3–18, 1994.

[XA97] A. L. Xavier Jr. and A. K. T. Assis. Schrödinger, Reissner, Weber e o princípio de Mach. *Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência*, 17:103–106, 1997.

[YvdM68] W. Yourgrau and A. van der Merwe. Did Ernst Mach 'miss the target'? *Synthese*, 18:234–250, 1968.

[ZA99] A. Zylbersztajn and A. K. T. Assis. Sobre a possível realidade das forças fictícias: uma visão relacional da mecânica. *Acta Scientiarum*, 21:817–822, 1999.

[Zol76] J. C. F. Zollner. *Principien einer elektrodynamischen Theorie der Materie.* Engelmann, Leipzig, 1876.

[Zol83] J. C. F. Zollner. *Über die Natur der Cometen — Beiträge zur Geschichte und Theorie der Erkenntniss.* L. Staackmann, Leipzig, 3rd edition, 1883. First edition of 1872.

[Zyl94] A. Zylbersztajn. Newton's absolute space, Mach's principle and the possible reality of fictitious forces. *European Journal of Physics*, 15:1–8, 1994.

Errata do livro de A. K. T. Assis, Mecânica Relacional e Implementação do Princípio de Mach com a Força de Weber Gravitacional (Apeiron, Montreal, 2013), 459 páginas, ISBN: 9780986492693.

Agradeço a Dayane Bancoff e a Fabio Menezes de Souza Lima por algumas destas correções.

- Na página 19, a 9ª linha da Seção 1.7 deve ser:

nos casos em que $\sum_{\substack{p=1 \\ p\neq k}}^{N} \vec{F}_{pk} = \vec{0}$, conclui-se da equação (1.5) que:

- Na página 26, a terceira linha depois da legenda da figura 2.5 deve ser:

mola exerce uma força $\vec{F}$ sobre ele, figura 2.6.

- Na página 36, a equação (2.29) deve ser:

$$\ddot{r} \equiv \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2} \equiv \ddot{r}_{12} \equiv \frac{d\dot{r}_{12}}{dt} = \frac{d^2 r_{12}}{dt^2} = \frac{\vec{v}_{12} \cdot \vec{v}_{12} - (\hat{r} \cdot \vec{v}_{12})^2 + \vec{r} \cdot \vec{a}_{12}}{r} \ . \tag{2.29}$$

- Na página 126, a equação (8.44) deve ser:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_{i1}/\rho_{g1}}{\rho_{i2}/\rho_{g2}} \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2 \ .$$

- Na página 175, a terceira linha debaixo para cima deve ser:

dada por $\Omega_p = -qB/2m_i$, equação (7.47). A diferença é que neste último caso estávamos em um referencial

- Na página 238, a primeira linha do último parágrafo deve ser:

Vamos agora analisar o caso ondulatório supondo que o ar esteja parado em relação ao solo. Seja um

- Na página 240, a primeira linha da equação (14.14) deve ser:

$$P = c\frac{dy}{dt} - b\frac{dz}{dt} - \frac{dF}{dt} - \frac{d\Psi}{dx}$$

- Na página 259, a oitava linha depois da equação (15.15) deve ser:

ao referencial *R*, temos $\vec{\omega} = \vec{\Omega}_{GR}$. Combinando as equações (10.40) com a equação (15.12), juntamente com

- Na página 263, a quinta linha depois da equação (15.22) deve ser:

multiplicando a equação (10.35) no caso particular em que $\alpha = \pi/2$ *rad* e sen$\alpha = 1$, já que estamos considerando a

- Na página 277, a décima linha embaixo da equação (16.5) deve ser:

distribuições isotrópicas de matéria interagindo com uma outra partícula q qualquer destas distribuições

- Na página 287, a equação (16.47) deve ser:

$$\vec{F}_i = \int_0^{R_{VL}} d\vec{F}_{\text{casca parada}}(r_{mU} < R) = -\int_0^{R_{VL}} \frac{H_g \xi m_g dM_g e^{-\alpha R}}{3Rc^2} \vec{a}_{mU} = -\Phi_{VL} m_g \vec{a}_{mU} \ . \qquad (16.47)$$

- Na página 287, a primeira linha depois da equação (16.47) deve ser:

Mais uma vez foi utilizada a constante Φ_{VL} definida pela equação (16.46).

- Na página 302, a equação (17.27) deve ser:

$$\frac{B_0}{H_g} = \frac{b_0}{G}, \quad \frac{B_1}{H_g} = \frac{b_1}{G}, \quad \frac{B_2}{H_g} = \frac{b_2}{G} \ . \qquad (17.27)$$

- Na página 320, a segunda linha depois da equação (18.9) deve ser:

$\vec{\Omega}_{GR} = -\vec{\omega}$, leva à conclusão de que a força centrífuga e a força de Coriolis da mecânica clássica deixam

- Na página 328, a quinta linha da Seção 18.8.4 deve ser:

dada no referencial universal U por $\Phi_\infty m_g (\vec{v}_{mU} \cdot \vec{v}_{mU})^2 / 2$, onde m_g é a massa gravitacional da partícula e $\vec{v}_{mU}$

- Na página 358, a segunda linha deve ser:

proporcional à raiz quadrada da massa gravitacional do corpo de prova, como observado experimentalmente.

- Na página 376, a segunda linha da Subseção 22.3.2 deve ser:

e as galáxias distantes estão todos girando juntos com uma velocidade angular Ω_{GR}. A

- Na página 380, a sétima linha da Seção 22.4.4 deve ser:

$d\vec{F}_i = \Phi_\infty dm_{gk} (\omega_{kR} - \Omega_{GR})^2 u_k \hat{u}_k$, onde $\omega_{kR} = \omega_{TR}$, vão atuar em qualquer elemento de massa gravitacional dm_{gk} e volume

- Na página 382, a oitava linha deve ser:

$(R_> - R_<)/R_< = 5^2 \times 0{,}4\% = 10\%$. Embora não seja possível controlar a rotação das galáxias ao redor da Terra, apresentamos

- Na página 403, a segunda linha abaixo da equação (23.73) deve ser:

rotação, enquanto que $\hat{\rho}_k$ é o vetor unitário paralelo ao plano *xy* e apontando do eixo *z* até m_{gk}.

- Na página 420, a 12ª linha do segundo parágrafo deve ser:

gravitacional). Também deduziu-se o fato de que o melhor sistema de referência inercial de que dispomos é

- Na página 424, a sexta linha deve ser:

Weber, fazendo as seguintes substituições nas equações (A.1) e (A.2): $H_e q_1 q_2$ em vez de $-H_g m_{g1} m_{g2}$, assim

Mecânica Relacional

- Uma nova mecânica proposta para substituir a mecânica newtoniana e as teorias da relatividade de Einstein.
- Implementa o princípio de Mach com uma força de Weber gravitacional e com o princípio de equilíbrio dinâmico.
- Explica a experiência do balde de Newton com a curvatura da água sendo devida a sua interação gravitacional com as galáxias distantes quando há uma rotação relativa entre a água e o conjunto de galáxias.
- Destinado a físicos, engenheiros, matemáticos, historiadores, filósofos da ciência e seus estudantes.

Sobre o Autor

Andre Koch Torres Assis nasceu no Brasil e foi educado na Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, obtendo o bacharelado em 1983 e o doutorado em 1987. Realizou um pós-doutorado na Inglaterra no Laboratório Culham (United Kingdom Atomic Energy Authority, 1988) e outro no Centro de Pesquisa Eletromagnética da Northeastern University (Boston, USA, 1991-1992). De agosto de 2001 até novembro de 2002, assim como de fevereiro a maio de 2009, trabalhou no Instituto para a História das Ciências Naturais da Hamburg Universität (Hamburg, Alemanha), com bolsas de pesquisa concedidas pela Fundação Alexander von Humboldt, da Alemanha. É o autor de diversos livros em português e inglês, entre eles: *Eletrodinâmica de Weber*, *Mecânica Relacional*, *Cálculo de Indutância e de Força em Circuitos Elétricos* (com M. A. Bueno), *A Força Elétrica de uma Corrente* (com J. A. Hernandes), *Arquimedes, o Centro de Gravidade e a Lei da Alavanca*, *Os Fundamentos Experimentais e Históricos da Eletricidade* e *O Modelo Planetário de Weber para o Átomo* (com K. H. Wiederkehr e G. Wolfschmidt). Tem sido professor de física da UNICAMP desde 1989, trabalhando com os fundamentos do eletromagnetismo, da gravitação e da cosmologia.

ISBN 978-0-9864926-9-3
9 780986 492693 >